UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

prof. ing. Ingrid Boem
via A. Valerio 6/2
34127 Trieste
ingrid.boem@dia.units.it

8 PROBLEMI PARTICOLARI NELLE TRAVI INFLESSE

A. A. 2024-2025
Corso di Tecnica delle costruzioni

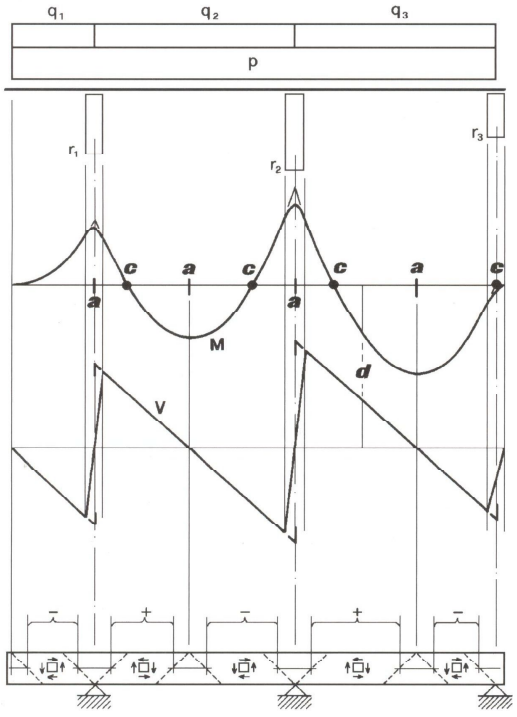
MODELLO DI CALCOLO per le TRAVI INFLESSE SENZA ARMATURA D'ANIMA

Quanto visto in precedenza per il taglio è riferito a moduli elementari corrispondenti a conci di trave con caratteristiche costanti.

Consideriamo ora una generica trave continua su più appoggi:

Diagramma del MOMENTO →

Diagramma del TAGLIO →

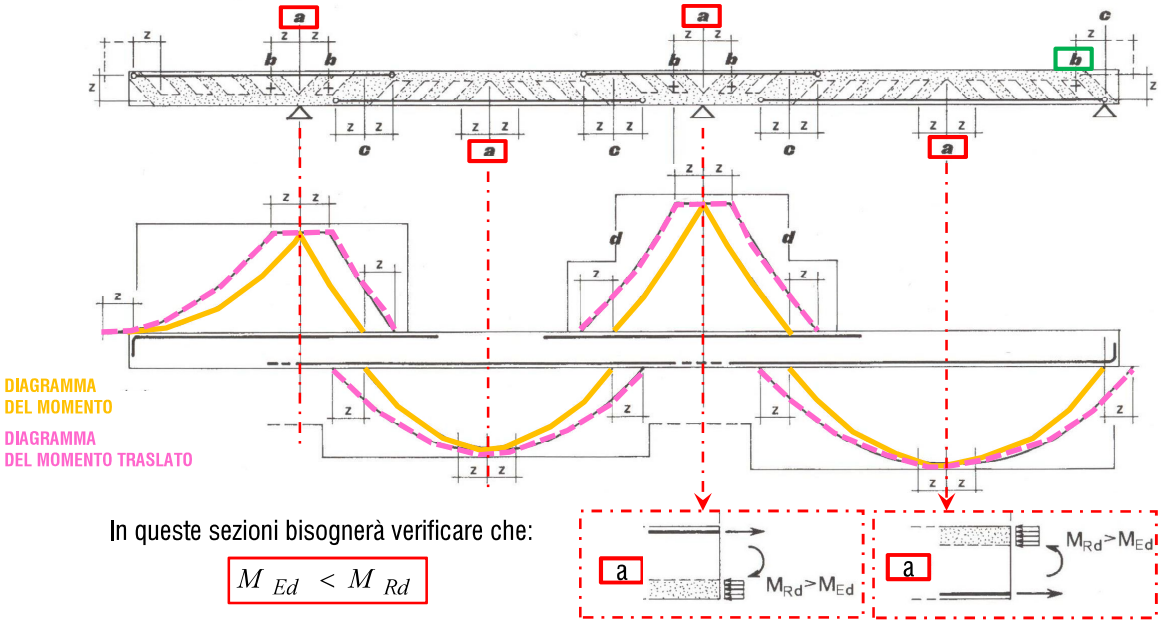


Osserviamo, in particolare, tratti con taglio a segno costante, separati da zone di transizione.

Nelle travi senza armature d'anima si è visto che il modello fondamentale per il calcolo della resistenza a taglio è il MODELLO A PETTINE: nelle zone di transizione del taglio, cambia l'orientamento dei denti inclinati.

Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo

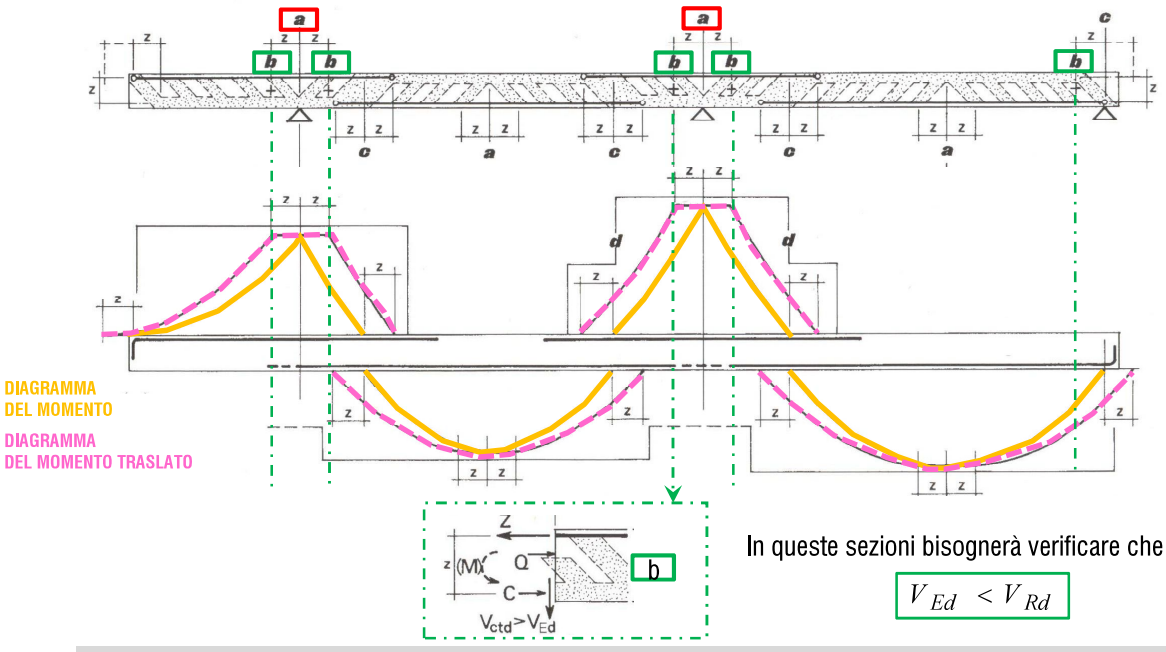


In queste sezioni bisognerà verificare che:

