

Rumore e vibrazioni a bordo delle navi

Ing. Andrea Iuliano

A.A. 2024-2025

Vibrazioni

VIBRAZIONI

Vibrazioni

Vibrazione

Oscillazione meccanica di un corpo intorno alla sua posizione di equilibrio

Per quanto riguarda i macchinari:

- risultato delle forze dinamiche generate internamente dalle parti in movimento
- trasmesse alle strutture collegate
- caratteristiche degli stessi macchinari

Vibrazioni

La natura della vibrazione dipenderà da:

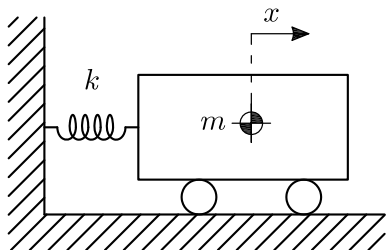
- caratteristiche dello stimolo esterno
- proprietà fisiche
 - massa
 - smorzamento
 - rigidità

Gradi di libertà

Il moto di un sistema può essere rappresentato da un numero selezionato di coordinate indipendenti, dette “gradi di libertà di un sistema”.

Il numero di gradi di libertà di un sistema è dato dal numero di parametri indipendenti che sono necessari per descrivere il moto. Più elevata è la frequenza, più complicato è il modo di vibrare e quindi più gradi di libertà saranno necessari per riprodurre il moto.

Sistema massa molla



Equazione dell'equilibrio
dinamico della massa:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Risolviendo:

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos t$$

Frequenza

- Frequenza angolare naturale ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Periodo T

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

- Frequenza f_n

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Costanti A e B

Per determinare le costanti A e B :

- 1 Si fissa la posizione all'istante iniziale del moto

$$B = x(0)$$

- 2 Si fissa la velocità all'istante iniziale riportata alla frequenza angolare naturale del sistema

$$A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}$$

Freccia statica

Δ : freccia statica dovuta al peso W con $W = mg = k\Delta$

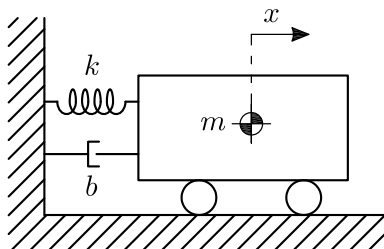
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$f_n = \frac{3.127}{\sqrt{\Delta}} \text{ Hz}$$

$$f_n = \frac{187.6}{\sqrt{\Delta}} \text{ cicli/min}$$

Sistema massa-molla-smorzamento



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

La forma dell'equazione dipende dalla condizione del valore del coefficiente di smorzamento b rispetto ad un valore limite detto "smorzamento critico" b_{cr}

Smorzamento ipocritico

Smorzamento critico

Condizione in cui la massa spostata dal suo equilibrio statico continua ad oscillare con frequenze costanti pari a quelle delle oscillazioni libere del sistema con smorzamento.

Fattore di smorzamento:

$$\xi = \frac{b}{b_{cr}} = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Smorzamento ipocritico

$$\xi < 1$$

Si ottengono oscillazioni smorzate, cioè ad ogni ciclo l'ampiezza diminuisce.

La soluzione dell'equazione $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ sarà

$$x(t) = Ce^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

in cui C e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali al tempo $t = 0$, e sono rispettivamente l'ampiezza e la fase delle oscillazioni.

La soluzione è il risultato del prodotto di due effetti:

- 1 smorzamento $Ce^{-\frac{b}{2m}t}$
- 2 oscillazioni $\sin(\omega_d t + \phi)$

Frequenza smorzata

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Smorzamento critico

$$\xi = 1$$

La soluzione dell'equazione del moto sarà

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

In questa equazione non compaiono i termini sinusoidali, infatti questo **non è un sistema fisicamente oscillante**.

Smorzamento ipercritico

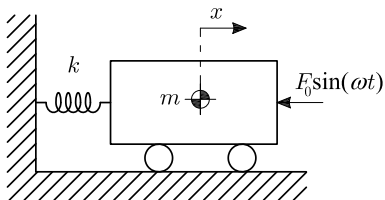
$$\xi > 1$$

La soluzione matematica è data da:

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(A e^{\omega_n t \sqrt{\xi^2 - 1}} + B e^{-\omega_n t \sqrt{\xi^2 - 1}} \right)$$

Non si tratta di un moto oscillatorio: se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, esso tende a ritornarvi gradualmente con un movimento di tipo esponenziale e non oscillante.

Sistema massa molla forzato



Equazione differenziale del moto:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

Soluzione matematica:

$$x(t) = C \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0/k}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \sin(\omega t)$$

con i termini C e φ determinati dalle condizioni iniziali.

La soluzione è costituita da due termini:

- 1 l'oscillazione naturale libera del sistema
- 2 la risposta vera e propria alla forzante.

Nelle condizioni iniziali tutti i sistemi hanno un certo smorzamento, per cui ci sarà un transitorio iniziale dopo il quale la risposta si riduce a termini trascurabili e, finché la forza esterna rimane applicata, rimane nel sistema solo la risposta alla forzante, la quale costituisce una oscillazione stazionaria alla frequenza della forzante:

$$x_f(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \sin(\omega t)$$

Forza trasmessa

La forza che viene trasmessa al supporto fisso tramite la molla è

$$F_t = kx$$

Coefficiente di trasmissione T :

$$F_t = TF$$
$$T = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

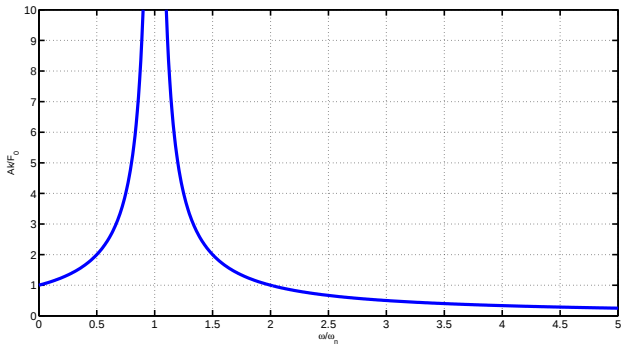
Vale per tutte le frequenze ω tranne per la frequenza naturale. La soluzione dell'equazione del moto diventa

$$x(t) = -\frac{F_0\omega}{2k} \cos(\omega t)$$

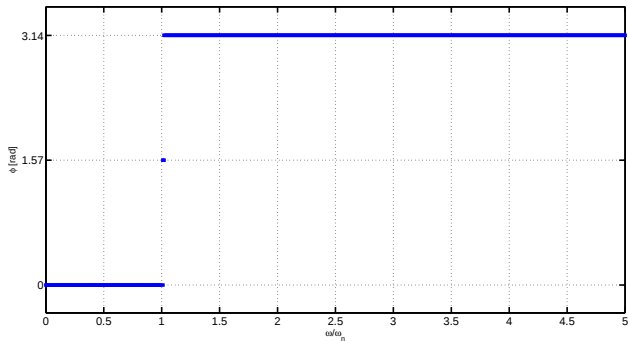
Per $\omega \neq \omega_n$ la risposta è un'oscillazione stazionaria con ampiezza A che risulta funzione della frequenza secondo la legge:

$$A = \frac{F_0}{k} \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right|$$

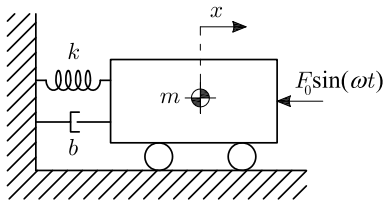
Risposta in frequenza



Sfasamento



Sistema forzato massa molla smorzamento



L'equazione del moto sarà

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

Soluzione data da due termini:

- ① fase transitoria
- ② fase stazionaria.

Vale la pena solo vedere il termine stazionario, che rappresenta una vibrazione con frequenza ω pari a quella della forzante e con uno sfasamento non nullo dipendente dal fattore di smorzamento.

La risposta nella fase stazionaria si può scrivere come:

$$x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

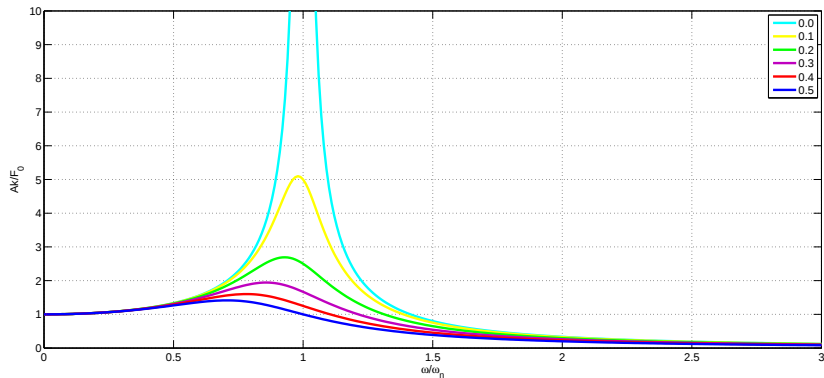
Dove

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r^2)^2}} \cdot \frac{F_0}{k}$$

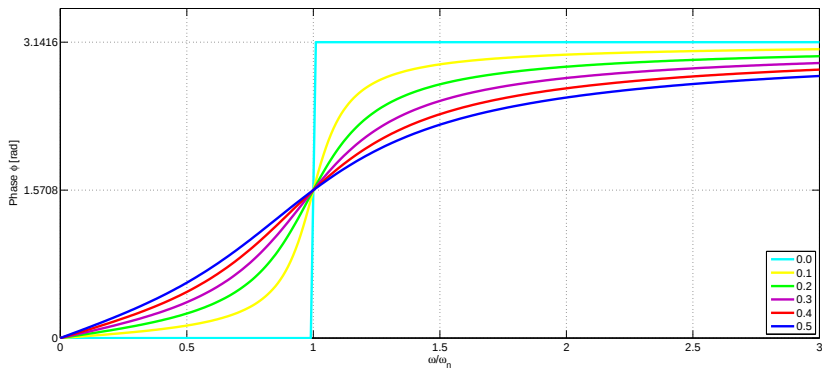
$$\tan(\varphi) = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

con $r = \omega/\omega_n$

Risposta in frequenza



Sfasamento



Trasmissibilità

La forza trasmessa al supporto risulta:

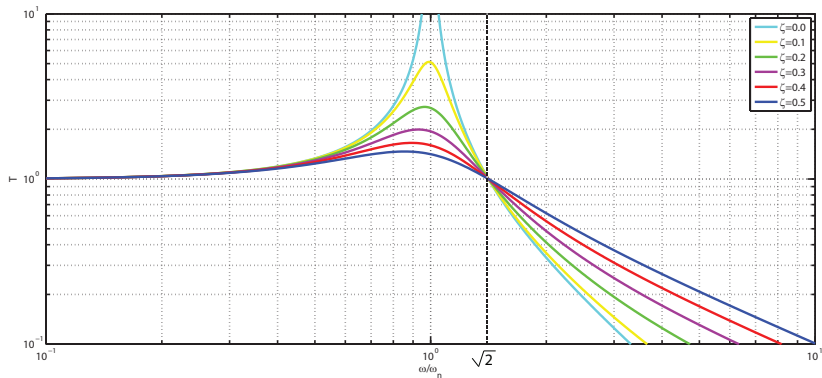
$$F_t + b\dot{x} + kx$$

$$\frac{F_t}{F_0} = T \sin(\omega t - \varphi)$$

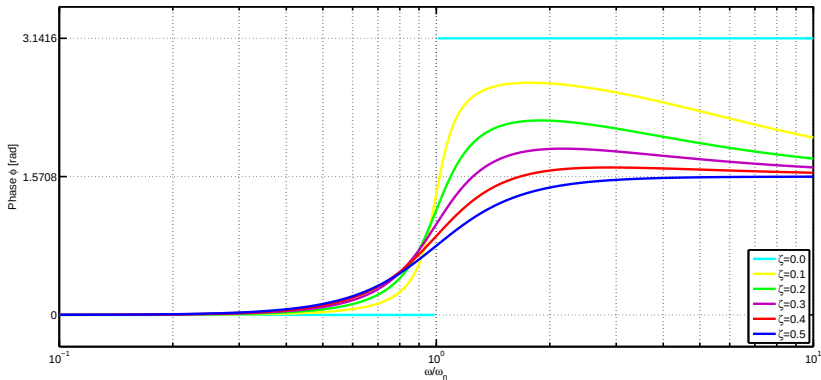
$$T = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\xi r^3}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}$$

Trasmissibilità



Sfasamento della forza trasmessa



Corpi elastici

- Molte volte non è possibile ricorrere ad una schematizzazione “rigida” del sistema: è necessario considerare come parametri distribuiti
- Numero infinito di gradi di libertà
- Metodi di studio:
 - equazione d'onda
 - elementi finiti
 - metodi sperimentali
 - funzione di trasferimento

Serie di Fourier

$$f(t) = f(t + KT) \quad \text{con} \quad K = 1, 2, 3, \dots$$

Serie di Fourier

Rappresentazione di una funzione periodica mediante una somma di funzioni periodiche

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n\omega t) dx \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\omega t) dx \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Molte volte la serie di Fourier di una funzione può essere scritta in modo diverso:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \vartheta_n)$$

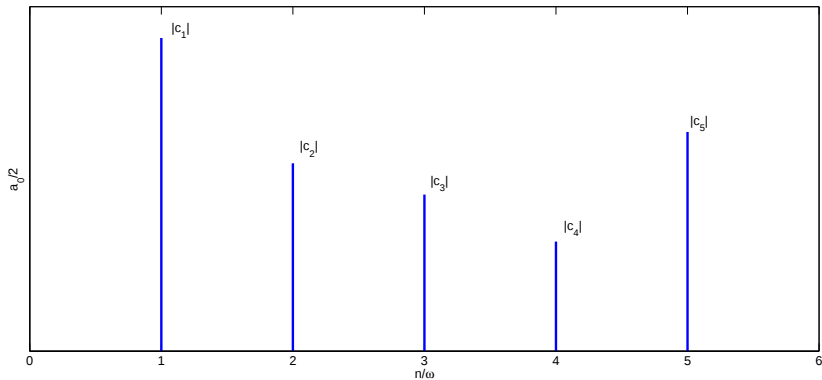
In questo caso si ha:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|$$

$$\vartheta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

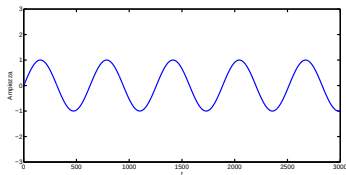
Spettro del segnale



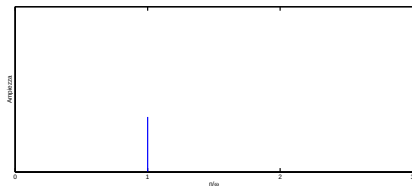
Principio di sovrapposizione degli effetti

Consideriamo un sistema meccanico lineare eccitato con una forzante $f_1(t)$. Esso risponderà alla forzante con una risposta $x_1(t)$. Se la forzante diventa $f_2(t)$, allora la risposta sarà $x_2(t)$. Se il sistema è eccitato con la forzante $af_1(t) + bf_2(t)$ (dove a e b sono 2 costanti), allora la risposta sarà $ax_1(t) + bx_2(t)$.

