

MOTO CENTRALE

Consideriamo DUE CORPI con interazione che dipende solo dalla posizione relativa:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

6 gradi di libertà
↓
coord. libere
($x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$)

Possiamo passare

a nuove coord.:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

← posizione relativa

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

← coord. del centro di massa

Definiamo $M \equiv m_1 + m_2$ e inventiamo le trasf. di coord.:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

← sostituiamo nella Lagrangiana

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{2m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{2m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}} \dot{\vec{r}}^2$$

$$\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2}{M} \equiv m \leftarrow \text{"MASSA RIDOTTA"}$$

$$\frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \equiv m \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}$$

Particella libera con massa M e posizione del centro di massa.

Lagrangiana di un corpo di massa m e soggetto a un potenziale $V(\vec{r})$



- Le equazioni di Lagrange di $\bar{R}(t)$ sono trivoli.
- Le equazioni di Lagrange di $\bar{r}(t)$ non dipendono dal pezzo $\frac{M\dot{\bar{R}}^2}{2}$.

$\Rightarrow$ posso concentrarmi a descrivere il moto $\bar{r}(t)$ determinato dalle Lagrangiane

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})$$

Ci restringiamo al caso in cui il potenziale dipende solo dal modulo del vettore $\bar{r}$, cioè $V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|)$:

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|) = \frac{1}{2} m \|\dot{\bar{r}}\|^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

$\hookrightarrow L$ dipende solo dalle norme dei vettori $\bar{r}$ e $\dot{\bar{r}}$

$\Rightarrow L$ è INVARIANTE IN ROTAZIONI $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Momento angolare $\bar{M}$ è cost. del moto

$\leadsto$ 3 cost. del moto scalari (le tre componenti del momento angolare)

Se $\bar{M}$ è cost. del moto, i moti $\bar{r}(t)$ che soddisfanno le eq. di Lagr. sono t.c.

$$\bar{r}(t) \times m \dot{\bar{r}}(t) = \bar{M}_{\text{cost.}} \quad (*)$$

$\hookrightarrow \Rightarrow \bar{r}(t) \text{ e } \dot{\bar{r}}(t) \perp \bar{M}$

Se $\bar{M} \neq 0$ è fisso durante il moto, vuol dire che

$\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(t)$ stanno sempre nel piano $\perp$ al man.

ang. $\vec{M}$

$\Rightarrow$ il moto avviene su un PIANO

(Se $\vec{M}=0$, $\vec{F} \parallel \dot{\vec{r}} \rightarrow$ il moto è rettilineo.)

$\leadsto$ possiamo prendere l'asse $z \parallel \vec{M}$ cost.

$$\Rightarrow \vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_1 + \dot{y} \vec{e}_2$$

$\rightarrow$ ridotto il problema a 2 GRADI DI LIBERTA'

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \swarrow \vec{M} \parallel \text{asse } z$$

- per scrivere L a 2 gradi di libertà, abbiamo usato la DIREZIONE di $\vec{M}$, cioè 2 cost. del moto. Rimane il modulo (ovvero M_z , se $\vec{M} = M_z \vec{e}_z$)
 $\rightarrow$ ci aspettiamo di ritrovare qta cost. del moto nel problema a $n=2$.
 $\begin{matrix} \nearrow \\ M_x = 0 \\ M_z = 0 \end{matrix}$

Passiamo a COORD. POLARI

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$$

→ θ è una COORDINATA CICLICA

$$\leadsto p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \text{è cost. DEL MOTO}$$

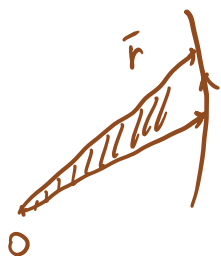
$\nwarrow M_z = m(\dot{x}y - x\dot{y})$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}}_{\text{VELOCITÀ AREOLARE}} \right) = 0 \quad \text{lungo un moto che risolve eq. Lagr.}$$

VELOCITÀ
AREOLARE

Velocità
angolare è
cost. del moto

↔ 2^a legge di
Keplero



$$A(t) = \int \underbrace{r' dr' d\theta'}_{\substack{\text{AREA} \\ \text{tra } \theta_0 \text{ e } \theta(t)}} = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' \int_0^{r(\theta')} r' dr' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r(\theta')^2 d\theta'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r(t)^2}{2} \cdot \dot{\theta}(t)$$

$$m r^2 \dot{\theta} = l \quad \text{costante}$$

⇓

$$\dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} > 0 \quad (\text{se } l > 0)$$

⇒ $\theta(t)$ è una funzione
MONOTONA (crescente)

↓
 $\theta(t)$ è una funz. invertibile (con inversa $t(\theta)$)

⇒ $\theta(t)$ fornisce una buona trasformazione
di coordinate

→ θ può essere usata in luogo di t come parametro per descrivere le curve tracciate nel piano, cioè le **TRAJETTORIE** del moto (dette anche **ORBITE**) : nel piano r, θ le curve sono date dal grafico della funzione $r(\theta) \equiv r(t(\theta))$

Usiamo ora la **COORDINATA CICLICA** θ per ridurre il probl. a 1 grado di lib.