$$M_{Ed} < M_{Rd}$$

Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo

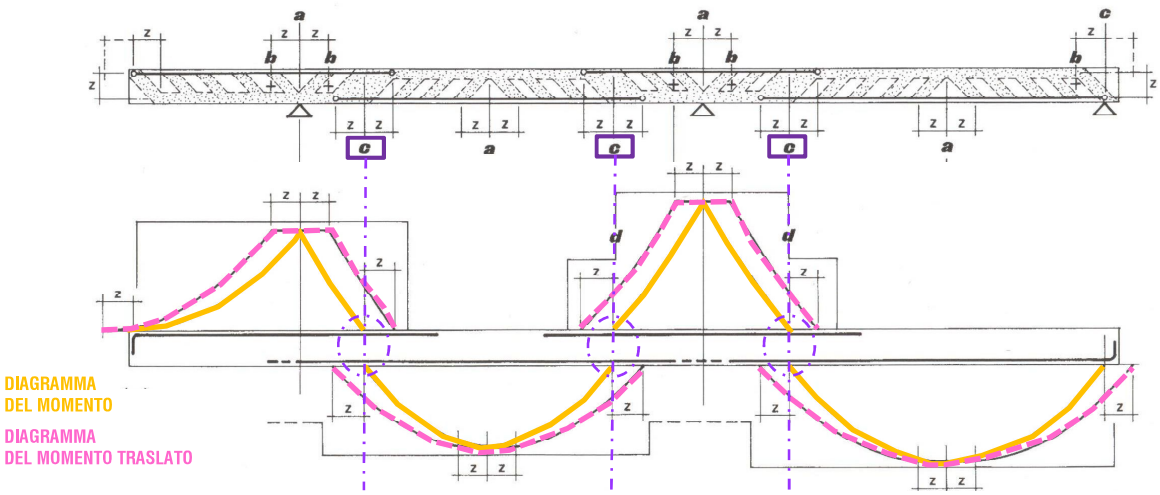


In queste sezioni bisognerà verificare che:

$$V_{Ed} < V_{Rd}$$

Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

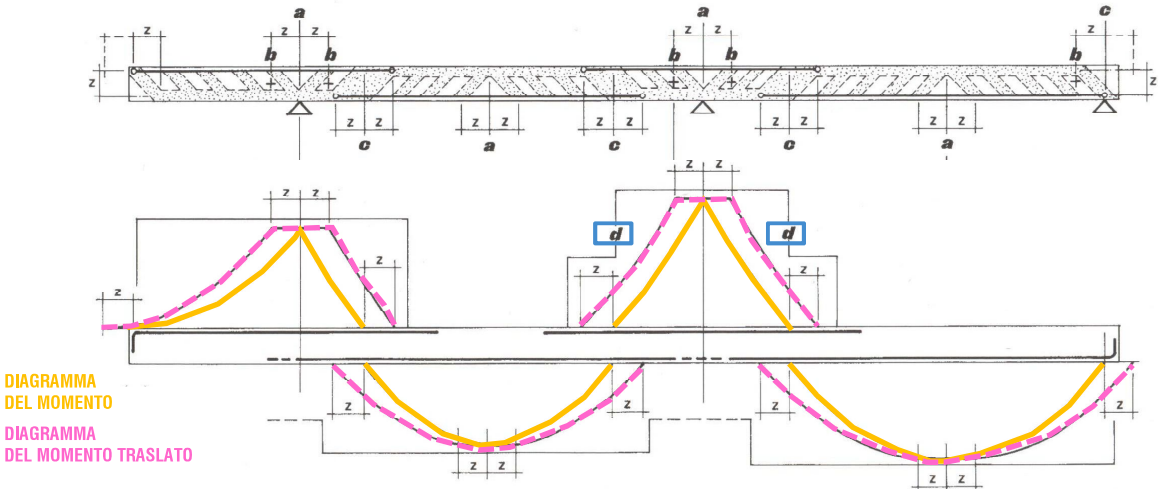
- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo
- Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento



L'applicazione delle verifiche a momento e a taglio nelle sezioni di **tipo a** e **tipo b** sistema automaticamente la sovrapposizione delle armature sulle sezioni di **tipo c**.

Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

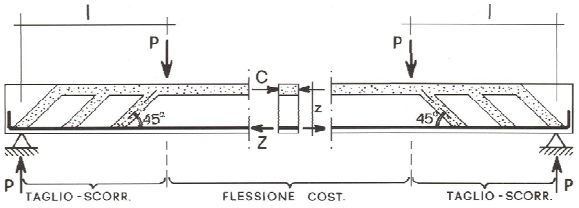
- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo
- Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento
- Tipo d: sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero



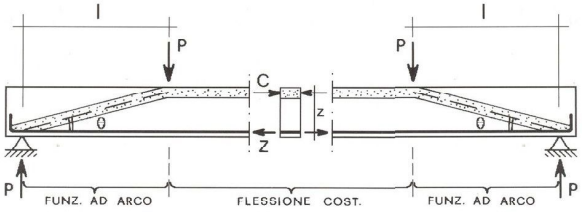
Dovranno essere eseguite entrambe le verifiche a momento e a taglio nelle sezioni di **tipo d**, **quando si hanno variazioni di armatura** (o di sezione della trave).

COMPORTAMENTO AD ARCO

Abbiamo visto per le travi prive di armatura d'anima che il modello fondamentale di resistenza a taglio si basa sul
Modello a pettine (crisi per taglio-scorrimento):
puntoni compressi di calcestruzzo inclinati di 45°



Tuttavia, nelle zone delle travi interessate da fenomeni diffusivi di azioni concentrate sussiste anche un
Modello ad arco:
deviazione delle azioni su un flusso di compressioni direttamente orientato sull'appoggio.