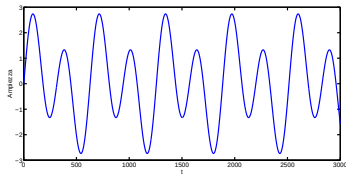
$$af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow ax_1(t) + bx_2(t)$$



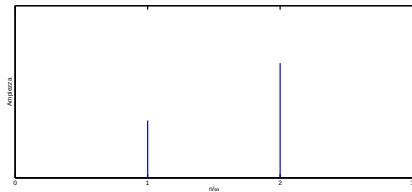
(a) Segnale nel tempo di $y = \sin(2\pi\omega t)$



(b) Spettro di $y = \sin(2\pi\omega t)$



(c) Segnale nel tempo di $y = \sin(2\pi \cdot 2\omega \cdot t)$



(d) Spettro di $y = \sin(2\pi \cdot 2\omega \cdot t)$

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t})$$

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})$$

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{jn\omega t} + \alpha_{-n} e^{-jn\omega t})$$

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-jn\omega t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

Forma esponenziale della Serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Anche se matematicamente n può prendere valori negativi, nella pratica questo ci porterebbe ad usare frequenze negative senza alcun significato fisico.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\Omega t}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jn\Omega t}}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jn\Omega \tau} d\tau$$

Se ω è una variabile reale che descrive tutta la retta

$$\omega_n = n\Omega = n\frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

si ottiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau$$

Se $T \rightarrow \infty$, allora $\Delta\omega_n \rightarrow r$ è infinitesima e si può considerare il limite della funzione:

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau\end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

Trasformata di Fourier

Se poniamo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

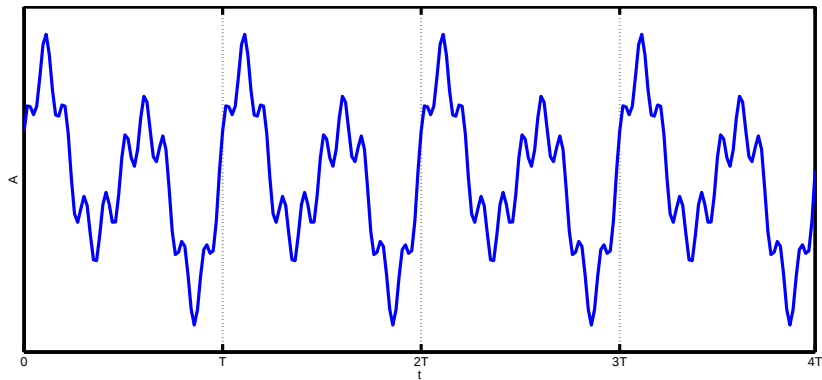
otteniamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

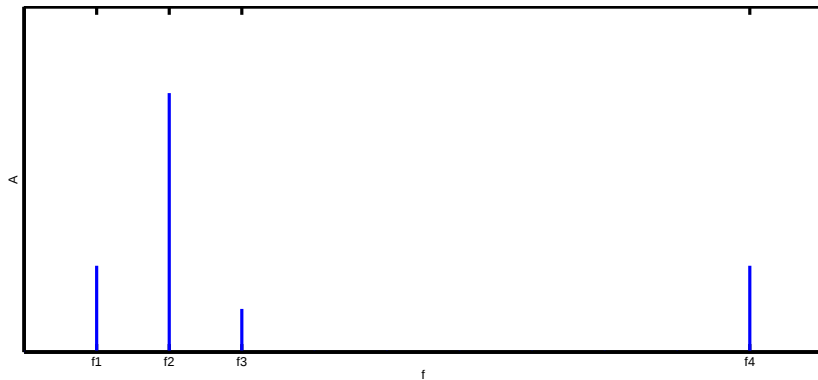
Purché

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Dominio del tempo



Dominio della frequenza



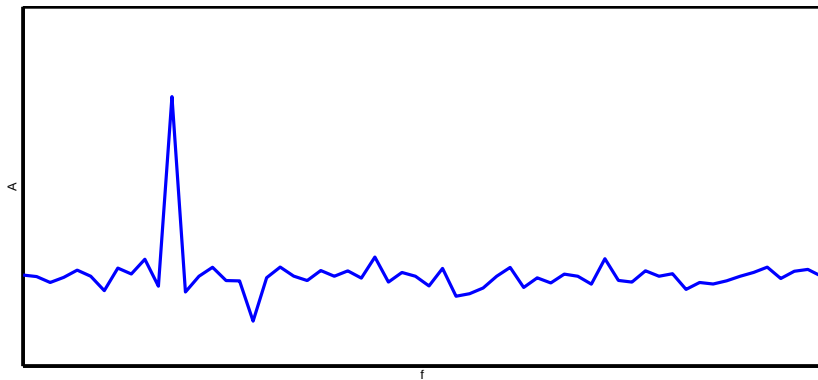
Vantaggi:

- Informazioni più facili da ottenere
- Informazioni più facili da comprendere
- Immediata visione delle frequenze
- Immediata visione delle ampiezze

Segnali non periodici

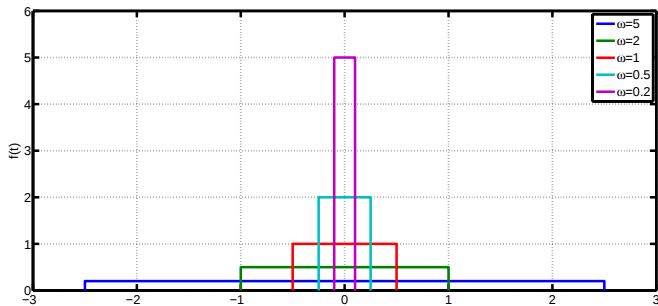
- Funzione periodica di periodo T
 - spettro discontinuo
 - frequenza fondamentale $f_1 = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ e componenti a frequenza $n\frac{1}{T} = nf_1$
- Segnale non periodico:
 - considerato di periodo infinito
 - se $T \rightarrow \infty$, allora $\omega_1 \rightarrow 0$, spettro continuo

Segnale non periodico



Funzione Delta

$$f(t) \begin{cases} \frac{1}{\omega} & -\frac{\omega}{2} \leq t \leq \frac{\omega}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\omega}{2} \end{cases}$$



Funzione Delta

L'area sottesa dalla funzione è data dall'integrale

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{dt}{\omega} = \frac{1}{\omega} \omega = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} f(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\omega} = 1$$

Funzione Delta

Si definisce quindi $\delta(t)$ come funzione delta. Essa può essere posizionata in qualunque punto t_0 e può avere qualsiasi area A . In questi casi si utilizza però la notazione $A\delta(t - t_0)$. Si ha che

$$A\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} A\delta(t - t_0) dt = A$$

Funzione Delta

Se una funzione analitica qualunque $x(t)$ viene moltiplicata per una funzione $\delta(t - t_0)$ e integrata, il risultato è il valore di $x(t)$ a $t = t_0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Trasformata di Fourier di $\delta(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1$$

Trasformata inversa di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} df = \delta(t)$$

Funzione di risposta impulsiva unitaria

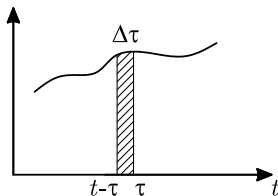
Dato un sistema fisico (fisicamente realizzabile, a parametri costanti, stabile e lineare) ad un ingresso e un'uscita (SISO - single input single output), se eccitiamo il medesimo con una funzione $\delta(t)$, la funzione di risposta impulsiva unitaria sarà data da $y(t) = h(t)$, dove t è il tempo misurato dall'istante in cui la funzione δ è applicata.

Funzione di risposta impulsiva unitaria

Per ciascun ingresso arbitrario $x(t)$, la risposta del sistema $y(t)$, è data dall'integrale di Convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

La risposta $y(t)$ è quindi data da una somma pesata, lineare su tutto il tempo considerato dell'ingresso $x(t)$



Funzione di risposta in frequenza

La funzione di risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della funzione di risposta impulsiva unitaria:

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Funzione complessa $H(f) = H_R(f) - jH_I(f)$ con $H_R(f)$ parte reale e $H_I(f)$ parte immaginaria, dove

$$H_R(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

$$H_I(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau$$

Funzione di risposta in frequenza

In forma polare

$$H(f) = |H(f)| e^{-j\Phi(f)}$$

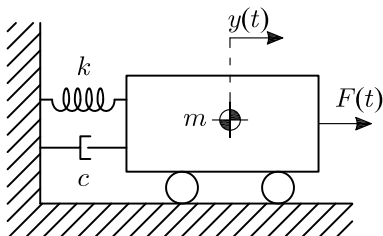
Fattore di guadagno:

$$|H(f)| = \sqrt{H_R^2(f) + H_I^2(f)}$$

Fattore di fase:

$$\Phi(f) = \arctan \frac{H_I(f)}{H_R(f)}$$

Sistema ad 1 GDL in frequenza



$$Y(f) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = H(f)$$

$$\dot{Y}(f) = j2\pi f H(f)$$

$$\ddot{Y}(f) = -(2\pi f)^2 H(f)$$

$$F(t) = \delta(t)$$

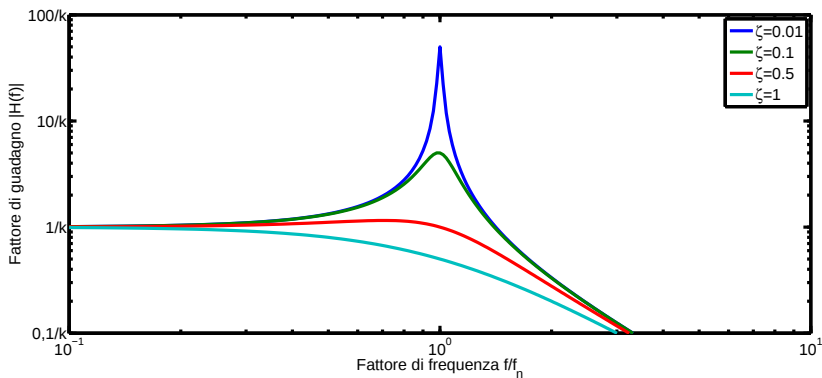
$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

$$\left[-(2\pi f)^2 m + j \cdot 2\pi f c + k \right] H(f) = 1$$

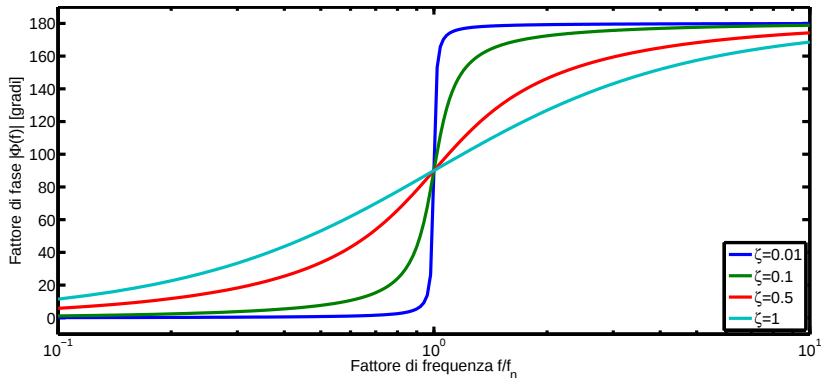
$$H(f) = \frac{1}{k - (2\pi f)^2 m + j \cdot 2\pi f c}$$

$$H(f) = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2 + j 2\varepsilon \left(\frac{f}{f_n}\right)}$$

$$|H(f)| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{f}{f_n}\right)\right]^2}}$$



$$\Phi(f) = \arctan \frac{2\varepsilon \left(\frac{f}{f_n} \right)}{1 - \left(\frac{f}{f_n} \right)^2}$$



$|H(f)|$ ha un picco alla frequenza di risonanza $f_r = f_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ per tutti i casi in cui $\xi \leq 1/\sqrt{2}$

$$|H(f_r)| = \frac{1/k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Phi(f_n) = 90^\circ$$

- Sistemi fisici: $\xi \leq 1$
- Strutture meccaniche: $\xi \leq 0.05$

Larghezza di banda a metà potenza B_r :

$$B_r = f_2 - f_1$$

$$|H(f_1)|^2 = |H(f_2)|^2 = \frac{1}{2} |H(f_r)|^2$$

Se i rapporti di smorzamento sono piccoli, allora $B_r \simeq 2\xi f_r$, da cui si ricava ξ .

Infatti

$$\begin{cases} B_r = f_2 - f_1 = \Delta\omega \\ \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{Q} \simeq 2\xi \end{cases}$$

con $Q = \max(v)$ fattore di qualità, che è il valore massimo della velocità di vibrazione alla risonanza.

Decremento logaritmico nel dominio del tempo

Lo smorzamento non può essere determinato mediante prove statiche, ma può essere ricavato sperimentalmente misurando l'ampiezza decrescente di oscillazioni successive.

Si consideri l'oscillazione libera di un sistema con $\xi \leq 1$:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \varphi_0)}{X_0 e^{-\xi \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \varphi_0)}$$

$$t_2 = t_1 + T$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\xi \omega_n t_1}}{e^{-\xi \omega_n t_2}} = e^{-\xi \omega_n T}$$

Decremento logaritmico:

$$\begin{aligned}\delta &= \ln \frac{x_1}{x_2} = \xi \omega_n T \\ &= \frac{2\pi\xi\omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}$$

Per, $\xi \leq 0.4$ si può porre con buona approssimazione

$$\delta \simeq 2\pi\xi$$

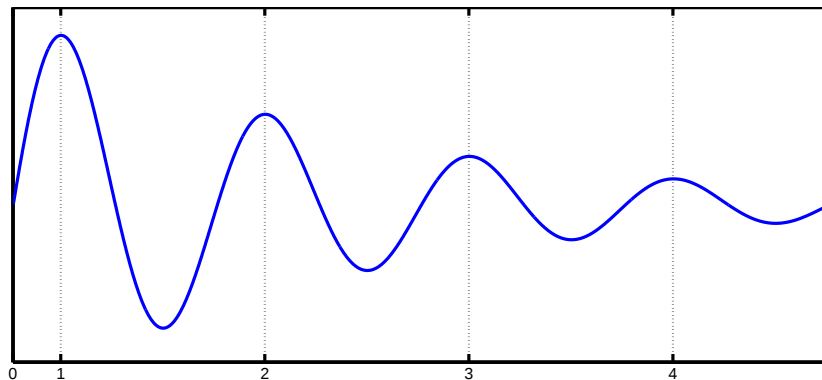
Se si considerano n oscillazioni successive:

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{n\xi\omega_n T}$$

$$\ln \frac{x_1}{x_{n+1}} = n\xi\omega_n T = n\delta$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_n}$$

Se si riesce a misurare in via sperimentale il rapporto x_1/x_n è poi possibile risalire al valore del fattore di smorzamento ξ .



Dominio del tempo

- Una sola frequenza in ingresso: $F = F_0 \sin(\omega t)$
- All'uscita si ha la stessa frequenza d'ingresso, ma sfasata:
 $y(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$
- Si studia quindi il parametro $\frac{Ak}{F_0}$

Dominio della frequenza

- Studiando la risposta all'impulso, che ha trasformata di Fourier unitaria, si studiano tutte le frequenze in ingresso: $F(t) = \delta(t)$
- In uscita si studia la trasformata dell'ampiezza del moto $|H(f)|$

Si ricordi che il sistema ad un grado di libertà ha una sola frequenza di risonanza.

Nei sistemi reali quindi o eccito il sistema con una vibrodina pilotata da una senoide a frequenza variabile o solo con una martellata (impulso).

Note sulle frequenze

Possiamo quindi affermare che ci sono 3 tipi di frequenze:

- ① frequenza naturale non smorzata (undamped)
- ② frequenza naturale smorzata (damped)
- ③ frequenza di risonanza del sistema

Frequenza naturale non smorzata

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frequenza naturale smorzata

$$f_d = f_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Frequenza di risonanza del sistema

- ① Per lo spostamento

$$f_r = f_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

- ② per la velocità

$$f_r = f_n$$

- ③ per l'accelerazione

$$f_r = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

Trasformata di Laplace

Operazione funzionale che fa corrispondere ad una funzione reale (o complessa) $f(t)$, definita sull'asse reale positivo, la funzione $F(s)$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di $f(t)$, $f(t)$ è a sua volta la trasformata inversa di $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Proprietà

Linearità	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Teor. della traslaz. nel tempo	$f(t-a) \mathbf{1}(t-a) \rightarrow F(s) e^{-as}$
Teor. della traslaz. nella frequenza	$e^{at} f(t) \rightarrow F(s-a)$
Teor. della derivata nel tempo	$\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow sF(s) - f(0^+)$
Teor. della derivata nella frequenza	$tf(t) \rightarrow -\frac{d}{ds} F(s)$
Teorema dell'integrale nel tempo	$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s}$
Teorema del valore finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Teorema del valore iniziale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

Teorema di convoluzione

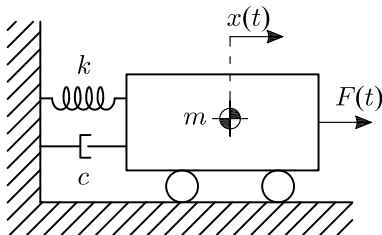
Si definisce convoluzione di due segnali $f(t)$ e $g(t)$ l'operazione

$$(f \cdot g)(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Il teorema di convoluzione afferma che

$$\mathcal{L}[(f \cdot g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] = F(s) G(s)$$

Sistema massa-molla-smorzamento



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Ponendo $F(t) = 0$ si ha
l'equazione omogenea:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Soluzione $x = e^{st}$, dove s è una
costante da determinare.

Sostituendo nell'equazione:

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0$$

Equazione caratteristica

Si giunge quindi all'equazione caratteristica:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Soluzione generale:

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

A e B sono costanti determinate dalle condizioni iniziali imposte dal sistema a $t = 0$.