Ricordiamo: $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ e $L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$

→
$$L_{eff} = \left(L - \dot{\theta} p_{\theta} \right) \Big|_{\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 - V(r) - \left(\frac{L}{mr^2} \right) L$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U_{eff}(r) \quad \text{con } U_{eff} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

→ Risolvendo le eq. di Lagrange per L_{eff} , otteniamo la funz. $r(t)$; mettiamo tale funz. nell'eq. $\dot{\theta} = \frac{L}{m r(t)^2}$ che permette di ricavare $\theta(t)$ per semplice integrazione.

→ Risolvendo il problema ridotto a 1 grado di libertà con l'eq. L_{eff} , siamo poi in grado di determinare il moto $(r(t), \theta(t))$ sul piano dell'orbita.

Diagramma di fase per $V(r) = -\frac{K}{r}$ (potenziale Keplero)

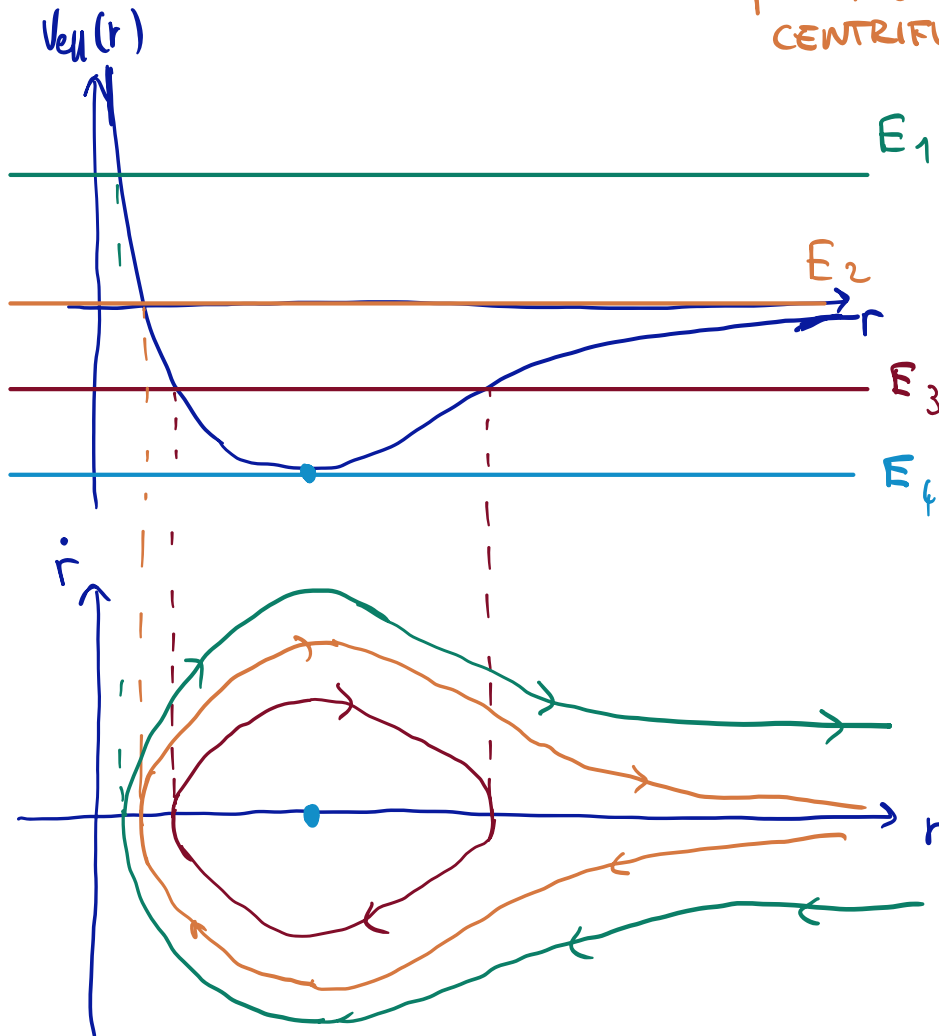
$$\rightarrow V_{eff} = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$V'_{eff}(r) = \frac{K}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = \frac{K}{r^3} \left(r - \frac{l^2}{K m} \right)$$

potential
CENTRIFUGO

$$E = T + V_{eff}$$

$$T \geq 0 \Rightarrow V(r) \leq E$$



E_1) - pto materiale non arriva mai all'origine ($r \geq r_0$)
 - $r(t) \rightarrow \pm \infty$
 $t \rightarrow \pm \infty$

