Soluzioni foglio 6

martedì 15 aprile 2025 17:15

① Sia $F : S_1 \longrightarrow S_2$

e siano $\varphi_1 : U_1 \to S_1 \qquad \varphi_2 : U_2 \to S_2$

$\psi_1 : V_1 \to S_1 \qquad \psi_2 : V_2 \to S_2$

parametrizzazioni locali.

Per definizione, F è differenziabile in

$p \in \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \Leftrightarrow \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ è differenziabile

supp. che si abbia anche $p \in \psi_1(V_1) \cap \psi_2(V_2)$

e cons. $\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1 : V_1 \longrightarrow V_2$

Si ha $\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1 = \psi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \psi_1$

$$= \underbrace{(\psi_2^{-1} \circ \varphi_2)}_{\substack{\text{MAPPA DI TRANSIZIONE} \\ \mathcal{C}^\infty \text{ per Prop. vista}}} \circ \underbrace{(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)}_{\mathcal{C}^\infty \text{ per ipotesi}} \circ \overbrace{(\varphi_1^{-1} \circ \psi_1)}^{\text{mappa di transizione}}$$

$\Rightarrow$ anche $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ è $\mathcal{C}^\infty$.

② $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^*$

$\Phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$

vogliamo dimostrare che $\Phi(S^2) = E$

$E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$

sia $Q \in E$; se $Q = (q_1, q_2, q_3)$,

verifica $\frac{q_1^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{b^2} + \frac{q_3^2}{c^2} = 1$

cons. il punto $P = \left(\frac{q_1}{a}, \frac{q_2}{b}, \frac{q_3}{c}\right)$

Osservo che $\Phi(P) = \left(a \cdot \frac{q_1}{a}, b \cdot \frac{q_2}{b}, c \cdot \frac{q_3}{c}\right)$

$= (q_1, q_2, q_3) = Q$

e che $P \in S^2$ in quanto

$\left(\frac{q_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{q_3}{c}\right)^2 = 1$.

③ $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata regolare

con $k(t) > 0 \quad \forall t \in I$

Cons. $\varphi : I \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\varphi(t, s) = \alpha(t) + s\,\alpha'(t)$

è regolare:

① φ è differenziabile : ok

③ $\partial_t \varphi = \alpha'(t) + s\,\alpha''(t)$

$\partial_s \varphi = \alpha'(t)$

$\partial_t \varphi \wedge \partial_s \varphi = s\,\alpha''(t) \wedge \alpha'(t)$

Ricordo ora che

$$k(t) = \frac{\| \alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \|}{\| \alpha'(t) \|^3}$$

Siccome $k(t) \neq 0 \ \forall t$,
si ha che

$$\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ i vettori $\partial_t \varphi$ e $\partial_s \varphi$ sono linearmente indipendenti $\forall (t, s)$.

Inoltre: in un punto generico P,

si ha $T_pS = \mathrm{Span}(\partial_t \varphi, \partial_s \varphi)$

$= \mathrm{Span}(\alpha'(t) + s\,\alpha''(t), \alpha'(t)) \quad , s \neq 0$

$= \mathrm{Span}(\alpha''(t), \alpha'(t))$

$\Rightarrow$ lungo le curve $\varphi(t_0, s)$, T_pS è costante.

④ ⓐ $\alpha : I \to S \quad , \quad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$F(\alpha(t))' = \partial_x F \cdot x'(t) + \partial_y F \cdot y'(t) + \partial_z F \cdot z'(t)$

$= \nabla F \cdot \alpha'(t) \qquad (*)$

Dalla definizione di $\nabla_S F$ abbiamo che

il vettore $\nabla_S F(p) - \nabla F(p)$ è ortogonale

a T_pS, quindi è ortogonale a $\alpha'(t_0) \in T_pS$

$\Rightarrow (\nabla_S F(p) - \nabla F(p)) \cdot \alpha'(t_0) = 0$

$\Rightarrow \nabla_S F(p) \cdot \alpha'(t_0) = \nabla F(p) \cdot \alpha'(t_0)$, e da

$(*)$ troviamo

$$\nabla_S F(p) \cdot \alpha'(t_0) = (F(\alpha(t)))'\big|_{t = t_0} \qquad (★)$$

Se ora $F|_S : S \to \mathbb{R}$ ha un minimo locale

o un massimo locale in $p \in S$, esso è

estremo locale anche per la funzione

$F(\alpha(t)) \qquad \forall \alpha$ curva passante per P

$\Rightarrow (F(\alpha(t)))'\big|_{t = t_0} = 0$

$\overset{(★)}{\Rightarrow} \nabla_S F(p) \cdot \underbrace{\alpha'(t_0)}_{\neq 0} = 0 \qquad \forall \alpha'(t_0) \in T_pS$

Questo vale $\forall \alpha : \alpha(t_0) = p$; troviamo che $\nabla_S F(p) \perp T_pS$

$\Rightarrow \nabla_S F(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla F(p) \perp T_pS$.

ⓑ Se $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$

sappiamo che $\nabla g(p) \perp T_pS \quad \forall p \in S$

Se $\nabla F(p) \perp T_pS \Rightarrow \nabla F(p)$ e $\nabla g(p)$

sono proporzionali

(perché $\dim (T_pS)^\perp = 1$).