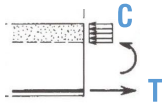
In generale, quindi il collasso della trave d'esempio (a campata singola) può avvenire per:
1) rottura per **momento flettente** di una sezione del tratto centrale;
2) rottura per **taglio-scorrimento** di un concio laterale secondo il meccanismo a pettine;
3) rottura con **funzionamento ad arco** di una sezione laterale (con cedimento a compressione del calcestruzzo o a trazione dell'acciaio)

Consideriamo inizialmente solo 1) e 2):

1) Il collasso si attiva al raggiungimento del momento resistente (v. lezione su Flessione semplice):

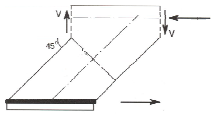
$$M_{Rd} \cong \underbrace{0.2\,dbf_{cd}}_{C}\, z = \underbrace{\rho_s\, dbf_{yd}}_{T}\, z \qquad \bar{x} \cong 0.2\,d \qquad \rho_s = A_s / db$$

C Corrente compresso (calcestruzzo)
T Corrente teso (armatura)



2) Il collasso si attiva al raggiungimento del taglio resistente (v. lezione su Taglio):

$$V_{Rd} = 0.18\, bd\, \kappa \frac{(100\ \rho_s f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c}$$



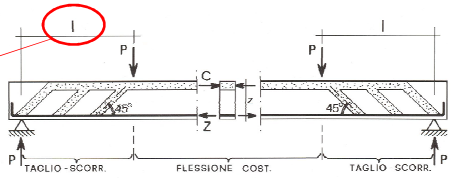
Affinché la trave non collassi, devono rimanere integri sia i correnti (teso e compresso), sollecitati dal momento flettente (1) sia i conci d'anima sollecitati dallo scorrimento (2).
Quindi il più debole determina la resistenza della trave.

Il prevalere del collasso per flessione (1) o del collasso per taglio-scorrimento (2) dipende dal rapporto di forma λ della trave:

$$\lambda = \frac{l}{z} = ctg\ \vartheta = \frac{M}{Vz}$$

M = V·l

l = luce di taglio



Si cerca quindi di correlare le situazioni sopraddette alla snellezza della trave (o, meglio, al suo rapporto di forma λ).

Adimensionalizziamo M_{Rd} e V_{Rd} con M_{Rd} e chiamiamo tale rapporto μ:

λ rapporto di forma della trave

In (1) avremo: $\mu = \dfrac{M_{Rd}}{M_{Rd}} = 1$

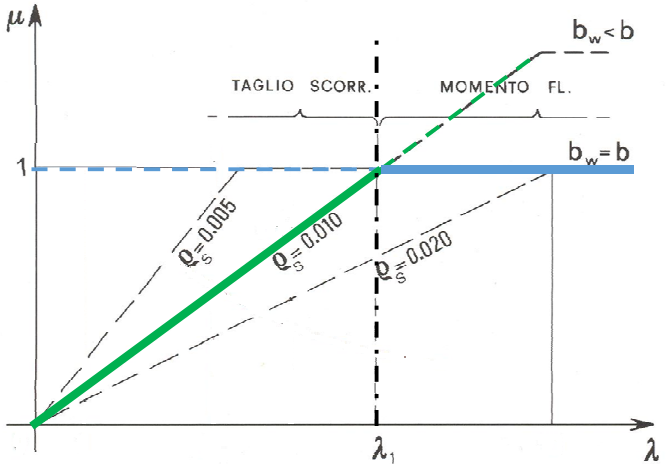
È costante con λ (retta orizzontale nel diagramma λ–μ)

In (2) avremo: $\mu = \dfrac{V_{Rd}\, l}{M_{Rd}} = \dfrac{0.18\, db\, (100\ \rho_s\ f_{ck})^{1/3}}{\rho_s db\ f_{yd}\ \gamma_c} \dfrac{l}{z}$

$$\mu \approx \frac{\lambda}{300\ \rho_s^{2/3}}$$

Dipendenza diretta e lineare da λ (retta inclinata nel diagramma λ–μ)

Ponendo $\dfrac{\gamma_C f_{yd}}{f_{ck}^{1/3}} \approx 250$



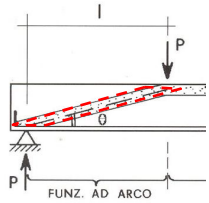
Quando $\lambda < \lambda_1$, comanda (2)
Quando $\lambda > \lambda_1$, comanda (1)

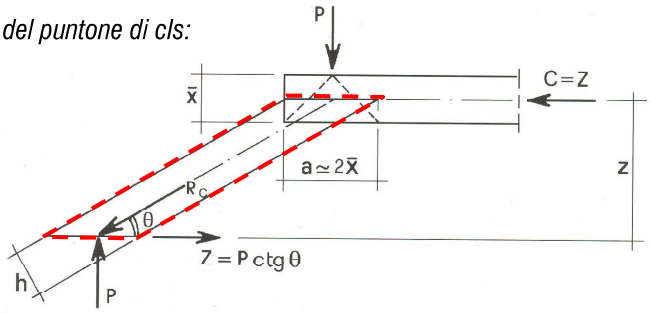
La pendenza della retta verde aumenta al diminuire della percentuale di armatura longitudinale ρ_s.

Consideriamo ora anche 3):

3) Il collasso per meccanismo ad arco può essere associato alla rottura del puntone di calcestruzzo nel quale si convogliano le compressioni provenienti dalle impronte concentrate del carico P o alla rottura del tirante (armatura metallica longitudinale)

- *3.1_Rottura a compressione del puntone di cls:*





Resistenza a compressione del puntone di cls:

$$R_{cR} = hb \cdot f_c = (a \cdot \sin \vartheta) b\ f_c$$

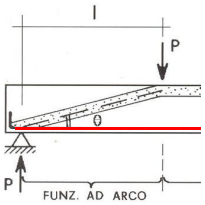
Valore del carico P associato al collasso a compressione del puntone compresso di cls:

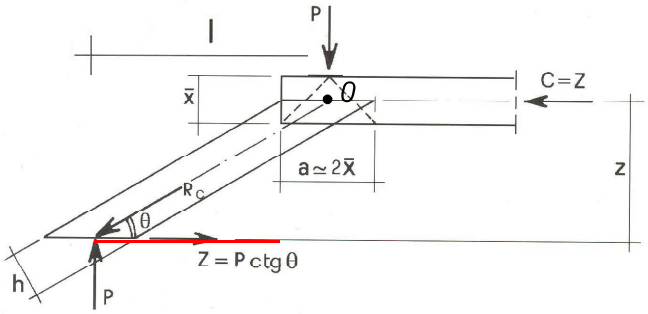
$$P_{Rd} = R_{cR} \sin \theta = a\ b\ f_c \sin^2 \vartheta$$

$$P_{Rd} \cong 0.4\ d\ b\ f_c \sin^2 \vartheta$$

Essendo $a \approx 2\bar{x} \approx 2 \cdot 0.2d \approx 0.4d$

- *3.2_Rottura a trazione del tirante (armatura metallica longitudinale):*





Resistenza a trazione del tirante metallico:

$$Z_R = A_s f_y = \rho_s dbf_y \qquad \rho_s = A_s / db$$

Valore del carico P associato al collasso a trazione del tirante:

$$P_{Rd} = Z_R \cdot z / l = Z_R / \lambda$$

Equilibrio alla rotazione rispetto ad O ($Z \cdot z = P \cdot l$)

$$P_{Rd} = \rho_s dbf_y / \lambda$$

Adimensionalizziamo anche P_{Rd} con M_{Rd} e chiamiamo tale rapporto μ:

λ rapporto di forma della trave

$$\lambda = \frac{l}{z} = ctg\,\vartheta$$

$$\sin^2\vartheta = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

In (3) avremo:

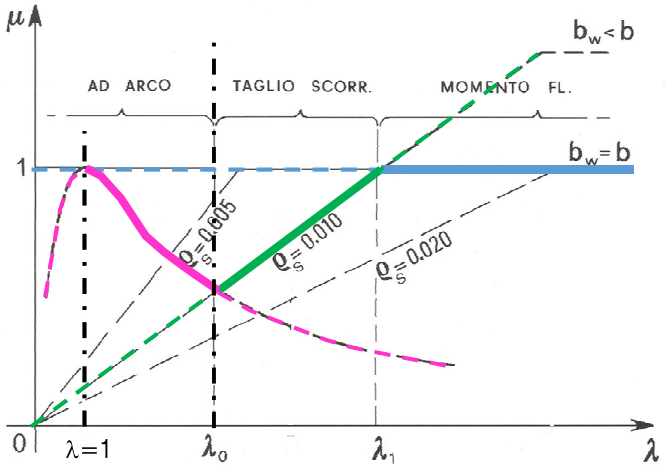
$$\mu = \frac{P_R\, l}{M_{Rd}} = \frac{0.4\, d\, b\, f_{cd}\, l}{0.2\, d\, b\, f_{cd}\, z} \sin^2\vartheta = 2\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

M_{Rd} espressa con rif.to alla resistenza del cls compresso

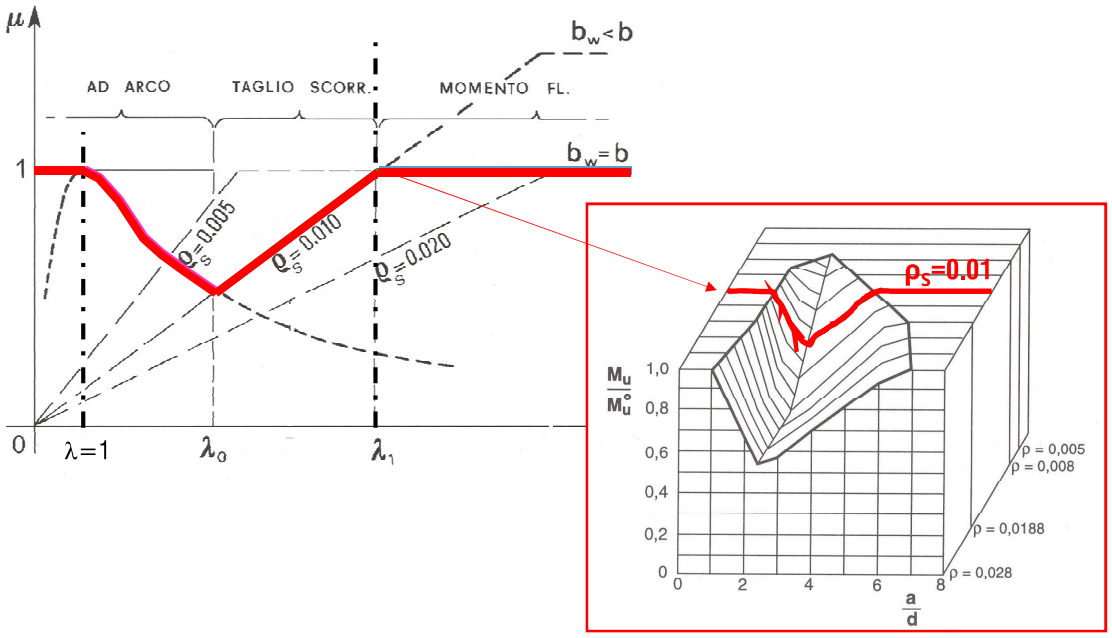
Dipendenza non lineare da λ

$$\mu = \frac{P_R\, l}{M_{Rd}} = \frac{\rho_s\, d\, b\, f_y\, l/\lambda}{\rho_s\, d\, b\, f_y\, z} = 1$$

M_{Rd} espressa con rif.to alla resistenza dell'armatura tesa



Possiamo quindi fare affidamento al comportamento ad arco entro certi limiti di snellezza della trave ($\lambda < \lambda_0$)

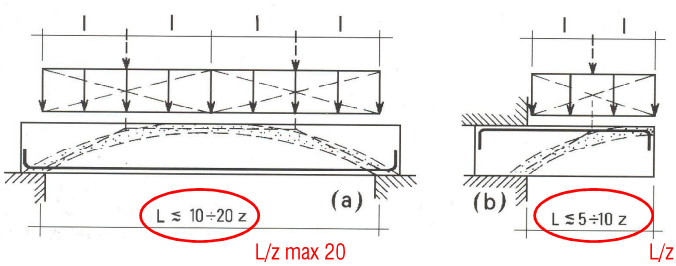


"**Valle di taglio**" ottenuta da Kani

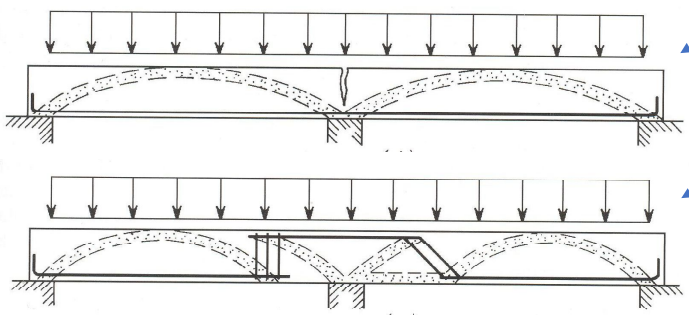
Se λ cade all'interno della valle, avrò collasso per taglio.
Si osserva che al diminuire della quantità di armatura longitudinale (ρ_s) la valle di taglio si restringe

Esempi di meccanismi ad arco nelle travi con carico distribuito e nelle travi continue su più appoggi.

Chiaramente, l'arco si attiva a seconda di come sono disposte le armature.



Il meccanismo ad arco è verosimile solo **entro certi limiti di snellezza** della trave



Questo schema porterebbe anche funzionare in termini di resistenza, ma dobbiamo fare i conti con le verifiche d'esercizio (fessurazione)!

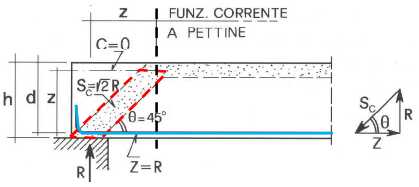
In questo caso per garantire il funzionamento ad arco è necessario introdurre armature longitudinali d'estradosso e aggiungere armature trasversali (staffe o ferri inclinati)

Zone di diffusione (travi senza armatura d'anima)

Nelle zone di diffusione (in prossimità degli appoggi), se si esclude il funzionamento ad arco, si ha un comportamento differente da quello corrente e va analizzato separatamente (**schemi a tirante-puntone**).