- tipico PROCESSO DIURTO (con una barriera di potenziale centrifuga)

E_2) - simile a E_1 , ma ora $\dot{r} \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \pm \infty$

E_3) - moto è confinato tra r_{min} e r_{max}
 PERICENTRO (distanza APSIDALI) APOCENTRO

→ nel piano (x, y) le orbite sono LIMITATE
(ma non necessariamente CHIUSE)

E_4 - min. del pot. eff. $\dot{r}(t)=0 \rightarrow r(t) = \text{cost.}$

→ ORBITA è CIRCOLARE ($\dot{\theta} \neq 0$)

Caso Kepleriano $V(r) = -\frac{K}{r}$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{K}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}$$

↳ Ep. di Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{K}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2 r^3} \quad (*)$$

Invece di trovare la funzione $r(t)$ che risolve (*),
possiamo cambiare parametro della curva (ORBITA) da t a θ e cercare
la funzione $r(\theta)$ t.c. $r(t) \equiv r(\theta(t))$ risolve (*)

↘ data da
relazione

$$\dot{r}(t) = \frac{dr}{d\theta}(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta(t)} = -\frac{l}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\theta=\theta(t)} \Leftarrow \dot{r}(\theta(t)) \quad \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\ddot{r}(t) = \frac{d\dot{r}(t)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = \frac{l}{mr^2} \left(-\frac{l}{m} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\theta=\theta(t)}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(t) = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\theta(t)}$$

$$\leadsto \ddot{r}(t(\theta)) = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right)$$

FUNZ. in t $\theta = \theta(t)$ FUNZ. in θ

$$\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2 r^3} \quad \xLeftrightarrow[t=t(\theta)] \quad -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2 r^3}$$

$$\rightarrow -\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{km}{l^2} + \frac{1}{r}$$

$\left(\begin{array}{l} u(\theta) \equiv \frac{1}{r(\theta)} \end{array} \right. \quad \uparrow \quad \frac{1}{r} \equiv \frac{km}{l^2}$

$$u'' + u = \frac{1}{\eta}$$

Eq. l'n. 2° ordine non-omogenea :

Solut. partic. : $u(\theta) = 1/\eta$

Solut. gen. omog. ass. ($u'' = -u$) : $u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0)$

$$\downarrow$$

$$u(\theta) = \frac{1}{\eta} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

$\Downarrow$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

(*) } Equazione di una CONICA nel piano

(in coord. polari)

L'eccentricità e è legata all'Energia E :

consideriamo il problema unidim. con

$$L_{eff} = T_{eff} - V_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \left(-\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \right)$$

L'en. totale $E = T_{eff} + V_{eff}$ è una COSTANTE DEL MOTO.

Ricordiamo che il moto ha sempre un valore $r_{\min}$ minimo che $r(t)$ assume. Esso può essere determinato sia in funzione dell'energia E che dell'eccentricità e e di (x) :

— $r_{\min}$ è t.c. $V(r_{\min}) = E$ (punto di inversione del probl. ridotto)

Risolviamo eq. $V_{\text{eff}}(\xi) = E$, cioè $-\frac{k}{\xi} + \frac{l^2}{2m\xi^2} = E \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{l^2}{2m} \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 - k \left(\frac{1}{\xi}\right) - E = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{k(1+e)}{\eta} + \frac{l^2(1+e)^2}{2m\eta^2} = E$$

$$-\frac{k^2 m(1+e)}{l^2} + \frac{k(1+e)^2}{2} = E$$

$$\rightarrow \frac{1}{\xi_{1,2}} = \frac{km}{l^2} \pm \frac{km}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

$$\eta = l^2/km$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_{\min} = \frac{\eta}{1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \\ r_{\max} = \frac{\eta}{1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \end{cases}$$

← qta sol. è accettabile solo quando $\frac{2El^2}{mk^2} < 0$.

— $r_{\min}$ è il valore di $r(\theta)$ minimo al variare di θ :

$$r_{\min} = \min_{\theta} \left(\frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \right) = \frac{\eta}{1 + e}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

← e è l'eccentricità della conica:

$$0 \leq e < 1 \rightarrow \text{ELLISSE}$$

$$\leftarrow E < 0$$

$$e = 1 \rightarrow \text{PARABOLA}$$

$$\leftarrow E = 0$$

$$e > 1 \rightarrow \text{IPERBOLE}$$

$$\leftarrow E > 0$$