Una equivalente equazione del moto può essere determinata nel dominio S o di Laplace. Vantaggio: convertire un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx] &= m[s^2X[s] - sX[0] - \dot{X}(0)] + \\ &+ c[sX(s) - X(0)] + kX(s) = \\ &= [ms^2 + cs + k]X(s) + \\ &- msX(0) - m\dot{X}(0) - cX(0)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Allora si ha

$$[ms^2 + cs + k]X(s) = F(s) + (ms + c)X(0) + m\dot{X}(0)$$

$X(0)$ e $\dot{X}(0)$: spostamenti e velocità iniziali

Se assumiamo che le condizioni iniziali siano pari a zero:

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$$

Posto

$$B(s) = ms^2 + cs + k$$

allora

$$B(s)X(s) = F(s)$$

- $F(s)$ rappresentazione nel dominio della frequenza di $f(t)$
- $X(s)$ rappresentazione nel dominio della frequenza della risposta del sistema $x(t)$

La risposta del sistema $X(s)$ è direttamente connessa alla funzione ingresso $F(s)$ attraverso la quantità $B(s)$: se conosciamo la funzione eccitante $F(s)$ e la sua risposta $X(s)$, possiamo ricavare $B(s)$

$$B(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$$

Più frequentemente si vuole conoscere la risposta del sistema:

$$X(s) = \frac{F(s)}{B(s)}$$

Ponendo $H(s) = \frac{1}{B(s)}$ si ha

$$X(s) = H(s) F(s)$$

$H(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema, che rapporta la trasformata di Laplace della funzione ingresso del sistema alla trasformata di Laplace della sua risposta.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{X(s)}{F(s)} = \\ &= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

assumendo che le condizioni iniziali siano nulle.

Il termine al denominatore è l'equazione caratteristica del sistema e le radici sono

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Smorzamento critico C_c : smorzamento che riduce il discriminante dell'equazione caratteristica a zero:

$$\sqrt{\left(\frac{C_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0$$

$$\frac{C_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

$$C_c = 2m\omega_n$$

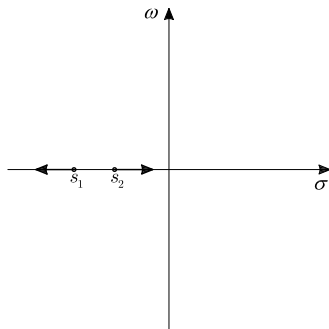
Rapporto di smorzamento ξ :

$$\xi = \frac{C}{C_c}$$

Le radici dell'equazione caratteristica possono essere così riscritte:

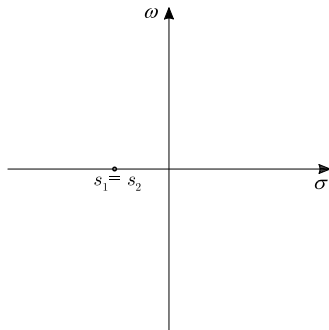
$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

Sistema sovrasmorzato



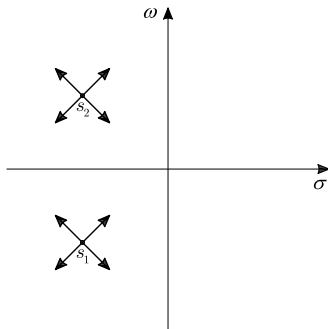
Due radici reali che giacciono sull'asse σ : se lo smorzamento varia le radici si muovono sull'asse.

Sistema smorzato criticamente



Solo una radice reale

Sistema sottosmorzato



Due radici complesse, una la complessa coniugata dell'altra. Se le radici sono a destra dell'asse reale, il sistema è instabile

Sistema sottosmorzato

Le radici dell'equazione caratteristica possono essere così scritte:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \omega_d j$$

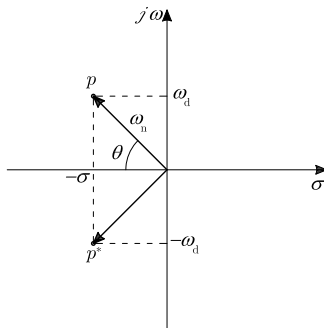
con σ fattore di smorzamento e ω frequenza naturale smorzata.

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2}}$$
$$\omega_n = \frac{\sigma}{\xi}$$

La funzione di trasferimento $H(s)$ può essere così riscritta:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{(s-p)(s-p^*)}$$

dove $p = -\sigma + \omega_d j$ è il polo della funzione di trasferimento e $p^* = -\sigma - \omega_d j$.



$H(s)$ può essere espressa in termini di frazioni parziali:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{c_1}{s-p} + \frac{c_2}{s-p^*}$$

c_1 e c_2 sono i residui della funzione di trasferimento, trovati moltiplicando entrambi i membri per $s-p$ e calcolando il risultato per $s=p$

$$\left. \frac{\frac{1}{m}}{s - p^*} \right|_{s=p} = \left[c_1 + \frac{c_2 (s - p)}{s - p^*} \right] \Big|_{s=p}$$

$$c_1 = \frac{\frac{1}{m}}{p - p^*} = \frac{\frac{1}{m}}{(-\sigma + \omega_{dj}) - (-\sigma - \omega_{dj})} = \frac{\frac{1}{m}}{2\omega_{dj}} = A$$

$$c_2 = -\frac{\frac{1}{m}}{2\omega_{dj}} = A^*$$

Forma standard :

$$H(s) = \frac{R}{2j(s-p)} - \frac{R^*}{2j(s-p^*)}$$

dove

$$R = 2jA = \frac{1/m}{\omega_d}$$

$$R^* = -2jA = \frac{1/m}{\omega_d}$$

In generale per un sistema ad n gradi di libertà il residuo R sarà una quantità complessa, ma come dimostrato per un sistema ad un grado di libertà, R è puramente reale. Allora

$$R = R^* = \frac{1/m}{\omega_d}$$

La funzione di risposta di frequenza è la funzione di trasferimento calcolata lungo l'asse delle frequenze $j\omega$:

$$\begin{aligned}
 H(s)|_{s=j\omega} &= H(j\omega) = \frac{R}{2j(j\omega - p)} - \frac{R^*}{2j(j\omega - p^*)} = \\
 &= \frac{R}{2j(j\omega + \sigma - \omega_d j)} - \frac{R^*}{2j(j\omega + \sigma + \omega_d j)} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{R}{(\omega_d - \omega) + \sigma j} - \frac{R^*}{(-\omega_d - \omega) + \sigma j} \right]
 \end{aligned}$$

Il valore della funzione di risposta in frequenza alla sua frequenza naturale smorzata è

$$H(\omega_d) = \left[\frac{R}{\sigma j} - \frac{R^*}{-2\omega_d + \sigma j} \right] \simeq \frac{R}{2\sigma j}$$

L'approssimazione finale dell'equazione può essere fatta perché il termine del residuo R^* tende a zero quando ω_d diventa grande: in altre parole il contributo della parte negativa della funzione di risposta in frequenza è trascurabile.

Pertanto molti sistemi ad un grado di libertà sono rappresentati da

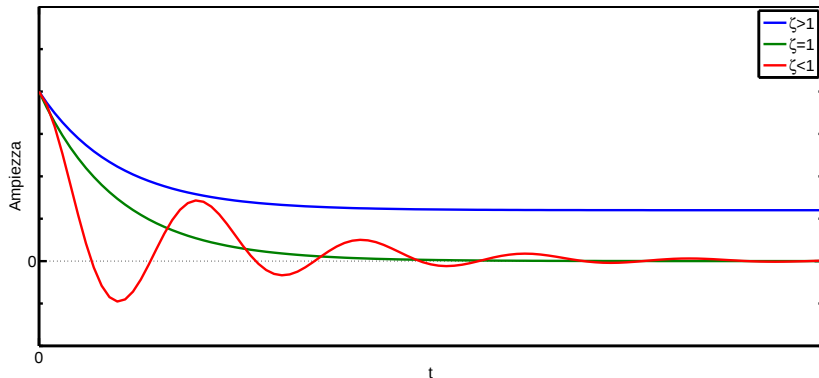
$$H(j\omega) \simeq \frac{R}{2j(\omega - p)}$$

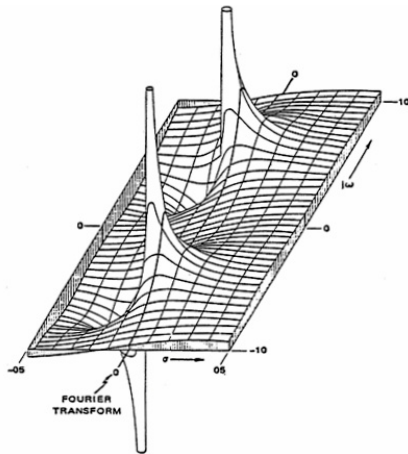
La risposta all'impulso di un sistema ad un grado di libertà può essere determinata dalle equazioni precedenti assumendo che le condizioni iniziali siano nulle e che $F(s) = 1$ per un impulso. Allora

$$X(s) = H(s)F(s) = \frac{R}{2j(s-p)} - \frac{R^*}{2j(s-p^*)}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{R}{2j}e^{pt} - \frac{R^*}{2j}e^{p^*t} = \\&= \frac{R}{2j}e^{-\sigma t} [e^{\omega_d j t} - e^{-\omega_d j t}] = \\&= \frac{R}{2j}e^{-\sigma t} [2j \sin(\omega_d t)] = \\&= Re^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) = h(t)\end{aligned}$$

R è l'ampiezza della risposta impulsiva, la parte reale del polo è la velocità di decadimento e la parte immaginaria del polo è la frequenza di oscillazione.



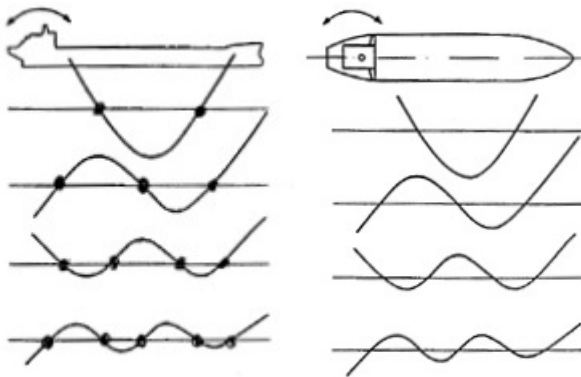


Parte reale della funzione di trasferimento.

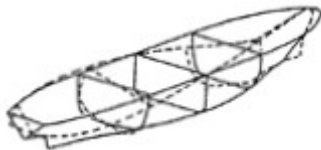
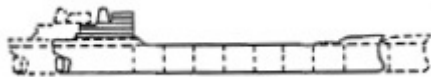
Si possono avere diversi tipi di vibrazione che interessano la nave:

- vibrazioni flessionali, sia sul piano verticale sia sul piano orizzontale
- vibrazioni torsionali
- vibrazioni longitudinali
- le diverse combinazioni tra le precedenti.

Modi flessionali



Modi longitudinali e torsionali

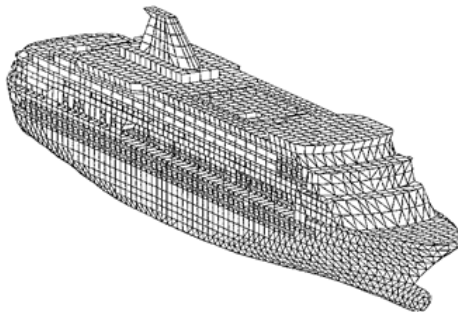


I modi fondamentali di vibrazione sono associati alle frequenze naturali più basse:

- a due nodi per vibrazioni flessionali
- a un nodo per vibrazioni torsionali e longitudinali

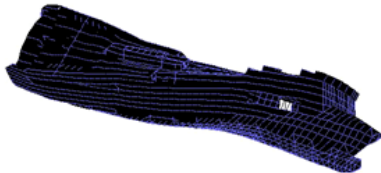
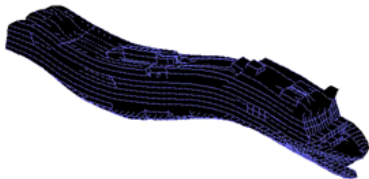
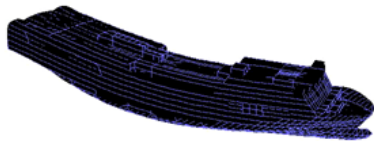
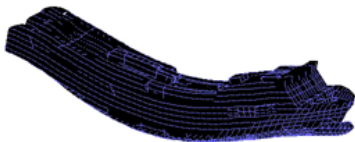
Le vibrazioni verticali sono considerate le più importanti. Le loro frequenze naturali sono le più basse rispetto agli altri tipi di vibrazione. Inoltre si ha risonanza con le frequenze del motore ai bassi regimi.

Bisogna evitare le situazioni di risonanza tra le sorgenti di eccitazione e le frequenze naturali delle strutture di scafo della nave. Si usano quindi idonei strumenti di calcolo previsionale (FEM)



Le schematizzazioni con il metodo degli Elementi Finiti (FEM) sono fatte in modo da poter eseguire sia i calcoli statici che dinamici, con minimi adattamenti ed integrazioni necessari (tra 10^4 e 10^5 gradi di libertà).

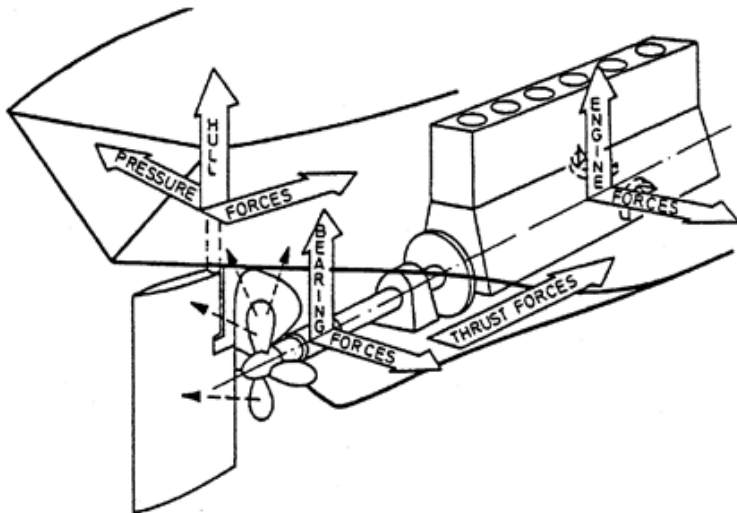
- 1 Vengono calcolati le frequenze e i modi naturali, nella banda di frequenza di interesse, con la tecnica della condensazione.
- 2 Per tutti i punti significativi della nave si calcolano gli spettri dell'ampiezza di vibrazione in funzione della frequenza, imponendo come forzanti le pressioni indotte dalle eliche di propulsione.



Maggiori sorgenti di vibrazione:

- Eliche
- Motori Diesel a 2 tempi
- Onde del mare

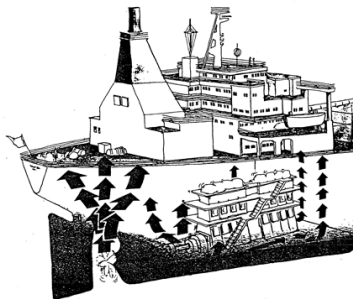
Sulle navi passeggeri, non si tiene conto (con qualche eccezione) della vibrazione dei motori diesel a 4 tempi essendo questi sospesi.



- L'elica è di gran lunga l'eccitazione più importante. In particolar modo le pressioni ad impulso dovute alla cavitazione dovrebbero essere le più basse possibile.
- I momenti esterni causati dal motore possono creare vibrazioni quando la frequenza del momento del secondo ordine coincide con la frequenza della trave nave.
- Le fluttuazioni delle forze di spinta dovute al motore principale e all'elica possono essere la ragione dei più elevati livelli di frequenza.

Elica

- Fonte primaria di vibrazioni e rumore a bordo delle navi
- Se l'elica non è adatta alle caratteristiche della scia della nave, vi è il rischio che insorgano fastidiose vibrazioni e rumore.