Per APPOGGIO D'ESTREMITA'

Caso (a):
Armatura longitudinale corrente



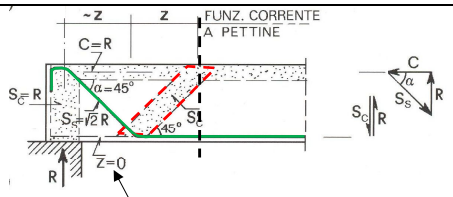
Cedimento puntone di calcestruzzo (θ=45°)

$$R_{Rc} \cong S_c \sin\vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2\vartheta = 0.2dbf_{cd}$$

Cedimento barre d'acciaio inferiori

$$R_{Rs} \cong Z / ctg\,\vartheta = A_s\, f_{yd} / ctg\,\vartheta = A_s\, f_{yd}$$

Caso (b):
Armatura piegata



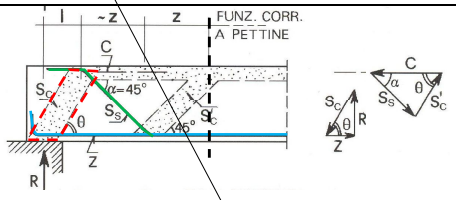
Cedimento puntone di calcestruzzo (θ=45°)

$$R_{Rc} \cong S_c \sin\vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2\vartheta = 0.2dbf_{cd}$$

Cedimento barre piegate

$$R'_{Rs} \cong S_s \sin\alpha = A_s\, f_{yd} \sin\alpha$$

Caso (c):
Armatura longit. corrente + Armatura piegata



Cedimento puntone di calcestruzzo (θ)

$$R_{Rc} \cong S_c \sin\vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2\vartheta$$

Cedimento barre d'acciaio inferiori

$$R_{Rs} \cong Z / ctg\,\vartheta = A_{sl}\, f_{yd} / ctg\,\vartheta$$

Cedimento barre piegate

$$R'_{Rs} \cong S_s \sin\alpha = A_{st}\, f_{yd} \sin\alpha$$

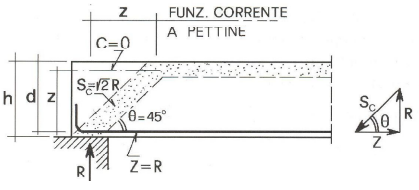
ATTENZIONE! Per garantire le verifiche in esercizio è necessaria la presenza di armature inferiori anche all'estremità (almeno 50% della reazione totale)

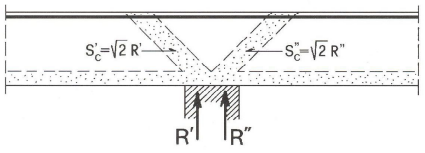
Verifica locale all'appoggio: $R_{Ed} \le \min(R_{Rc}, R_{Rs}, R'_{Rs})$

Solitamente, nelle zone di diffusione, il problema non è la resistenza a compressione del dente ma quella delle armature e il loro adeguato ancoraggio (trasferimento sforzi attraverso le tensioni tangenziali d'aderenza)

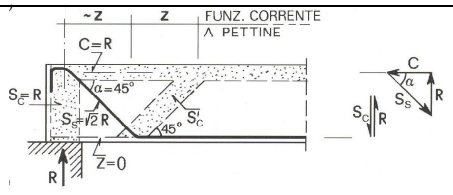
Per APPOGGIO D'ESTREMITA' | **Per APPOGGIO INTERMEDIO**

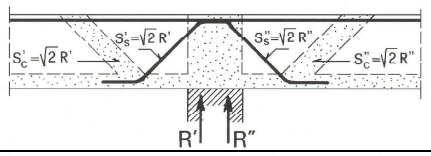
Caso (a):
Armatura longitudinale corrente



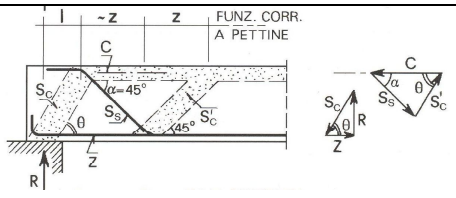


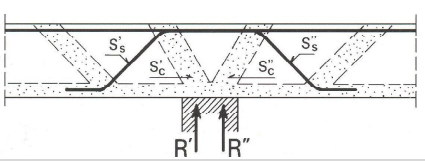
Caso (b):
Armatura piegata





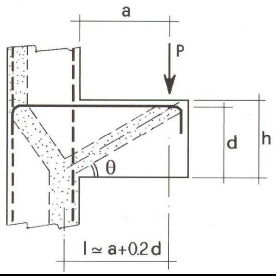
Caso (c):
Armatura longit. corrente + Armatura piegata



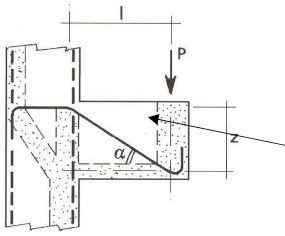


Anche nel caso di **mensole tozze** si fa riferimento a schemi a puntone-tirante simili a quelli appena visti

Caso (a):
Armatura longitudinale corrente

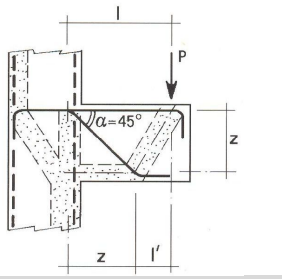


Caso (b):
Armatura piegata



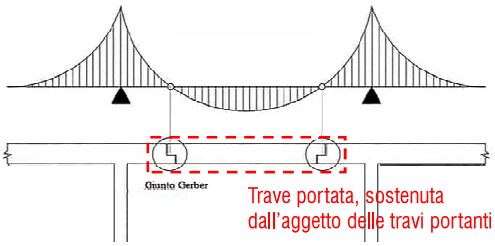
ATTENZIONE SLE!

Caso (c):
Armatura longit. corrente + Armatura piegata



Sella Gerber

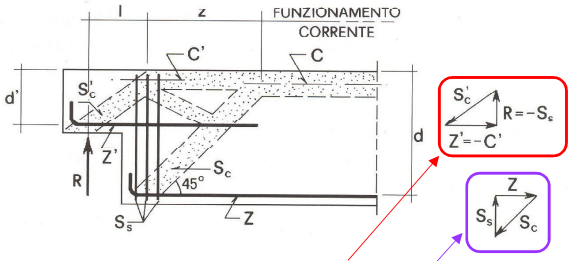
È un elemento strutturale di dettaglio ampiamente utilizzato nei ponti e negli edifici industriali in c.a., provvedendo ad una efficace ed economica connessione.
Consiste in una riduzione della profondità della sezione di estremità (risega) appartenente ad una trave, andando a formare in corrispondenza della stessa una sporgenza (mensola).



