Teorema: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare

S è orientabile $\iff \exists$ c.v.N (campo di versori normali) su S

Def: un atlante $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$

con α appartenente a un insieme di indici A (anche non numerabile)

CONNESSO! (cioè: $\forall\ U_\alpha, U_\beta$ non è unione disgiunta di 2 aperti non vuoti)

Intanto:
se non è così, basta applicare separatamente la costruzione di N_α a ciascuna delle componenti connesse di U_α, essendo queste aperte in $\mathbb{R}^2$, perché U_α aperto, e modificare arbitrariamente (ad esempio ponendo uguale a N_α) le componenti connesse diverse dalla scelta fatta

Poi: supponi di $\forall\ \alpha$ preciso non.

$N_\alpha : f_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^3$; se $p \in f_\alpha(U_\alpha) \subseteq S$

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_1 f_\alpha(q) \wedge \partial_2 f_\alpha(q)}{\| \partial_1 f_\alpha(q) \wedge \partial_2 f_\alpha(q) \|}$$

dove $q = f_\alpha^{-1}(p)$

$\forall\ p : \quad N_\alpha(p) = N(p) \quad \forall p \ N_\alpha(p) = -N(p)$

Dobbiamo le seguenti applicazioni:

$g_\alpha : f_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_\alpha(p) = \underbrace{N_\alpha(p)}_{\text{uscente}} \cdot \underbrace{N(p)}_{\text{uscente}} \in \{-1, 1\}$

aperto in S

U_α connesso $\Rightarrow f_\alpha(U_\alpha)$ connesso

g_α è continua (prodotto scalare di prodotti di funzioni continue)

$\Rightarrow g_\alpha(f_\alpha(U_\alpha))$ è connesso in $\mathbb{R}$ $\subseteq \{-1, 1\}$

$\Rightarrow g_\alpha(f_\alpha(U_\alpha))$ è costante, uguale a 1 o -1.

$\Rightarrow$ su $f_\alpha(U_\alpha)$ vale $N_\alpha \equiv N$, oppure $N_\alpha \equiv -N$

Se $N_\alpha \equiv N$, non modifico la coppia (U_α, f_α)

Se $N_\alpha \equiv -N$,

su U_α cambio la parametrizzazione

$\tilde{f}_\alpha(s,t) := f_\alpha(-s, t)$

È facile verificare che $\tilde{f}_\alpha$ soddisfa ancora ①, ② e ⑤.

Infatti, se ha:

Scrivendo $\tilde{f}_\alpha(s,t) = f_\alpha(h_1(s,t), h_2(s,t))$,

dove $h_1(s,t) = -s$, $h_2(s,t) = t$, grazie alla regola della catena abbiamo

$\partial_s \tilde{f}_\alpha = \partial_x f_\alpha \cdot \frac{\partial h_1}{\partial s} + \partial_y f_\alpha \cdot \frac{\partial h_2}{\partial s} = \partial_x f_\alpha$

$\partial_{st} \tilde{f}_\alpha = \partial_x f_\alpha \cdot \frac{\partial h_1}{\partial t} + \partial_y f_\alpha \cdot \frac{\partial h_2}{\partial t} = \partial_y f_\alpha$

$\Rightarrow \partial_s \tilde{f}_\alpha \wedge \partial_t \tilde{f}_\alpha = \partial_{st} f_\alpha \wedge \partial_{st} f_\alpha = -\partial_1 f_\alpha \wedge \partial_2 f_\alpha$

$\Rightarrow$ almeno $\tilde{N}_\alpha \equiv N$ su $\tilde{f}_\alpha(U_\alpha)$

Faccio questa operazione $\forall\ \beta$ t.c. $(U_\beta, f_\beta) \in \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$:

- se $N_\beta \equiv N$, mantengo la carta locale (U_β, f_β)
- se $N_\beta \equiv -N$, cambio le variabili e considero $(U_\beta, \tilde{f}_\beta)$

Intine:

Cons. $p \in f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$: $N_\alpha(p) = N(p)$

e sia $h_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ $\qquad N_\beta(p) = N(p)$

$$N = N_\beta = \frac{dt\, J(h_{\alpha\beta})}{|dt\, J(h_{\alpha\beta})|} N_\alpha = \frac{dt\, J(h_{\alpha\beta})}{|dt\, J(h_{\alpha\beta})|} \cdot N$$

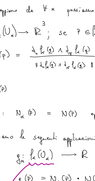
$$\Rightarrow \frac{dt\, J(h_{\alpha\beta})}{|dt\, J(h_{\alpha\beta})|} = 1 \Rightarrow dt\, J(h_{\alpha\beta}) > 0$$

$\Rightarrow \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ è un ATL. ORIENT.

OSS.: Abbiamo dim. che se $\exists$ N c.v.N su S, allora OGNI atl. connesso può essere trasformato affinché orientato.

Esempio:

- cilindo è orientabile
- nastro di Möbius non è orientabile



Vogliamo ora def. angolo tra curve su S

area.

Abbiamo bisogno

PRIMA FORMA FONDAMENTALE su S

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ con PS standard

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

$v \cdot w = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$; $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$= \langle v, w \rangle$ - bilineare
- simmetrico
- def. pos.

Def: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare

$\forall\ p \in S$, cioè $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$

cons. $\cdot_p : T_p S \times T_p S \to \mathbb{R}$

$\cdot_p = \langle \cdot_p, \cdot_p \rangle : T_p S \times T_p S \to \mathbb{R}$

restrizione del PS standard

si dice PRODOTTO SCALARE su $T_p S$

Cons. la forma quadratica

$g(v) = v \cdot v = \|v\|^2$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$g(\lambda v) = \lambda^2 v$

segue che $v \cdot w = \frac{1}{2}(g(v+w) - g(v) - g(w))$

Def: $I_p : T_p S \to \mathbb{R}$

$I_p(v) := v \cdot_p v = v \cdot v = \|v\|^2$

è una FORMA QUADRATICA su $T_p S$

dicesi PRIMA FORM. FOND. di S in p

IN COORDINATE:

Fisso $f : U \to S$

$f(\xi) = p$

base di $T_p S$: $\{\partial_u f(\xi), \partial_v f(\xi)\}$

Cons. $E(\xi) = \partial_u f(\xi) \cdot \partial_u f(\xi) > 0$

$F(\xi) = \partial_u f(\xi) \cdot \partial_v f(\xi)$

$G(\xi) = \partial_v f(\xi) \cdot \partial_v f(\xi) > 0$

Matrice di I_p : $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$