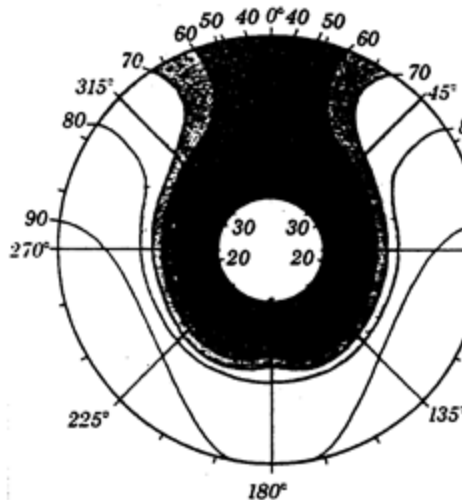
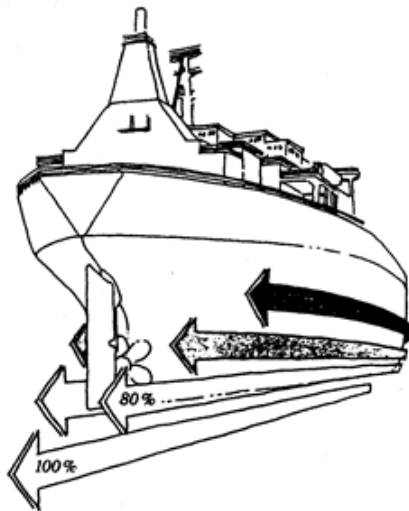


Rumore e vibrazioni dell'elica trasmessi alla carena

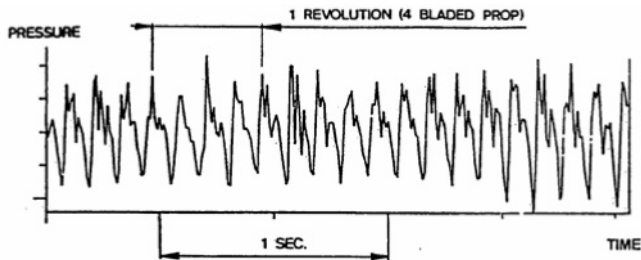
- attraverso l'albero e i cuscinetti
- come fluttuazioni di pressione nell'acqua

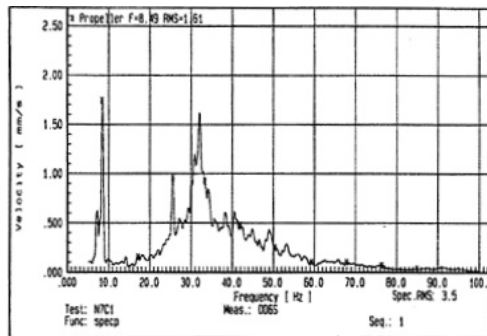
Effetto scia: la velocità del flusso dove è posta l'elica è minore della velocità della nave.

- L'elica lavora in un flusso disturbato dietro la carena
- L'elica è sottoposta a variazioni di scia durante la rotazione.

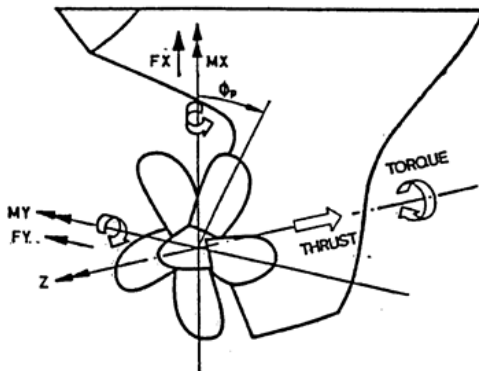


La scia è più disturbata quando la pala passa alla sommità del circolo, sotto la volta di poppa. La forza sulla pala allora aumenta velocemente e viene creata una distinta pulsazione di pressione.





Il carico idrodinamico sulle pale dell'elica crea forze e momenti che vengono trasferiti all'albero porta-elica



Quando la distanza tra le pale è uguale, le frequenze d'eccitazione sono del tipo

$$f = \frac{nZ\omega_{\min}}{60} \text{ Hz}$$

- Z numero di pale dell'elica
- $\omega_{\min}$ numero di giri al minuto dell'elica
- n numero delle armoniche.

Le forze ed i momenti idrodinamici dipendono da:

- distribuzione di scia
- progetto dell'elica (skew, numero di pale)
- velocità della nave
- regime di rotazione dell'elica

Ampiezza circa proporzionale al quadrato del numero dei giri e dalla velocità della nave.

Eliche con numero dispari di pale inducono fluttuazioni di spinta minori, ma momenti flettenti maggiori rispetto ad eliche con numero pari di pale.

I momenti flettenti tendono a decrescere con l'aumentare del numero di pale.

Il campo di pressioni fluttuanti indotte dall'elica è dovuto essenzialmente a:

- spessore delle pale e carico idrodinamico nel caso di elica non cavitante
- crescita e collasso della cavitazione sulle pale dell'elica

Elica non cavitante:

- si considerano principalmente lo spessore delle pale ed il carico idrodinamico
- componenti di prima armonica delle pale dell'elica
- il campo di pressione ruota con le pale (ritardo di fase delle pressioni sulla superficie di carena con risultanti forze sulla nave saranno molto piccole e non importanti per le vibrazioni)

Cavitazione transiente

- è normalmente la sorgente di eccitazione delle vibrazioni della nave.
- il campo di pressione contiene componenti multiple delle armoniche di pala
- contributo marginale al rumore all'interno della nave

Vortici cavitanti

- spettro continuo di pressione responsabile del rumore udibile a bordo
- vortici del tipo “tip vortex”
- aumento con il regime di rotazione
- rumore e le vibrazioni nella zona di poppa più severi a velocità ridotta

- Nel piano dell'elica principalmente componenti delle frequenze di pala generate dalla cavitazione transiente
- Verso poppa aumenta la “broadband” (banda larga)

Quindi il campo di pressione a banda larga è generato dal collasso della cavitazione tip-vortex.

Campo di pressione generato da un'elica cavitante (transiente)

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- ρ densità dell'acqua
- ϕ velocità potenziale
- t tempo

Considerando una cavità di volume V che copre un'area A e rappresentata da una distribuzione sorgente/pozzo q , la pressione ad una distanza r può essere scritta come:

$$p = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A q \frac{dA}{r}$$

$$q = \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_x \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

- τ spessore della cavità
- u_x è la componente della velocità lungo la corda

Considerando un volume cavitante sulla pala dell'elica si forma un picco alto e stretto, assumendo che

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} \gg u_x \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

$$r^2 \gg A$$

si può dimostrare che le equazioni vengono semplificate nelle seguenti

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{dA}{r} = \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Ciò significa che quando la distanza di un punto del campo può essere confrontata con l'estensione della cavitazione, il campo di pressione indotto dalla transizione è proporzionale alla derivata seconda del volume della cavità rispetto al tempo.

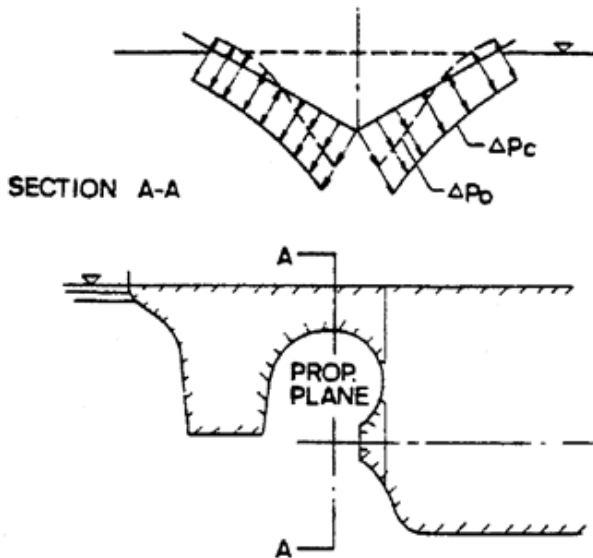
L'esperienza mostra che i parametri dell'elica che hanno particolare influenza sugli impulsi di pressione sono:

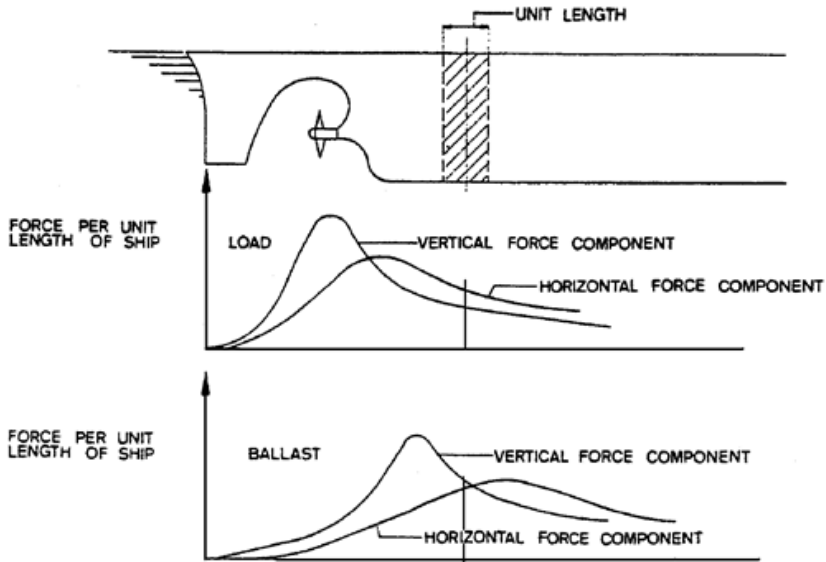
- la distribuzione radiale del carico sulle pale
- la forma a skew delle pale dell'elica
- l'area della pala

Il numero delle pale non ha particolare influenza sugli effetti della pressione. Più grande è la superficie di carena esposta, maggiori saranno le forze risultanti.

Per i calcoli sulla trave nave e sulle sovrastrutture comunque sono importanti solo le forze di eccitazione totali sulla superficie dello scafo. In questo caso i contributi degli impulsi di pressione non cavitante possono essere trascurati perché:

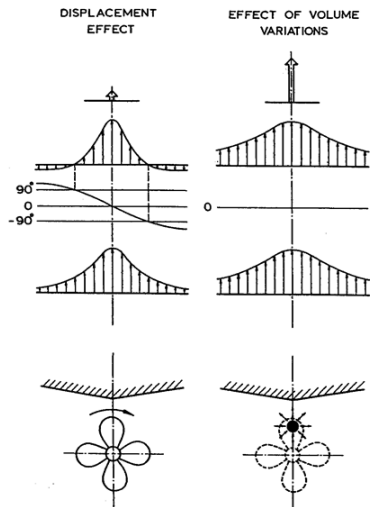
- La pressione di un'elica non cavitante è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dell'elica
- l'angolo di fase della pressione dovuta alla cavitazione è quasi costante su buona parte dello scafo (Δp_c), mentre l'angolo di fase di una pressione di un'elica non cavitante sarà variabile lungo tutto lo scafo (Δp_o)





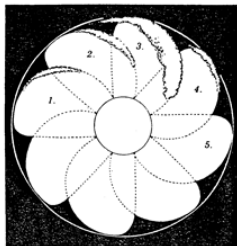
Consideriamo gli effetti, dovuti alle eliche, che contribuiscono alle fluttuazioni di pressioni sullo scafo:

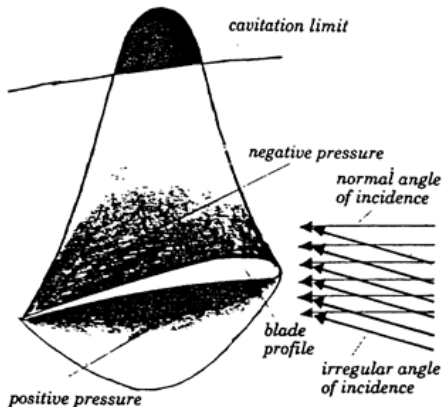
- ① effetto spostamento delle pale dovuto al loro moto nell'acqua
- ② effetto spinta sulle pale quando si muovono attraverso l'acqua
- ③ effetto della cavitazione sulle pale; questo effetto può essere decomposto in
 - ① effetto spostamento
 - ② effetto della crescita e dell'implosione delle bolle



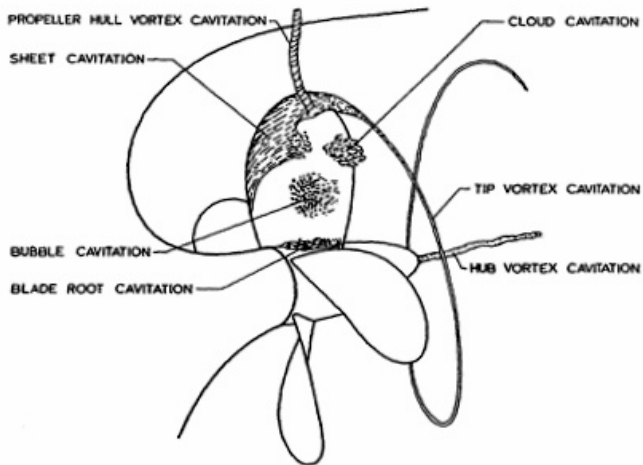
Cavitazione

Alla pressione atmosferica l'acqua bolle ad una temperatura pari a 100°C . Se la pressione è minore di quella atmosferica, l'acqua bollirà ad una temperatura inferiore. A pressioni sufficientemente basse, l'acqua bollirà alla normale temperatura dell'ambiente. La cavitazione insorge quando la pressione nel liquido attorno alle pale dell'elica è così bassa che il medesimo inizia a bollire.

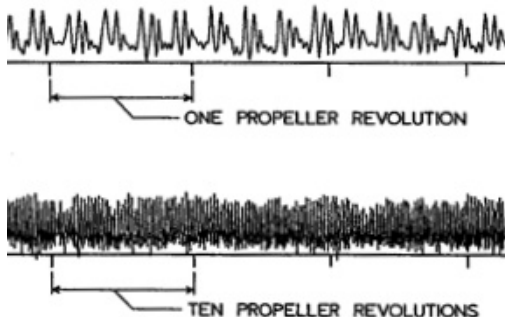


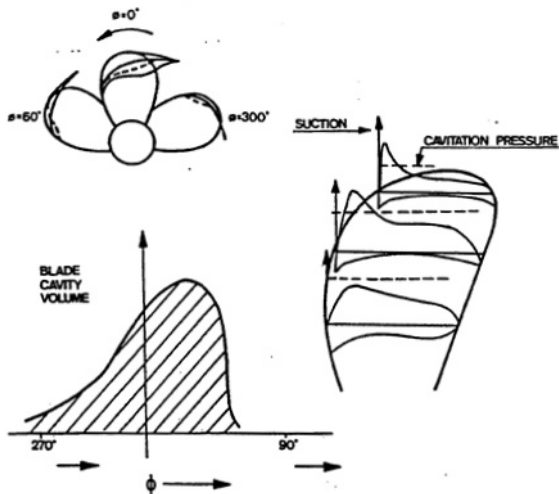


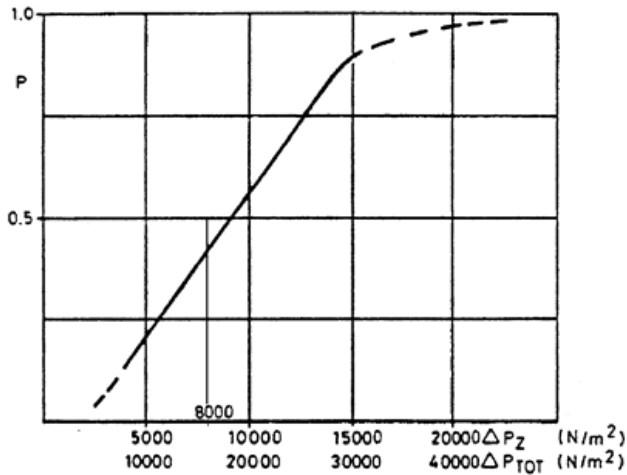
La crescita ed il collasso delle bolle creano fluttuazioni di pressione che si trasformano in vibrazioni sulla carena.

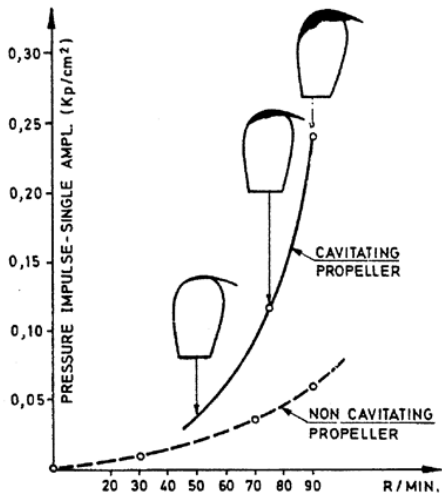


Nel caso ideale l'elica induce una pressione fluttuante p sulla volta di poppa che è una funzione periodica del tempo t . Il periodo T delle fluttuazioni di pressione è pari a $\frac{1}{Z}$ volte il periodo di rotazione dell'elica, con Z il numero delle pale. La frequenza fondamentale f_0 è uguale alla frequenza delle pale, cioè $f_0 = \frac{1}{T}$. Quindi il segnale per un'elica non cavitante è sinusoidale. Per l'elica cavitante invece il segnale risulta periodico complesso.