Trave portata, sostenuta dall'aggetto delle travi portanti

È FONDAMENTALE PROVVEDERE UN'ADEGUATA ARMATURA ALL'APPOGGIO per RESISTERE A TAGLIO

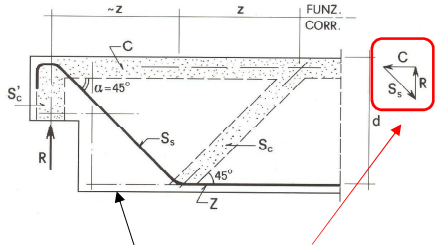
Soluzione (1)



R è equilibrata da Z'(armatura orizzontale) e da S'$_c$ (puntone cls).
S'$_c$ è portata al bordo superiore e deviata sull'orizzontale per la presenza della «forza di appensione» S$_s$ (armatura verticale)

Il puntone inclinato di cls S$_c$ è equilibrato da S$_s$ (armatura verticale) e da Z (armatura orizzontale)

Soluzione (2)

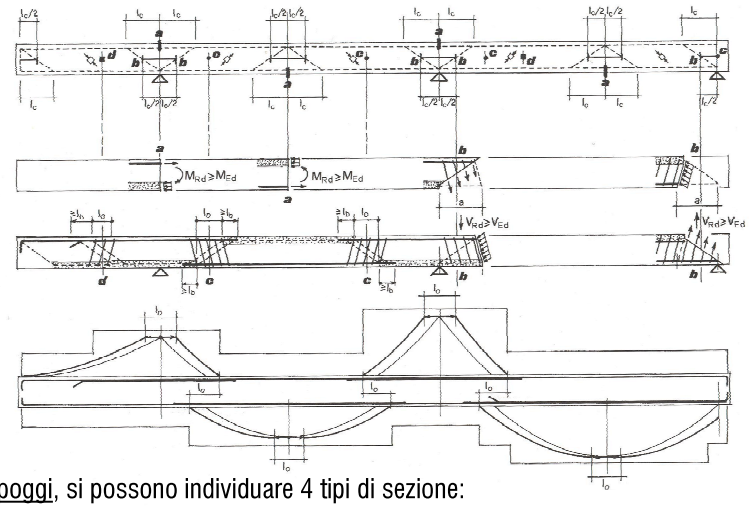


R è equilibrata da S$_s$ (armatura piegata) e da C (corrente cls).

ATTENZIONE SLE!

MODELLO DI CALCOLO per le TRAVI INFLESSE CON ARMATURA D'ANIMA

Nelle travi con armature d'anima si è visto che il modello fondamentale per il calcolo della resistenza a taglio è il MODELLO A TRALICCIO.



Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo $M_{Ed} < M_{Rd}$
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo $V_{Ed} < V_{Rd}$
- Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento
- Tipo d: sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero

Le verifiche **a** e **b** sistemano la sovrappos. delle armature per **c**

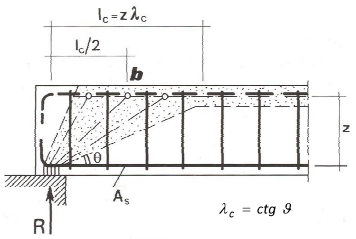
Verifiche M e V in **d**, se variano armatura o sezione

Zone di diffusione (travi con armatura d'anima)

Le zone di diffusione (in prossimità degli appoggi) devono essere verificate con equilibri locali che si basano su **schemi a tirante-puntone.**

Rispetto al caso senza armatura d'anima, le armature longitudinali confinano il calcestruzzo conferendo maggiore resistenza a taglio e **diffondendo più rapidamente** gli sforzi.

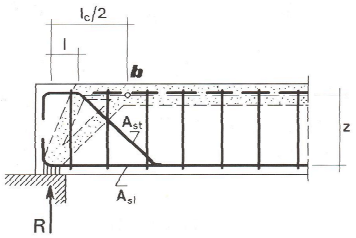
Caso (a):
Staffe



Distribuzione «a ventaglio» entro la zona di diffusione.

Man mano che ci si allontana dall'appoggio l'inclinazione dei puntoni compressi di cls aumenta e tende a stabilizzarsi secondo l'angolo di inclinazione del puntone nelle zone indisturbate (v. lezione sul Taglio)
Analogamente anche negli appoggi di continuità.

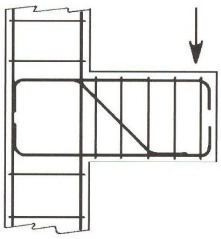
Caso (b):
Staffe+armatura piegata



Sovrapposizione del contributo staffe (sopra) e armatura piegata (visto prima)

Analogamente anche negli appoggi di continuità.

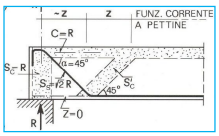
Mensole tozze



Appoggi indiretti

Consideriamo l'appoggio d'estremità della trave portata **TS1** sulla trave portante **TP**

Analogia con

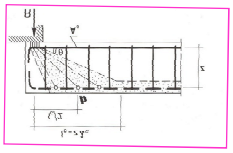


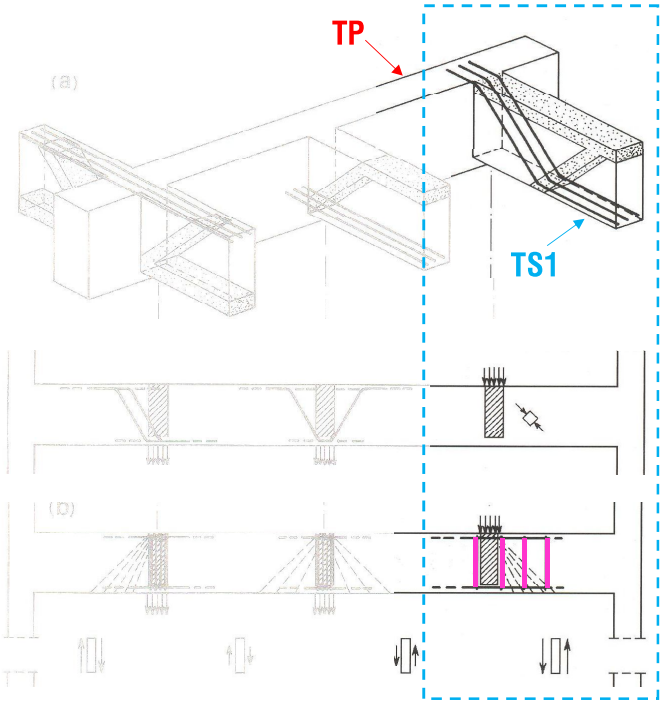
La presenza di **ferri piegati** nella trave **TS1** fa sì che la **TS1** sia «appesa» alla **TP**, permettendo l'efficace trasferimento della reazione d'appoggio di **TS1** su **TP**.