Dal punto di vista delle eccitazioni dello scafo, i seguenti tipi di cavitazione sono indicati come i maggiori contributori:

- la cavitazione a lamina sulle pale
- la cavitazione di vortice all'apice
- la cavitazione a vortice tra carena ed elica

In generale, il fulcro del vortice non contribuisce significativamente alle vibrazioni dello scafo a meno che non sia troppo forte ed ecciti il timone.

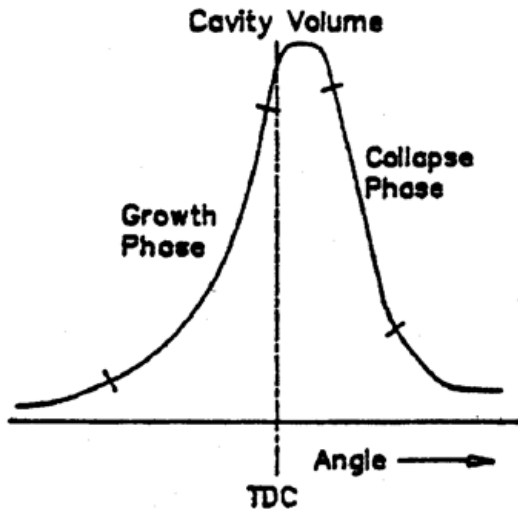
In termini molto schematici, le forze eccitanti sono date da

$$F_{HULL} = \int_{WA} M_p \cdot SBF \cdot n_Z p e^{j(\omega t + \varphi)} dS$$

dove F_{HULL} [N] è la forza d'eccitazione di carena, M_p è il mode profile, SBF è il solid boundary factor, p [N/m²] è la pressione, ω [rad/s] è la frequenza d'eccitazione, t [s] è il tempo, φ [rad] è l'angolo di fase, n_Z è il versore normale in direzione verticale, S [m²] è la superficie e WA [m²] è la superficie bagnata.

La forza d'eccitazione sulla carena dovuta ad eliche cavitanti può essere ridotta nelle seguenti maniere:

- riducendo le pressioni di eccitazione sulla carena
- riducendo il solid boundary factor
- riducendo l'effettiva superficie bagnata sulla quale agisce il campo di pressione
- adattando la distribuzione longitudinale della forza sul profilo della carena.



Per stimare i livelli delle pressioni si utilizzano due criteri:

- 1 Limite superiore degli impulsi di pressione sulla superficie dello scafo (poppa) sopra l'elica:

$$\Delta p_{\max} = 8500 \text{ N/m}^2$$

- 2 Livello massimo raccomandato per frequenze di pala corrispondenti ad un livello di velocità di vibrazione verticale di $4 \text{ mm/s}_{\text{RMS}}$ (corrispondenti a $5.7 \text{ mm/s}_{\text{Picco}}$) per segnali stazionari:

$$p_{\max} = 0.884 \frac{V_A}{D^2} \sqrt{\left(\frac{1.4 \cdot 10^6 B H}{V_A L f} \right)^2 + 7 \text{ N/m}^2}$$

Con

- $V_A = \frac{T_A}{T} \text{ [m}^3\text{]}$ volume di carena,
- $T \text{ [m]}$ immersione di progetto,
- $T_A \text{ [m]}$ immersione poppiera,
- $T \text{ [m]}$ diametro dell'elica,
- $L \text{ [m]}$ lunghezza tra perpendicolari,
- $B \text{ [m]}$ larghezza,
- $H \text{ [m]}$ altezza di costruzione,
- $f \text{ [Hz]}$ frequenza di pala dell'elica.

Battimenti

Le due eliche devono ruotare alla stessa velocità, altrimenti si verificano i “battimenti”, dovuti alla differenza delle velocità delle eliche.

$$x_1 = A \cos(\omega t)$$

$$x_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega) t]$$

$$x = x_1 + x_2 = A \{ \cos(\omega t) + \cos[(\omega + \Delta\omega) t] \}$$

Considerando che

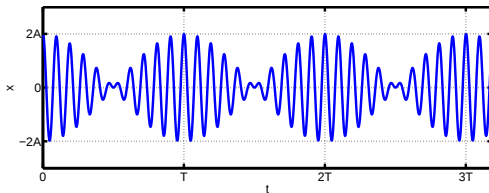
$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} x &= A \left[2 \cos \frac{\omega t + \omega t + \Delta \omega t}{2} \cos \frac{\Delta \omega t}{2} \right] = \\ &= 2A \cos \frac{\Delta \omega t}{2} \cdot \cos \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \end{aligned}$$

L'ampiezza risultante varia tra 0 e $2A$ a causa del termine $2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$, mentre il moto generale di x è un'onda sinusoidale la cui frequenza angolare è uguale a $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$. Siamo quindi in presenza di battimenti. Quando l'ampiezza raggiunge un massimo, si dice che avviene un battimento. La frequenza di battimento, determinata da 2 massimi consecutivi è pari a

$$f_b = \frac{\omega + \Delta\omega}{2\pi} - \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$



Motori diesel a 2 tempi

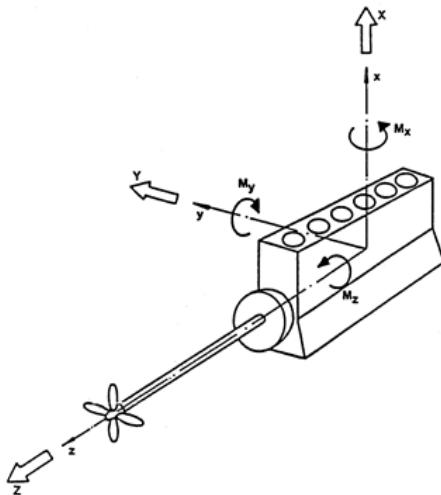
Motore a 2 tempi:

- frequenze di eccitazione basse
- limiti sulle ampiezze

Motori medio-veloci a 4 tempi:

- frequenze più alte
- limiti per velocità ed accelerazioni

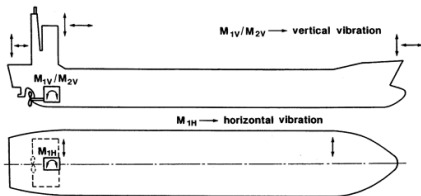
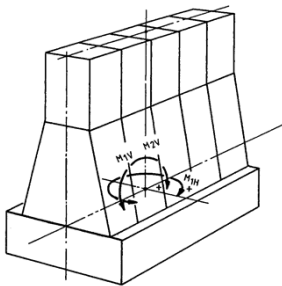
Per minimizzare le vibrazioni si deve cercare di evitare la risonanza.



Il motore a 2 tempi ha frequenze naturali basse: più pericoloso per le vibrazioni.

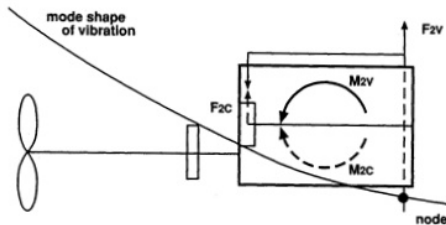
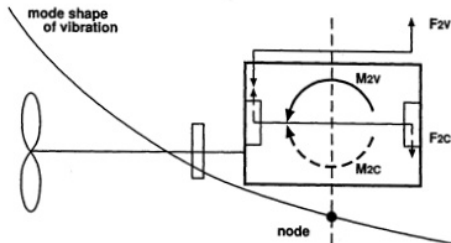
- forze e momenti generate da forze d'inerzia cicliche di masse rotanti non bilanciate
 - forze cicliche del primo e del secondo ordine per ogni cilindro
 - somma vettoriale nulla nei motori con sequenze regolari di firing
- linea d'assi con le sue vibrazioni assiali e torsionali

Le forze di massa libere generano dei momenti; principalmente un momento verticale del primo ordine M_{1V} , un momento orizzontale del primo ordine M_{1H} ed un momento verticale del secondo ordine M_{2V} .



Ogni momento eccita lo scafo quando la frequenza di eccitazione armonica è vicina ad una frequenza di scafo o quando i momenti liberi agiscono su un nodo di vibrazione, come in figura.

Un metodo comune usato per ridurre sul motore le vibrazioni del secondo ordine è quello di compensare il momento libero del secondo ordine con opportuni pesi controrotanti alla velocità doppia del motore.



Onde del mare

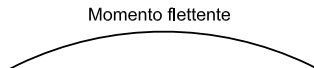
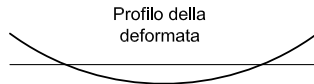
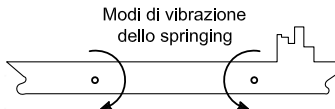
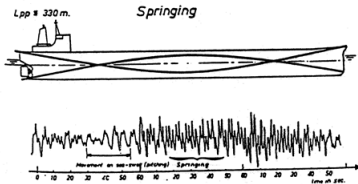
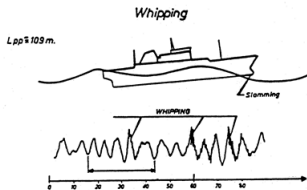
I modi di vibrare a due nodi della nave sono solitamente eccitati dalle onde.

Springing: primo modo, dovuto alla risonanza con le onde del mare, crea forze eccitanti lungo tutta la carena, crea un momento flettente e quindi degli sforzi longitudinali sul ponte e sul fondo.

Bow slamming e Whipping: vibrazioni transitorie che nascono bruscamente e poi si smorzano lentamente, nascono spesso insieme

Springing:

- aumenta con l'aumento del periodo naturale
- diminuisce con l'immersione della nave
- aumenta con la velocità della nave
- varia con l'angolo d'incontro delle onde, essendo più significativo in mare di prua e più piccolo in mare di poppa
- aumenta con pendenze d'onda significative



Note sullo smorzamento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Se $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ allora

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$\begin{cases} X = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\ \tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \end{cases}$$

- X valore di picco dello spostamento
- $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n}$ rapporto tra la frequenza eccitante e la frequenza naturale non smorzata del sistema
- $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ frequenza naturale non smorzata
- $\xi = \frac{c}{c_c}$ rapporto di smorzamento o frazione di smorzamento critico
- c_c coefficiente di smorzamento viscoso critico, cioè il più piccolo valore di c per il quale la massa non eseguirà alcuna oscillazione

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

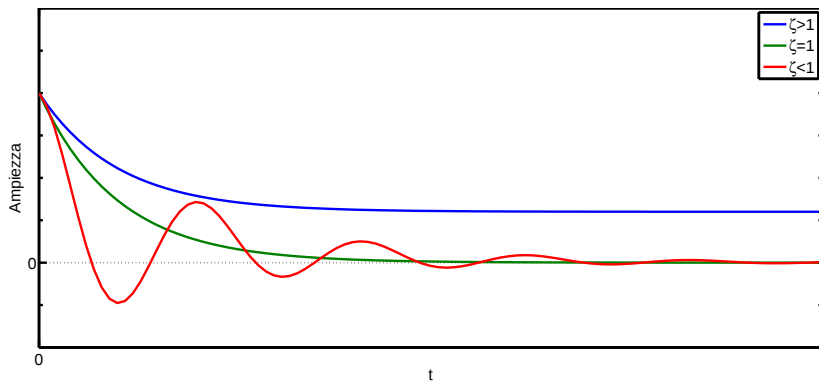
$$x(t) = ce^{st}$$

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$



- a basse frequenze lo spostamento è controllato dalla molla:

$$r^2 < 1 \Rightarrow \omega^2 \ll \frac{k}{m} \Rightarrow X = \frac{F_0}{k} = X_{STATICA}$$

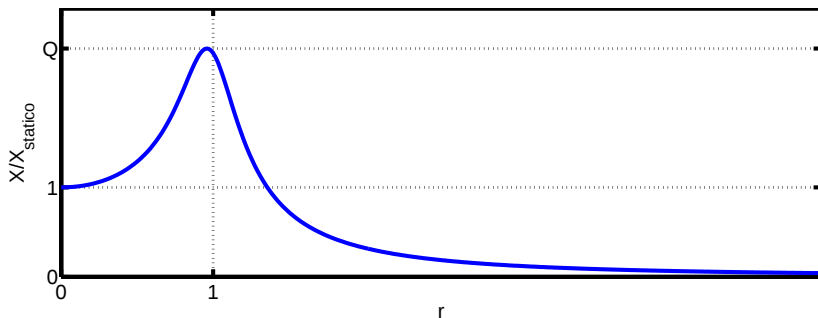
- ad alte frequenze lo spostamento è controllato dalla massa:

$$r^2 > 1 \Rightarrow \omega^2 \gg \frac{k}{m} \Rightarrow X = \frac{F_0}{m\omega^2} \Rightarrow X\omega^2 = A = \frac{F_0}{m}$$

- alla frequenza naturale non smorzata $\omega = \omega_n$ e $r = 1$ e quindi

$$\frac{X_{ris} k}{F_0} = Q = \frac{1}{2\xi}$$

con $X_{ris} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\xi} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c_c}{c} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2m\omega_n}{c} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{m\omega}{c} = \frac{F_0}{c\omega}$
ampiezza dello spostamento per $r = 1$ e Q amplificazione alla risonanza.



- Se $\omega \ll \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ allora $\frac{X}{X_{statico}} = 1$
- Se $\omega \gg \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ allora $\frac{X}{X_{statico}} = \frac{\omega_d}{\omega} \rightarrow 0$
- Se $\omega = \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ allora $\frac{X}{X_{statico}} = \frac{k}{c\omega_d} = Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\eta}$
con η fattore di perdita

Misura di ξ nel dominio della frequenza

In condizioni di risonanza:

$$\frac{X}{X_{statico}} = \frac{1}{2\xi}$$

Il cedimento statico non è sempre noto $\rightarrow$ determinato con la tecnica della *mezza potenza*

X^2 assume la metà del valore Q^2 in corrispondenza dei cosiddetti *punti a metà potenza* (o punti a -3dB).

In condizioni diverse dalla risonanza (generico r_i tale che $X_i = \frac{Q}{\sqrt{2}}$) si ha

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2\xi r_i)^2}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{2}}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \simeq 2\xi\omega_n$$

$$b = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} = \frac{\Delta f}{f_n} \simeq 2\xi$$

ξ è il valore da misurare e b è detta larghezza di banda a metà potenza

$$r^4 + (4\xi^2 - 2)r^2 + (1 - 8\xi^2)$$

$$r_{1,2}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

Per piccoli valori di ξ si ha

$$\xi = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}$$

e se si approssima

$$\omega_n \simeq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

si ottiene

$$\xi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\omega_n} \simeq \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)}{(\omega_2 + \omega_1)^2} \simeq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}$$

Smorzamento: risposta libera di un sistema ad un grado di libertà

$$x(t) = X_0 e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

con $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \simeq \omega_n$ e $\xi < 1$

I massimi della funzione cadono in $t_N = t_0 + \frac{2\pi N}{\omega_n}$, con $N \in \mathbb{N}$.

Calcolando il rapporto fra il valore massimo della funzione a t_0 e quello a t_n si ricava

$$\begin{aligned} x(t_0) &= X_0 e^{-\xi \omega_n t_0} \\ x(t_N) &= X_0 e^{-\xi \omega_n (t_0 + \frac{2\pi N}{\omega_n})} \\ \frac{x(t_0)}{x(t_N)} &= e^{2\pi \xi N} \end{aligned}$$

$$N\delta = \ln \frac{x(t_0)}{x(t_N)} = 2\pi\xi N$$

e quindi

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_0)}{x(t_N)} = 2\pi\xi$$

Introducendo il livello di vibrazione L_x

$$L_x = 10 \log_{10} \frac{x^2}{x_{rif}^2} = 20 \log_{10} \frac{x}{x_{rif}}$$

con ω costante.

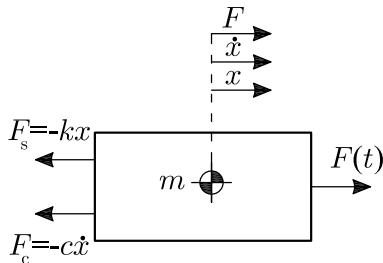
Si definisce come velocità di decadimento Δ_t di L_x in un'oscillazione libera la quantità

$$\Delta_t = -\frac{dL_x}{dt} = 8.69\xi\omega_n = 54.6\xi f_n \text{ dB/s}$$

Si definisce come tempo di riverbero T_{60} il tempo necessario alla vibrazione per decrescere di 60dB:

$$T_{60} = \frac{60}{\Delta_t} = \frac{1.10}{\xi f_n} \text{ s}$$

Considerazioni energetiche



$$x = X \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x} = X\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m [X\omega \cos(\omega t + \phi)]^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k [X \sin(\omega t + \phi)]^2$$

La forza $-c\dot{x}$ che agisce attraverso uno spostamento dx dissipa una quantità differenziale di energia pari a

$$c\dot{x}dx = c\dot{x}^2 dt$$

L'energia dissipata per ciclo è pari a

$$\begin{aligned} D &= \int F_c dx = \int c\dot{x} dx = \\ &= c \int \frac{dx}{dt} dx \frac{dt}{dt} = c \int \dot{x}^2 dt = \\ &= c \int_0^{2\pi} X^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \\ &= \pi c X^2 \omega \end{aligned}$$

Per $\omega = \omega_n$ e $m\omega_n^2 = k$ abbiamo perciò

$$E = E_k + E_p$$

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2}kX^2$$

$$L_{TOT} = 2E_{k,\max} = 2E_{p,\max} = kX^2$$

Definiamo come capacità di smorzamento ψ il rapporto fra l'energia dissipata per ciclo e l'energia potenziale massima:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{D}{E_{p,\max}} = \frac{\pi c X^2 \omega}{\frac{1}{2} k X^2} = \\ &= \frac{2\pi\omega c}{k} = 4\pi\xi r\end{aligned}$$

Definiamo inoltre come fattore di perdita o dissipazione η il rapporto tra l'energia dissipata per radiante $\frac{D}{2\pi}$ e l'energia potenziale massima:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{D/2\pi}{E_{p,\max}} = \frac{\pi c X^2 \omega}{2\pi \frac{1}{2} k X^2} = \\ &= \frac{\omega c}{k} = 2\xi r\end{aligned}$$

Se siamo in risonanza, cioè quando $\omega = \omega_n$ e $m\omega_n^2 = k$ possiamo scrivere

$$\eta = \frac{\psi}{2\pi} = 2\xi$$

Relazione fra le misure di smorzamento in risonanza

Poiché il fattore di perdita η è definito in termini di quantità d'energia, può essere applicato a qualsiasi meccanismo di smorzamento, non solo a quello viscoso:

$$\eta = \frac{\psi}{2\pi} = 2\xi = 2\frac{c}{c_c} = \frac{2.20}{f_n T_{60}} = \frac{\Delta_t}{27.3 f_n} = \frac{\delta}{\pi} = b = \frac{1}{Q}$$

Rigidità complessa

Se al consueto sistema massa-molla-smorzamento applichiamo una forza puramente sinusoidale del tipo

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$x = X e^{j\omega t}$$

arriviamo a

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k) X = F_0$$

Definendo

$$\bar{k} = k + jk_1$$

$$k_1 = \omega c$$

si ottiene

$$\left(-\omega^2 m + \bar{k}\right) X = F_0$$

$$\eta = \frac{\omega c}{k} = \frac{k_1}{k}$$

Quindi il fattore di perdita η , che corrisponde a un coefficiente di smorzamento viscoso costante, è proporzionale alla frequenza:

$$\bar{k} = k(1 + j\eta)$$

Quindi per un'eccitazione puramente sinusoidale, l'uso di una molla con un'appropriata rigidità complessa è equivalente all'uso di una molla elastica ed uno smorzatore.

Per i materiali abbiamo perciò

$$E = E_r + jE_i = E_r(1 + j\beta)$$

con

- E modulo complesso di Young (elasticità)
- E_r modulo di immagazzinamento
- E_i modulo di perdita.

Fattore di perdita di un materiale β :

$$\beta = \frac{E_i}{E_r}$$

Materiale	β
Acciaio, Alluminio, Ottone	$< 10^{-3}$
Ferro	$\simeq 10^{-2}$
Leghe speciali rame-manganese	$\simeq 3 \cdot 10^{-2}$
Plastica	$\simeq 10^{-2} \div 10^{-1}$
Poliestere rinforzato con fibra di vetro	$\simeq 10^{-2}$
Plexiglas	$\simeq 2 \cdot 10^{-2}$
Calcestruzzo	$\simeq 10^{-2}$
Vetro	$\simeq 10^{-3} \div 10^{-2}$

Tipo di struttura	β
Strutture metalliche composte da un piccolo numero di parti di grosso spessore (es. scafi)	$3 \cdot 10^{-3}$ per $f < 500 \text{ Hz}$ 10^{-3} per $f > 1000 \text{ Hz}$
Strutture metalliche composte da varie parti di grosso spessore o poche di piccolo (es. motori, automobili)	10^{-2}
Strutture metalliche composte da varie parti di piccolo spessore (macchinari piccoli e complessi)	$5 \cdot 10^{-2}$ per $f < 500 \text{ Hz}$ 10^{-2} per $f < 1000 \text{ Hz}$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Se il materiale è sottoposto a carico dinamico (vibrazioni) si creano delle azioni interne di carattere viscoso proporzionali alla velocità di vibrazione, di conseguenza si avrà una differenza di fase tra lo sforzo σ e la deformazione ε .

$$E^0 = E' + jE'' = E(1 + jd)$$

$$d = \frac{E''}{E'} = \tan \delta$$

In condizioni di risonanza si ha

$$\delta = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f_0}$$

dove Δf è l'intervallo di frequenza intorno alla risonanza in cui il livello scende di 3 dB (dimezzamento d'energia) ed f_0 è la frequenza di risonanza.

Nei casi reali, ad esempio se prendiamo in considerazione un pannello, siamo in presenza di un sistema ad n gradi di libertà: occorre quindi una grande cura nell'applicare gli stessi concetti di un sistema ad un grado di libertà.

Infatti, per le misure di smorzamento si ha che

- a bassa frequenza è possibile utilizzare il modello ad un gdl, eccitando sinusoidalmente il modo (vicino alla risonanza) ed applicando il metodo della mezza potenza
- ad alte frequenze si eccitano più modi contemporaneamente e la risposta vicino ad un picco può essere influenzata dalla risposta ad altri picchi: chiaramente, in questo caso, non possono essere usate tecniche di larghezza di banda e simili
- misure dirette della dissipazione di calore sono difficili e richiedono apparecchiature sofisticate

Nella pratica il modo più usato per la misura consiste nello spegnere l'eccitazione a larga banda e misurare il tempo di decadimento. Infatti

$$\eta = \frac{2.20}{fT_{60}}$$

Viscoelastico

Effetti:

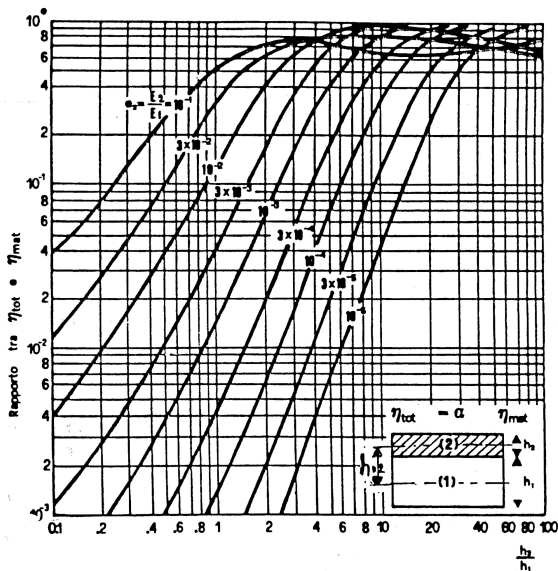
- 1 aumento dell'impedenza meccanica $\frac{F}{V}$ del supporto in seguito all'aumento della massa
- 2 scostamento delle frequenze proprie del supporto
- 3 attenuazione rapida delle vibrazioni libere del sistema eccitato da impulsi o urti
- 4 attenuazione dei fenomeni di risonanza
- 5 riduzione del rumore aereo irradiato $10\log_{10} \sigma$, con σ coefficiente d'irradiazione

Smorzamento a strato libero

Se $\eta_{mat} = e_2 s_2 \ll 1$

$$\eta_t = \eta_{mat} \frac{1}{1 + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{h_1^3/h_2}{h_2^2 + 12h_{12}^2}} = \eta_{mat} \frac{1}{1 + \frac{1}{e_2 s_2 (3 + 6s_2 + 4s_2^2)}}$$

- η_{mat} fattore di perdita del materiale smorzante
- $e_2 = \frac{E_2}{E_1}$ rapporto tra i moduli di elasticità lineare rispettivamente del materiale smorzante E_2 , e della lamiera E_1
- $s_2 = \frac{h_2}{h_1}$ rapporto tra gli spessori rispettivamente del materiale smorzante h_2 , e della lamiera h_1
- $h_{12} = \frac{h_1 + h_2}{2}$ distanza tra gli assi neutri dei due strati



Materiale	E_2 [dine/cm ²]	η_2 [dine/cm ²]	$E_2 \eta_2$ [dine ² /cm ⁴]
Acciaio	$2.0 \cdot 10^{12}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^8$
Legno di faggio	$1.0 \cdot 10^{11}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^9$
Sughero	$2.6 \cdot 10^8$	$0.1 \div 0.2$	$2.6 \div 5.2 \cdot 10^7$
Gomma	$2.0 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^{-2} \div 2.0 \cdot 10^{-1}$	$4.0 \div 40.0 \cdot 10^7$
Aquaplas	$1.0 \cdot 10^{10}$	0.45	$4.5 \cdot 10^9$

I moduli di perdita sono misurati in dine/cm^2 , dove

$$10^{10} \text{dine/cm}^2 = 10^9 \text{N/cm} = 10^4 \text{kg/cm}^2$$

Il materiale viscoelastico a strato libero può essere spruzzato o spalmato sulla superficie da trattare e quindi lasciato asciugare a temperatura ambiente. In alcuni casi è disponibile in fogli.

Un rivestimento smorzante esplica la maggiore efficacia in zone ad elevato momento flettente e quindi i migliori risultati si ottengono quando il materiale viene applicato a strutture relativamente sottili e poste in vibrazione a frequenze prossime a quelle di risonanza. Invece è inefficace nel caso in cui le vibrazioni prodotte nella struttura rivestita non corrispondano alla frequenza naturale della struttura stessa ed a frequenze molto basse.

Smorzamento a strato vincolato

Lo smorzamento a strato vincolato è il trattamento in cui uno strato del materiale smorzante viene compreso tra la struttura vibrante di base ed uno strato vincolante aggiunto.

Nel seguito i pedici 1, 2 e 3 indicheranno rispettivamente la struttura base, lo strato smorzante viscoelastico e lo strato di costruzione.

Se $f \cdot H_2 < 3000 \text{ Hz} \cdot \text{cm}$ (come quasi sempre in pratica), il fattore di perdita complessivo del pannello può essere espresso nella seguente forma:

$$\eta = \frac{\eta_2 Y X}{1 + (2 + Y) X + (1 + Y) (1 + \eta_2^2) X^2}$$

dove X è il parametro geometrico e Y è il parametro di taglio.

Il parametro geometrico è un elemento utile nei calcoli in quanto è funzione solamente delle dimensioni e dei moduli di elasticità dei tre strati:

$$Y = \frac{3e_3 h_3 (1 + 2h_2 + h_3)^2}{(1 + e_3 h_3) (1 + e_3 h_3^3)}$$

In pratica Y assume un ben determinato valore per ogni singolo trattamento smorzante ed è indipendente dalla frequenza.

Per ottenere il massimo si può:

- 1 aumentare $e_3 h_3 = \frac{E_3}{E_1} \cdot \frac{H_3}{H_1}$;
- 2 aumentare $h_2 = \frac{H_2}{H_1}$;
- 3 aumentare $h_2 = \frac{H_3}{H_1}$.

Il parametro di taglio X è invece una grandezza che dà un'indicazione della capacità di trasmissione delle vibrazioni dello strato viscoelastico. Esso si può con buona approssimazione esprimere come segue:

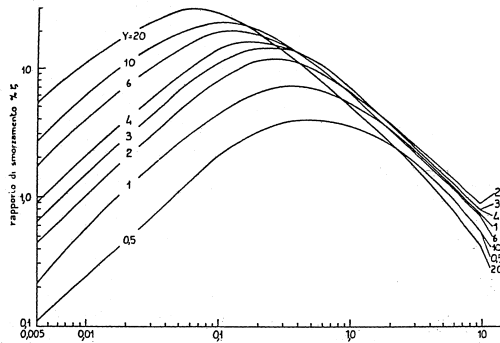
$$X = \frac{G}{H_2 \omega} \left(\frac{1}{E_1 H_1} + \frac{1}{E_3 H_3} \right) \frac{B_1}{\mu_1}$$

- $G = \frac{\tau}{\gamma}$ è il modulo di elasticità tangenziale del materiale viscoelastico, definito come il rapporto tra lo sforzo per unità di area τ agente lungo le superfici e l'angolo di scorrimento γ
- $B_1 = EJ = \frac{EH^3}{12}$ è il modulo di rigidezza a flessione, definito come prodotto tra il modulo di Young E ed il momento d'inerzia J della sezione, oppure anche come rapporto tra il momento applicato ad una sezione e la sua relativa curvatura;
- μ è la massa della sezione unitaria dello strato 1.

Il fattore di perdita η ha un massimo in corrispondenza di un determinato valore di X . È di notevole importanza, pertanto, ricavare il valore di X per cui si ha il massimo effetto smorzante del pannello composto. Esso vale:

$$X_{\max} = \frac{1}{(1 + Y)(1 + \eta_2^2)}$$

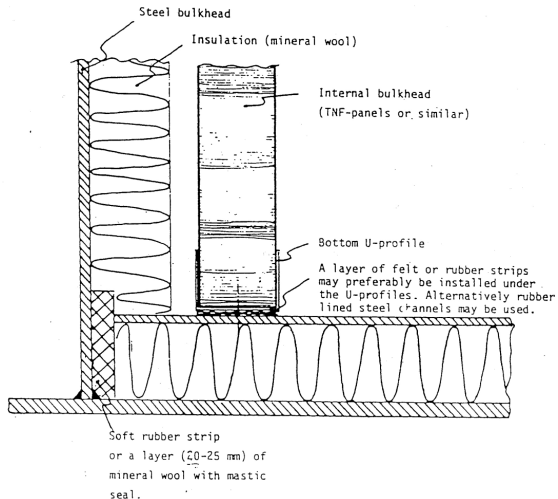
$$\eta_{\max} = \frac{\eta_2 Y}{2 + Y + \frac{2}{X_{\max}}}$$



Pavimenti flottanti

- per combattere la propagazione del rumore strutturale
- disaccoppiano il ponte dalle pareti delle cabine
- guadagno circa $8 \div 13 \text{ dB (A)}$.

La corretta messa in opera è fondamentale: tutte le pareti devono “galleggiare” sui floating floor.



Rumore

RUMORE

Vibrazioni lineari:

- caratterizzano il comportamento dei macchinari
- fino a 1000 Hz
- misurate sui cuscinetti nelle tre direzioni e sul corpo delle macchine
- le grandezze fondamentali:
 - spostamento s
 - velocità $v = 2\pi fs$
 - accelerazione $a = 2\pi fv$

Vibrazioni strutturali:

- caratterizzano le vibrazioni nel campo audio dei macchinari
- fino a 20 000 Hz
- misurate ai piedi del macchinario (o sotto i resilienti se sospeso) nelle tre direzioni
- grandezze fondamentali:
 - livello di velocità di vibrazione $L_v = 20 \log \frac{v}{v_0}$ con $v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ o $v_0 = 10^{-9} \text{ m/s}$
 - livello di accelerazione di vibrazione $L_a = 20 \log \frac{a}{a_0}$ con $a_0 = 10^{-5} \text{ m/s}^2$

Prevenzione del rumore

- determinazione dei limiti di rumore e di vibrazioni da rispettare
- identificazione di tutte le sorgenti di rumore e vibrazioni come possibile causa di disturbo
- assegnazione di uno spettro di rumore e di vibrazioni per ognuna di esse
- esame del progetto per identificare i locali a rischio e le vie di propagazione per via strutturale e aerea
- determinazioni dei livelli previsti nei locali a rischio
- determinazione dei guadagni da ottenere
- esame delle possibilità d'interventi presso le fonti di rumore o sulle fonti stesse

- piano delle isolazioni acustiche tenendo conto delle altre isolazioni e degli elementi di rivestimento previsti
- esame dei “buchi acustici” esistenti e dei fenomeni di rigenerazione del rumore
- vincoli di montaggio da assegnare a tutte le altre installazioni che possono interferire sull'efficacia acustica dei locali a rischio
- controlli all'installazione e collaudo parziale durante la costruzione
- collaudi finali in base al criterio di conformità con i campioni e con procedure semplificate
- progettazione ed esecuzione di interventi correttivi delle anomalie riscontrate

Modi di propagazione del rumore

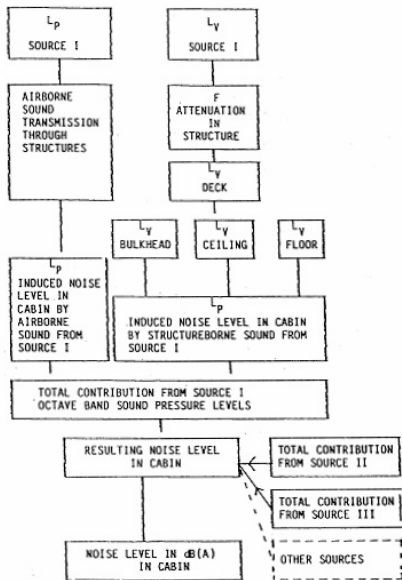
Rumore aereo, creato dai macchinari.