La presenza di staffe nella **TP** favorisce la diffusione delle tensioni nella **TP** indotte dalla reazione concentrata di **TS1**

(cfr. con modello «a ventaglio» visto prima)

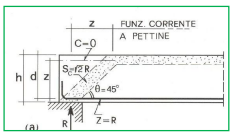
Analogia con





Consideriamo l'appoggio d'estremità della trave portata **TS2** sulla trave portante **TP**

Analogia con

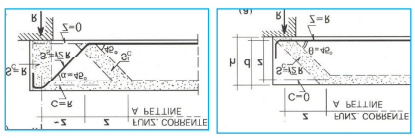


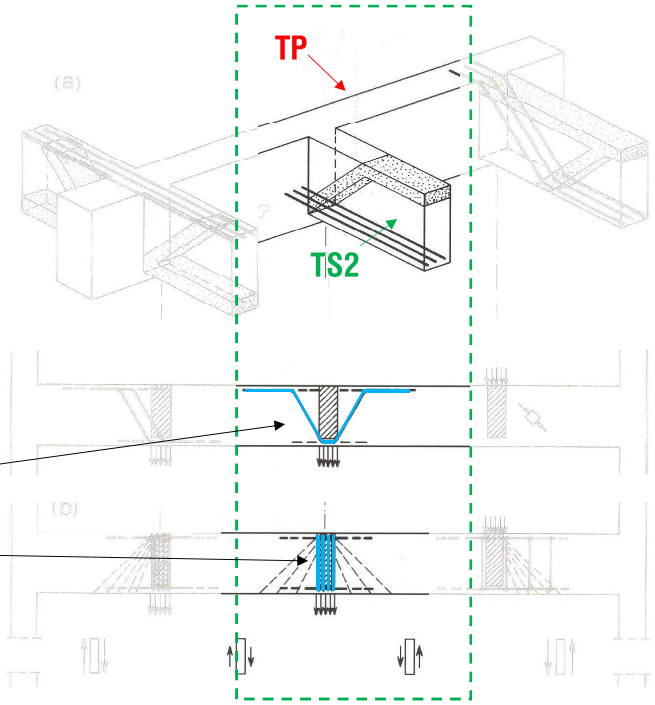
L'**assenza di ferri piegati** nella trave **TS2** NON consente in trasferimento efficace della reazione in al lembo superiore della trave **TP**

È pertanto necessario introdurre nella trave **TP** idonee armature, in modo da «appendere» la **TS2**

Queste armature possono essere costituite da:
ferri piegati o
staffe ravvicinate

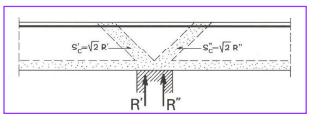
Analogia con

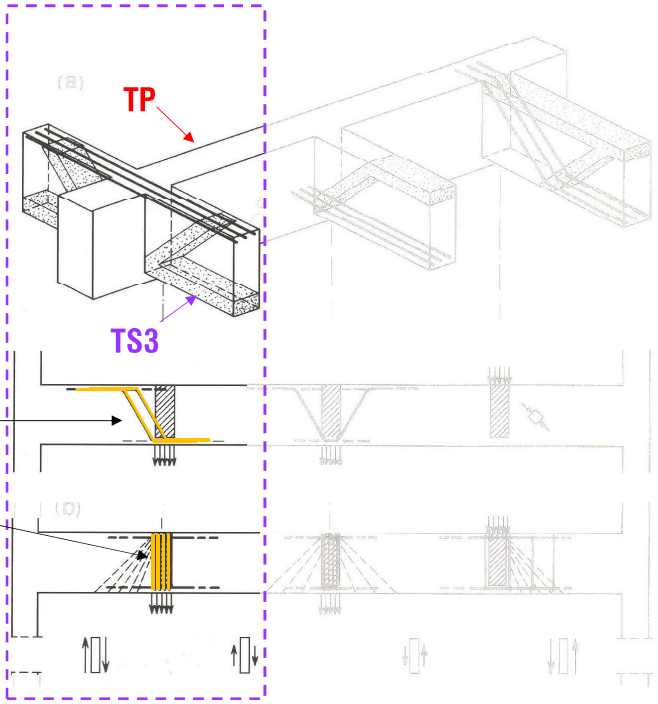




Analogo ragionamento vale per l'appoggio di continuità della trave portata **TS3** (priva di ferri piegati) sulla trave portante **TP**

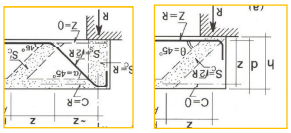
Analogia con





Per «appendere» la **TS3** alla **TP** sono necessarie armature integrative nella **TP** costituite da:
ferri piegati o
staffe ravvicinate

Analogia con



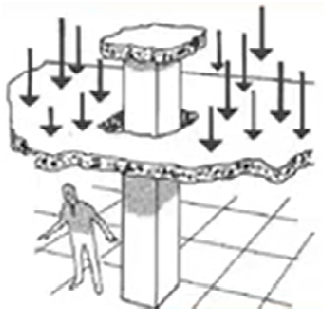
IL PUNZONAMENTO

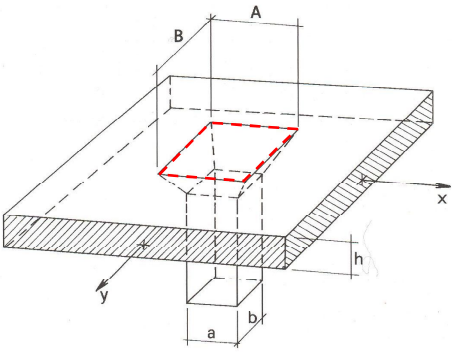
I particolari di appoggio di elementi a piastra su pilastri costituiscono un problema di flessione bidirezionale. Si hanno dei flussi di tensioni che si convogliano entro le dimensioni ridotte del pilastro.

La ridotta dimensione del pilastro può portare alla rottura della piastra in prossimità dell'appoggio con perforazione. Questo fenomeno è chiamato **punzonamento**.

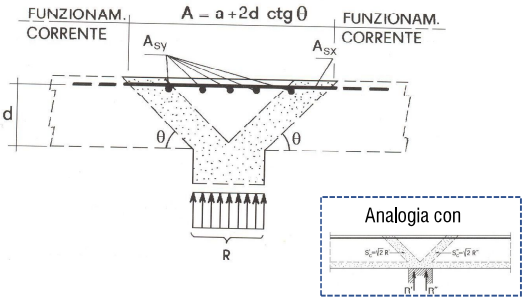
Per la verifica a punzonamento, le norme propongono un calcolo convenzionale basato sulle **formule di resistenza a taglio** dedotte per il caso monodimensionale delle travi, previa la definizione di un **perimetro critico** lungo il quale distribuire la resistenza.