- si trasmette attraverso:
 - 1 i ponti
 - 2 le pareti.
- Si combatte con:
 - 1 isolazioni
 - 2 cabinate per macchine

Rumore strutturale.

- Si trasmette alle strutture attraverso:
 - 1 connessioni di tubi
 - 2 sistema gas di scarico
 - 3 accoppiamenti albero
 - 4 resilienti (se presenti) o punti di appoggio
- Si combatte con:
 - 1 floating floor
 - 2 viscoelastico

Rumore dei fluidi, generato nei tubi dalle pompe



Rumore strutturale

Rumore strutturale: qualsiasi forma di vibrazioni di strutture solide nel campo delle frequenze dell'udibile dal momento che queste sono inevitabilmente accompagnate dalla generazione di suoni nel fluido contiguo (tra 20 Hz e 16 kHz)

Range d'interesse delle ampiezze da 10^{-8} mm fino a spostamenti di qualche millimetro.

Sorgenti di rumore strutturale:

- eccitazione della vibrazione di una struttura mediante forze alternative o impulsive (motori diesel, elica, motori elettrici, compressori del condizionamento, etc.)
- eccitazione della struttura da parte dell'onda di pressione di un rumore aereo incidente su di essa (amplificatori musicali).

Espressione e misura del rumore strutturale

$$SBN = 20 \log_{10} \frac{v}{v_0}$$

- v velocità di vibrazione della struttura in esame
- v_0 velocità di riferimento, $v_0 = 10^{-6} \text{ mm/s}$ o $v_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ mm/s}$ a seconda dei casi

Misura di rumore strutturale:

- sensore di velocità
- integrazione del segnale di un accelerometro

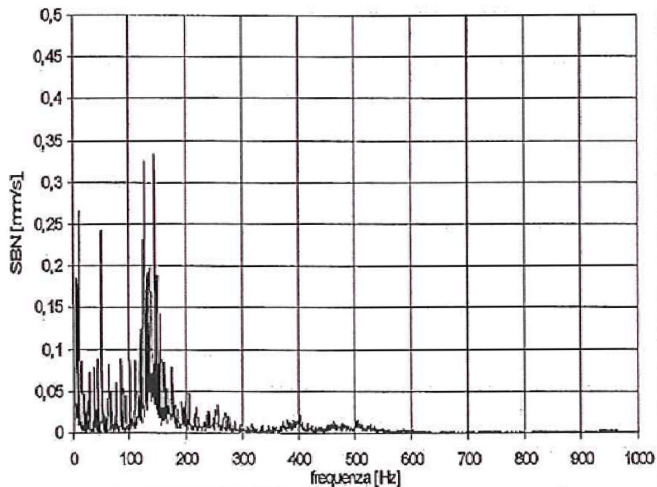
Third Octave Band Number	Center Frequency [Hz]	Frequency Range [Hz]	Corresponding Octave Band
14	25	22 to 28	Sub Octave
15	-31.5-	28 to 36	
16	40	35 to 45	
17	50	45 to 56	1
18	-63-	56 to 71	45 to 89
19	80	71 to 89	
20	100	89 to 112	2
21	-125-	112 to 141	89 to 178
22	160	141 to 178	
23	200	178 to 224	3
24	-250-	224 to 282	178 to 355
25	315	282 to 355	
26	400	355 to 447	4
27	-500-	447 to 563	354 to 709
28	630	563 to 708	
29	800	708 to 892	5
30	-1000-	891 to 1123	707 to 1414
31	1250	1122 to 1413	
32	1600	1412 to 1779	6
33	-2000-	1778 to 2240	1411 to 2822
34	2500	2238 to 2819	
35	3150	2817 to 3549	7
36	-4000-	3547 to 4469	2815 to 5630
37	5000	4465 to 5625	

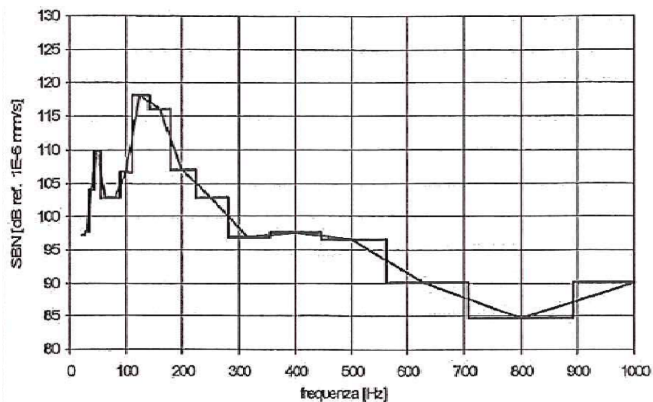
Rappresentazione in bande d'ottava o terzi d'ottava: valore della grandezza in esame assunto costante all'interno di ogni singola banda, sommando i singoli contributi energetici

$$x_{banda} = \sqrt{\sum_{i=k}^{k+N} x_i^2}$$

- N numero di linee spettrali all'interno della banda
- x_i valore dell' i -esima linea spettrale
- k prima linea spettrale interna alla banda

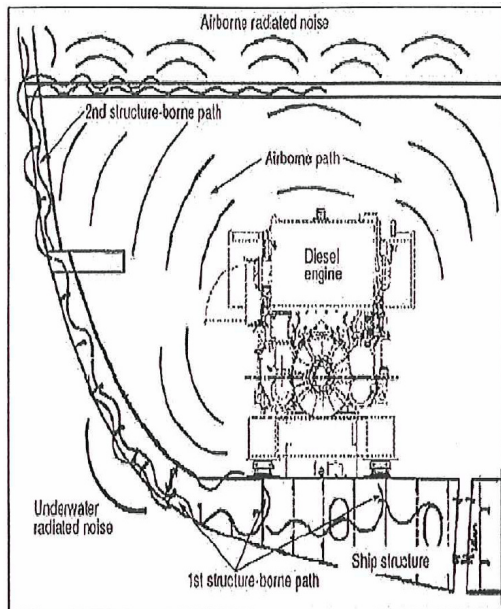
Si perde di vista se il valore ottenuto è frutto di una singola linea spettrale dominante rispetto alle altre interne alla banda o di diverse linee spettrali aventi valori confrontabili, cosa invece evidente nella rappresentazione in banda stretta.



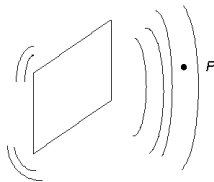


Le fonti di rumore nella nave

- l'elica: durante il suo funzionamento si vengono a creare nel suo intorno flussi irregolari d'acqua che trasferiscono allo scafo forze idrodinamiche pulsanti;
- i condotti dei gas di scarico: questi hanno un'importanza rilevante in quanto, quasi sempre attraversano l'intera sezione della nave;
- il motore principale: l'unità propulsiva costituita dal motore diesel è sicuramente ritenuta la principale fonte di rumore sia aereo che strutturale;
- gearbox: partecipa soprattutto alla generazione di rumore strutturale;
- organi ausiliari: anche se il loro apporto è minore, non bisogna trascurare eventuali pompe, compressori e generatori vari.



Trasformazione del rumore strutturale in rumore aereo



$$W = v^2 S \rho c \sigma$$

- v velocità di vibrazione della superficie
- S superficie
- σ efficienza di irradiazione
- ρc impedenza del mezzo

Con $v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ si arriva alla formula

$$10 \log_{10} \sigma = L_p - L_v + 10 \log_{10} \frac{A}{4S}$$

con

- L_p livello di pressione sonora nello spazio considerato [dB]
- L_v livello di vibrazione della superficie radiante [dB]
- S superficie dell'elemento radiante
- $10 \log_{10} \sigma$ coefficiente di irraggiamento proprio della superficie
- A area assorbente equivalente dell'ambiente

Il livello di pressione sonora in una cabina dovuta ad una superficie vibrante è data da:

$$L_p = L_v + 10 \log_{10} \frac{S}{S_0} + 10 \log_{10} \sigma - 10 \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

con

- L_p livello di pressione sonora nello spazio considerato [dB] con un riferimento pari a $2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$
- L_v livello di vibrazione della superficie radiante [dB] con un riferimento pari a $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$
- $S_0 = 1 \text{ m}^2$ superficie di riferimento dell'elemento radiante
- $A_0 = 4 \text{ m}^2$ area assorbente equivalente di riferimento dell'ambiente

Esteso a tutte le sei pareti:

$$L_{p,c} = 10 \log_{10} \left(10^{0,1L_{p,1}} + 10^{0,1L_{p,2}} + \dots + 10^{0,1L_{p,6}} \right)$$

Ricordando che

$$A = 0.163 \frac{V_s}{T}$$

con V_s volume dello spazio considerato e $T = 0.4 \div 0.6$ s tempo di riverbero per cabine tipo:

$$L_p = L_v + 10 \log_{10} \sigma - 10 \log_{10} \left(\frac{4S}{0.163 V_s} T \right)$$

L_p dipende da:

- L_v , che decade di circa:
 - $3 \div 5$ dB ad ogni ponte
 - 0.5 dB ad ogni ossatura
- presenza di *floating floor* e viscoelastico che riduce L_v
- superficie degli elementi vibranti
- caratteristiche geometriche del locale di ascolto
- caratteristiche fonoassorbenti del locale di ascolto
- tipo di materiale delle superfici irradianti (coefficiente di irraggiamento).

Un tempo di riverbero T più alto implica un livello di pressione L_p più alto e viceversa. Pertanto per diminuire L_p devo aumentare l'assorbimento.

Ciò significa che per diminuire il livello di rumore ad esempio in una cabina situata a poppa e al di sopra della sala macchina è necessario, ma molte volte non sufficiente:

- diminuire il livello di vibrazioni strutturali
- aumentare l'assorbimento nella cabina medesima.

Attenuazione in direzione longitudinale

Attenuazione del rumore strutturale in direzione longitudinale:

- dipende dalla distanza più corta tra la cabina interessata e la sorgente di rumore strutturale
- espressa in numero di ordinate (*DISH*).

L'attenuazione ($ATTH$) dipende dal tipo di nave e dal tipo di sorgente e viene divisa in due parti:

- per le prime 10 ordinate più vicine dalla sorgente ($ATTHOR1$)

$$ATTH = DISH \cdot ATTHOR1$$

- per le distanze più lunghe ($ATTHOR2$)

$$ATTH = 10 \cdot ATTHOR1 + (DISH - 10) \cdot ATTHOR2$$

Attenuazione in direzione verticale

L'attenuazione in direzione verticale $ATTV$ è una combinazione di:

- attenuazione per ponte, a partire dalla sorgente fino alla parte più elevata dello scafo ($ATTVER1$)

$$ATTV = n \cdot ATTVER1$$

n numero di ponti tra la sorgente e la cabina ricevente

- attenuazione per ponte nella *deckhouse* ($ATTVER2$)

$$ATTV = n \cdot ATTVER1 + ATTVER0 + m \cdot ATTVER2$$

n numero di ponti tra la sorgente e il ponte più basso della *deckhouse*, m ponti intermedi nella *deckhouse*

- per alcuni tipi di nave, un'extra attenuazione passando dalla struttura più bassa dello scafo alla *deckhouse* ($ATTVER0$).

Attenuazione combinata

L'attenuazione totale è la combinazione tra quella in direzione verticale e quella in direzione longitudinale:

$$ATTT = \sqrt{ATTV^2 + ATTH^2}$$

Trasmissione del rumore strutturale

$$L_{a,ponte} == L_{a,sorgente} - IL - \Delta L_a - ATTT$$

- L_a livello di rumore strutturale
- IL insertion loss, cioè attenuazione del rumore strutturale attraverso i resilienti (se presenti)
- ΔL_a funzione di trasferimento lungo la direzione trasversale della nave

Parameter		Frequencies					
		63	125	250	500	1000	2000
Propeller	<i>ATTHOR1</i>	0.3	0.3	0.4	0.6	0.6	0.7
	<i>ATTHOR2</i>	0.3	0.3	0.4	0.6	0.6	0.7
	<i>ATTVER1</i>	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	<i>ATTVER2</i>	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	4.0
	<i>ATTVER0</i>	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

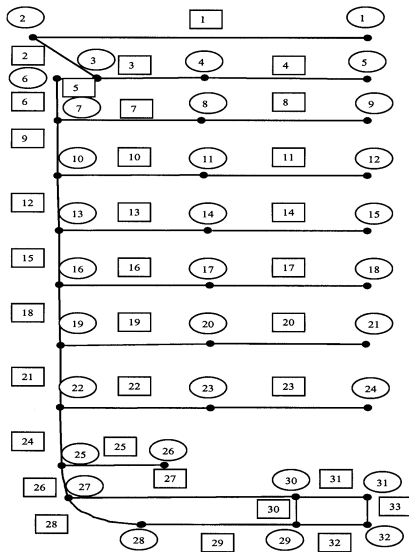
Parameter		Frequencies					
		63	125	250	500	1000	2000
Low speed diesel engine	<i>ATTHOR1</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	<i>ATTHOR2</i>	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
	<i>ATTVER1</i>	0.5	0.4	2.8	4.3	4.0	4.2
	<i>ATTVER2</i>	1.0	2.5	3.0	3.2	3.8	4.0
	<i>ATTVER0</i>	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

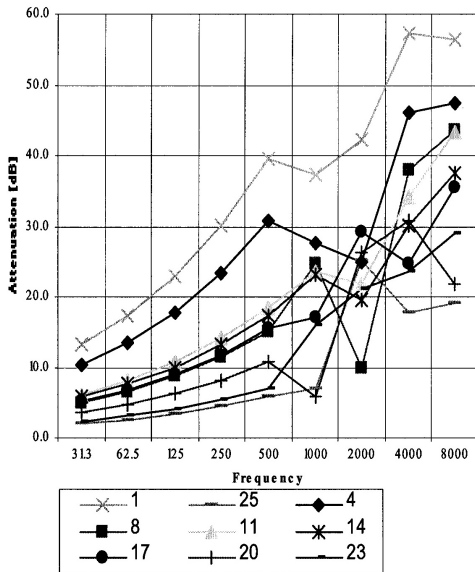
Parameter		Frequencies					
		63	125	250	500	1000	2000
Diesel generator sets	<i>ATTHOR1</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	<i>ATTHOR2</i>	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
	<i>ATTVER1</i>	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0
	<i>ATTVER2</i>	1.0	2.5	3.0	3.0	3.5	4.0
	<i>ATTVER0</i>	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Parameter		Frequencies					
		63	125	250	500	1000	2000
Propeller	<i>ATTHOR1</i>	0.3	0.3	0.4	0.6	0.6	0.7
	<i>ATTHOR2</i>	0.3	0.3	0.4	0.6	0.6	0.7
	<i>ATTVER1</i>	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	<i>ATTVER2</i>	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	4.0
	<i>ATTVER0</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

			Parameter	Frequencies					
				63	125	250	500	1000	2000
Medium speed diesel engine, diesel gen. sets, gear boxes			<i>ATTHOR1</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
			<i>ATTHOR2</i>	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
			<i>ATTVER1</i>	0.5	0.4	2.8	4.3	4.0	4.2
			<i>ATTVER2</i>	1.0	2.5	3.0	3.2	3.8	4.0
			<i>ATTVER0</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