Il perimetro critico è quello che **delimita superiormente la superficie di rottura**, così come evidenziata dalla sperimentazione (rottura di forma tronco-piramidale con base minore *axb* e base maggiore *AxB*).





Piastre prive di specifica armatura a taglio



L'angolo di inclinazione della fessura è tale che

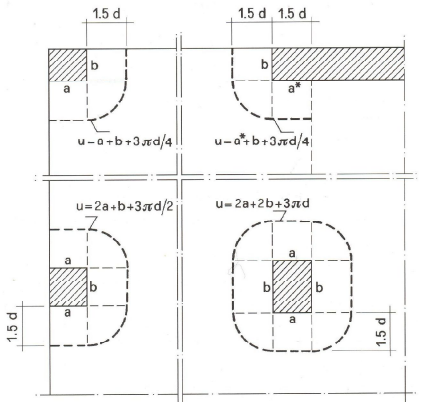
$$A = a + 2d\lambda \approx a + 3d$$

$$B = b + 2d\lambda \approx b + 3d$$

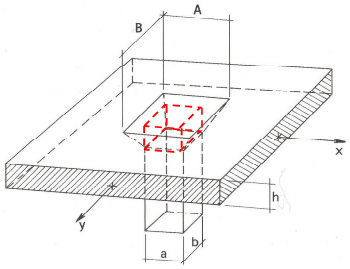
$$\lambda = ctg\,\vartheta \approx 1.5 \quad (cioè \quad \vartheta \approx 34°)$$

Nelle verifiche si fa riferimento ad una **distribuzione uniforme** delle sollecitazioni lungo il perimetro critico.

In realtà il perimetro critico viene definito come indicato nelle figure, dove si evidenzia che non ci sono spigoli vivi ma si hanno dei **raccordi circolari.**



La verifica a punzonamento si articola in 2 parti:

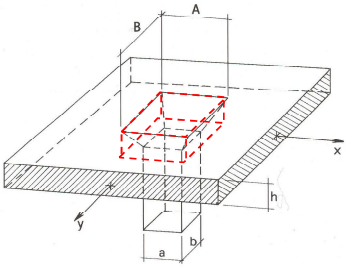


- Verifica lungo il **perimetro d'appoggio** $u_o = 2a + 2b$
  con resistenza basata sul **meccanismo ad arco** (cfr. slide 10)

$$R_{Rc} = 0.4\, du_o\, f_{cd} \frac{1}{1+\lambda^2} = 0.123\, du_o\, f_{cd}$$

$\sin^2\theta$

$\lambda = ctg\,\vartheta \approx 1.5$



- Verifica lungo il **perimetro critico** $u = 2a + 2b + 3\pi d$
  con resistenza basata sul **meccanismo a pettine** (cfr. lezione sul Taglio)

$$V_{ctd} = R_{Rd} = 0.25\, d\, u\, f_{ctd}\, \kappa\,(1 + 50\,\rho_s)$$

$$\kappa = 1.6 - d \geq 1.0$$

$$\rho_s = \sqrt{\rho_{sx}\,\rho_{sy}} \leq 0.02 \qquad \rho_{sx} = A_{sx}/Bd \qquad \rho_{sy} = A_{sy}/Ad$$

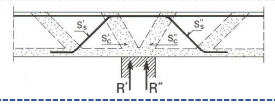
Le più recenti normative forniscono la relazione empirica:

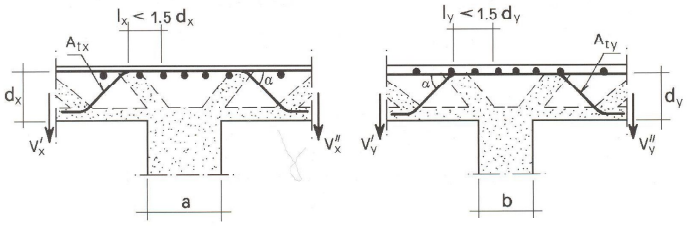
$$V_{ctd} = 0.18\, d\, u\, \kappa\,(100\,\rho_s\, f_{ck})^{1/3}/\gamma_c \geq u\, d\, v_{\min}$$

Piastre con specifica armatura a taglio

Ci si comporta analogamente alle travi, ma nelle due direzioni

Analogia con





La presenza dei ferri piegati aumenta sensibilmente il nuovo perimetro critico, dove in genere **non risulta più dominante la verifica basata sul meccanismo a pettine.**

Le verifiche sono ora concentrate sull'acciaio dei ferri piegati e sui puntoni compressi di calcestruzzo (su ognuno dei 4 lati) – (cfr. slide 15, caso b)

Cedimento a trazione barre piegate

$$R'_{xd} = A_{tx} f_{yd} \sin\alpha > \alpha'_x R_{Ed}$$

Cedimento a compressione puntone di calcestruzzo

$$R'_{xc} = 0.4\,b d_x f_{cd} \frac{1}{1+\lambda_x^2} > \alpha'_x R_{Ed}$$

$$\lambda_x = l_x / 0.9 d_x$$

α'_x = quota di reazione che compete al lato interessato del sostegno.

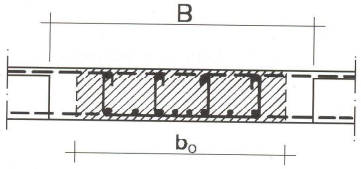
Il problema del punzonamento nelle travi in spessore di solaio

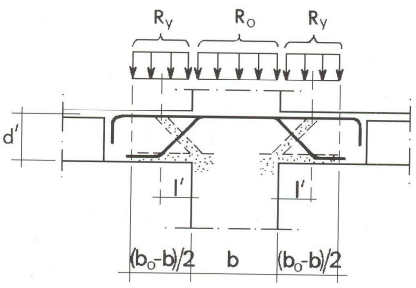
Un caso frequente di problema a punzonamento è quello relativo alle travi realizzate in spessore di solaio.
Si tratta di una flessione sostanzialmente monodirezionale in un elemento piano di notevole larghezza, che trova sostegno su pilastri di dimensioni molto più ridotte.

In questo caso, in realtà, il problema si affronta diversamente:
- si eseguono le **verifiche a taglio nella direzione della trave** (come già visto per le travi armate a taglio);
- si esegue poi una verifica trasversale considerando le **sporgenze della trave come** fossero delle **mensole tozze.**

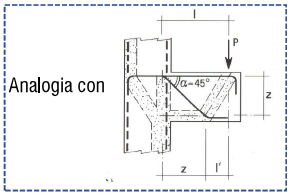
La quota parte di forza R_y da considerare agente sulla mensola è proporzionale alla dimensione della mensola:

$$R_y = \frac{b_o - b}{2\,b_o} R$$





Analogia con



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.