		Parameter	Frequencies					
			63	125	250	500	1000	2000
Low speed	diesel engine	<i>ATTHOR1</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		<i>ATTHOR2</i>	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
		<i>ATTVER1</i>	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0
		<i>ATTVER2</i>	1.0	2.5	3.0	3.0	3.5	4.0
		<i>ATTVER0</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0





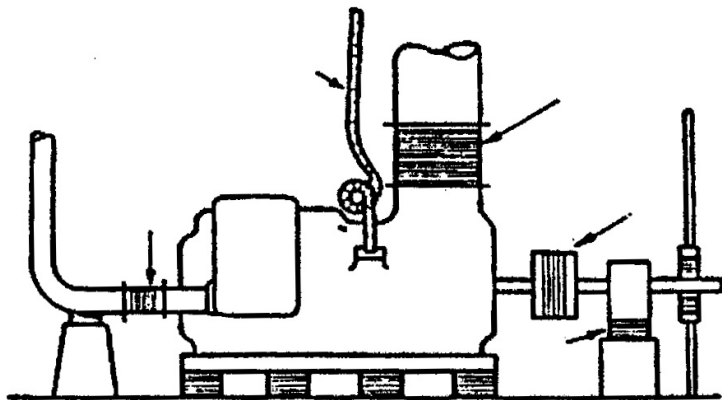
Soluzioni di insonorizzazione

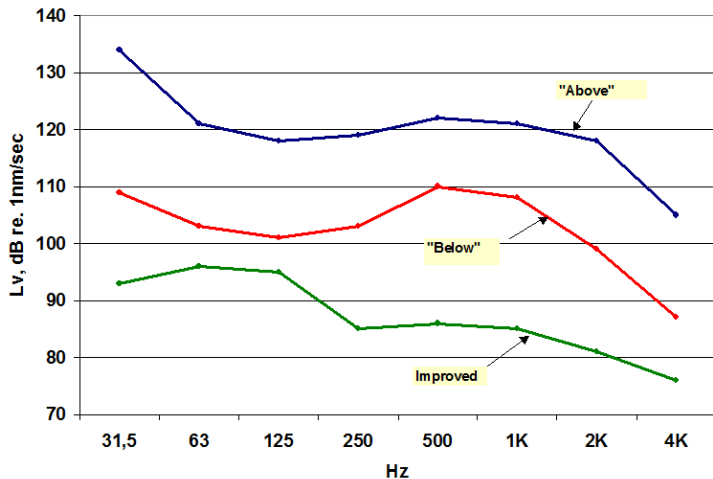
	Rumore aereo	Rumore strutturale
	Fonoisolamento	Attenuazione della trasmissione per via solida
Riflessione di energia	Massa Pareti semplici Pareti doppie Pareti multiple	Supporti elastici Strati elastici
	Fonoassorbimento	Smorzamento
Dissipazione di energia (trasformazione di energia acustica in calore)	Materiali porosi Schiume Pannelli forati	Ammortizzatori Strati smorzanti semplici Strati smorzanti con irrigiditori

Riduzione del rumore strutturale

Riduzione di rumore strutturale → attraverso lo smorzamento:

- direttamente sulle sorgenti (grossi impianti):
 - sottobasi:
 - stessi materiali della struttura scafo (acciaio)
 - non fare coincidere le frequenze proprie della struttura nave con il motore
 - resilienti: elementi elastici (in gomma) tra motore e scafo, collegamento con flessibili di tutti i tubi
- sulle superfici irradianti si variano le caratteristiche delle superfici di irraggiamento

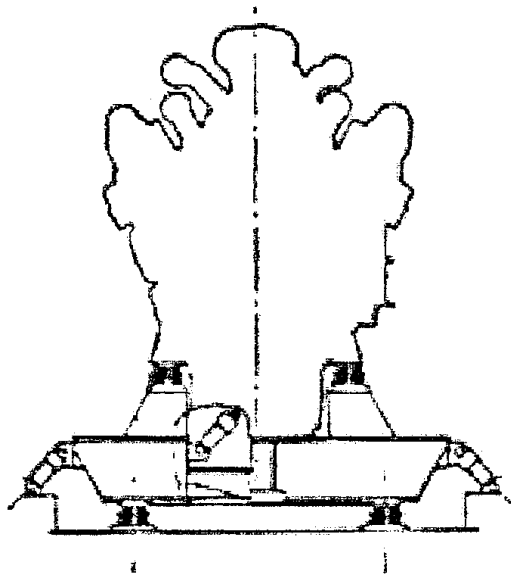


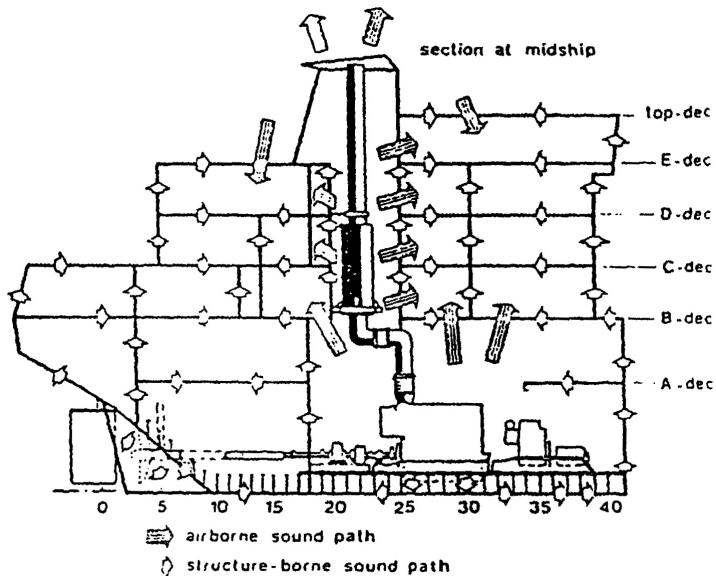


Sospensione elastica a gradi di risonanza elevati:

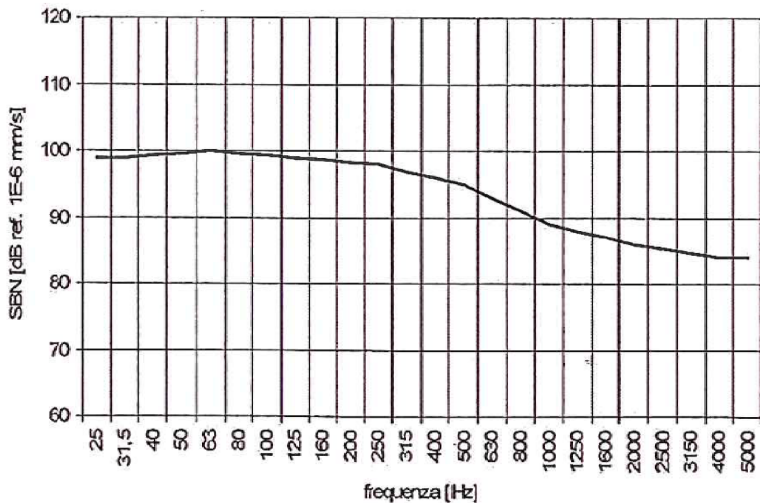
- tranquillizzazione dinamica del motore
- ridotta trasmissibilità delle forze eccitanti alla fondazione
- ridotta trasmissibilità delle azioni eccitanti ad alta frequenza con la conseguente riduzione del rumore strutturale

Qualora ciò non fosse sufficiente si utilizza la sistemazione su doppia sospensione elastica ($30 \div 40$ dB)

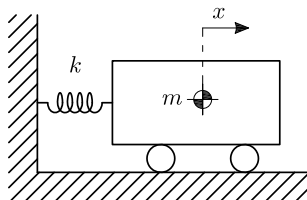




Limiti del rumore



Impedenza meccanica



$$m\ddot{x} + kx = F$$

$$x = Xe^{j\omega t}$$

$$F = F_0 e^{j\omega t}$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega x$$

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = (j\omega)^2 X e^{j\omega t} = j\omega \dot{x}$$

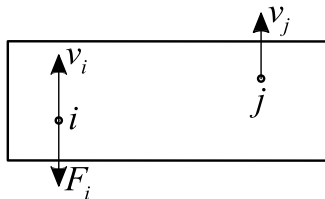
$$v = j\omega x = \frac{a}{j\omega}$$

Impedenza meccanica (corrispettivo dinamico della rigidità):

$$Z = \frac{F}{v}$$

Mobilità meccanica (corrispettivo dinamico della deformabilità):

$$M = Z^{-1} = \frac{v}{F}$$



- Impedenza diretta:

$$Z_{ii} = \frac{F_i}{v_i}$$

- Impedenza di trasferimento:

$$Z_{ij} = \frac{F_i}{v_j}$$

Impedenza dei parametri concentrati

Per una molla lineare di rigidezza statica k

$$x = \frac{F}{k} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{k} = X_0 e^{j\omega t}$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{j\omega F_0 e^{j\omega t}}{k}$$

$$Z_k = \frac{F}{v} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{j\omega F_0 e^{j\omega t}} k = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

Per una massa ideale m

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{m}$$

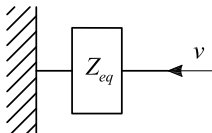
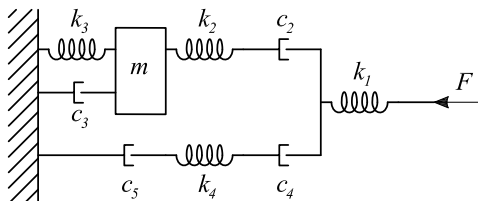
$$v = \dot{x} = \int \ddot{x} dt = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{j\omega m}$$

$$Z_M = \frac{F}{v} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{F_0 e^{j\omega t}} j\omega m = j\omega m$$

Smorzatore ideale viscoso:

$$v = \frac{F}{c} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{c}$$

$$Z_c = \frac{F}{v} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{F_0 e^{j\omega t}} c = c$$



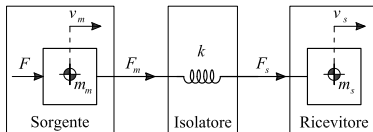
N impedenze in serie:

$$\frac{1}{Z_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$$

N impedenze poste in parallelo:

$$Z_p = \sum_{i=1}^N Z_i$$

Modello a 2 gradi di libertà

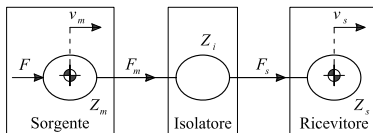


- ❶ una sorgente
- ❷ un isolatore
- ❸ un ricevitore

$$\begin{cases} M_M \ddot{x}_m + k(x_m - x_s) = F \\ M_S \ddot{x}_s + k(x_s - x_m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_M j\omega v_m + \frac{k}{j\omega} (v_m - v_s) = F \\ M_S j\omega v_s + \frac{k}{j\omega} (v_s - v_m) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} Z_M v_m + Z_I (v_m - v_s) = F \\ Z_S v_s + Z_I (v_s - v_m) = 0 \end{cases}$$

Le equazioni del sistema valgono per un modello generale nel quale le impedenze possono inglobare masse, rigidezze e smorzamenti a seconda del caso in esame.



$$\frac{v_s}{v_m} = \frac{Z_i}{Z_i + Z_s}$$

Ipotizzando che l'impedenza dell'isolatore sia trascurabile all'impedenza della fondazione, o meglio che l'isolatore abbia una mobilità molto maggiore rispetto a quella della struttura ricevente:

$$v_s \simeq v_m Z_i \frac{1}{Z_s}$$

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} \frac{v_s}{v_0} &= 20 \log_{10} \left(\frac{v_m}{v_0} \cdot \frac{Z_I}{Z_0} \cdot \frac{Z_0}{Z_s} \right) = \\ &= 20 \log_{10} \frac{v_m}{v_0} + 20 \log_{10} \frac{Z_I}{Z_0} + 20 \log_{10} \frac{M_s}{M_0} \end{aligned}$$

dove $v_0 = 10^{-9} \text{ m/s}$, $Z_0 = 1 \text{ Ns/m}$ e $M_0 = 1 \text{ m/Ns}$. Quindi in decibel si ha:

$$L_{v_s} = L_{v_m} + L_{Z_I} + L_{M_s}$$

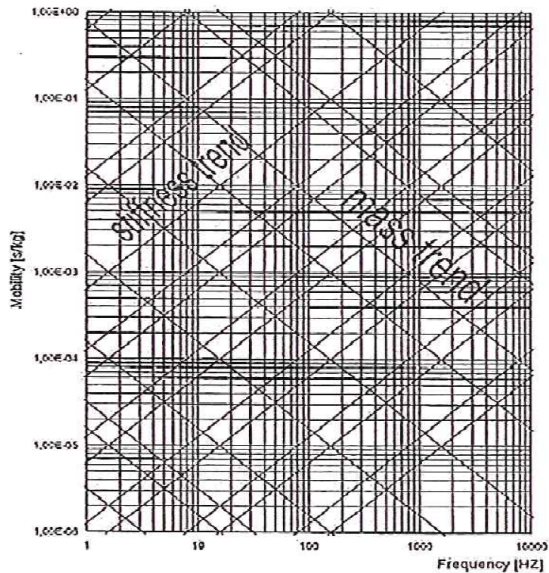
Mobilità meccanica

Mobilità [s/kg] o [m/Ns] : funzione di risposta in frequenza data dal rapporto tra la risposta del punto j , espressa in termini di velocità all'eccitazione del punto i e la forza eccitante stessa

$$M_{ij} = \frac{v_j}{F_i}$$

$$L_m = 20 \log_{10} \frac{M}{M_0}$$

dove M è la mobilità del sistema e $M_0 = 1 \text{ m/Ns}$ è la mobilità di riferimento.



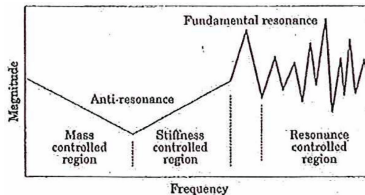


Figura: Mobilità diretta di una massa sospesa

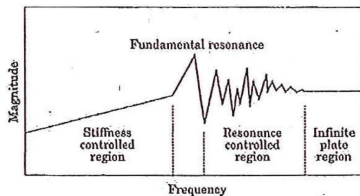
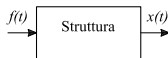


Figura: Mobilità diretta di una fondazione

Fondamenti per la determinazione sperimentale della mobilità di un sistema



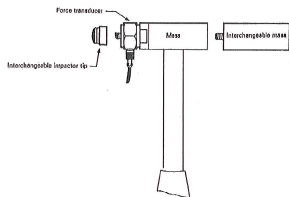
Funzione di risposta in frequenza:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

Spostamento	$\frac{x}{F}$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{N}}\right]$	compliance
Velocità	$\frac{v}{F}$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{Ns}}\right]$	mobility
Accelerazione	$\frac{a}{F}$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{Ns}^2}\right]$	accelerance

Per poter stimare sperimentalmente le funzioni di risposta, la struttura deve essere eccitata da una forza dinamica la cui entità sia misurabile:

- shaker (elettrodinamico o elettro-idraulico), appartiene alla categoria dei sistemi di eccitazione fissi
- martello strumentato (sistemi di eccitazione non fissi), un semplice martello alla cui estremità è presente un trasduttore di forza piezoelettrico, non facile ripetibilità dell'impulso trasmesso.



Livello di rumore strutturale sulle fondazioni

Facendo l'ipotesi che l'impedenza del supporto sia trascurabile rispetto all'impedenza della fondazione:

$$\frac{v_s}{v_m} = \frac{Z_I}{Z_s}$$

$$20 \log_{10} \left(\frac{v_s}{v_m} \cdot \frac{v_0}{v_0} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{Z_I}{Z_s} \cdot \frac{Z_0}{Z_0} \right)$$

$$20 \log_{10} \frac{|v_s|}{v_0} = 20 \log_{10} \frac{|v_m|}{v_0} + 20 \log_{10} \frac{|Z_I|}{Z_0} + 20 \log_{10} \frac{|M_S|}{M_0}$$

$$L_{v_s} = L_{v_m} + L_{Z_I} + L_{M_S}$$

Livello di mobilità del sistema sospeso elasticamente

$$L_{v_m} = 20 \log_{10} \frac{|v_m|}{v_0}$$

dove v_m è la velocità di un punto del sistema e $v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ è la velocità presa come riferimento.

$$L_{v_m} = L_{a_m} - 20 \log_{10} \frac{f}{31.8}$$

con f frequenza in hertz.

Livello di impedenza di trasferimento del supporto

Livello di impedenza dell'isolante:

$$L_{Z_I} = 20 \log_{10} \frac{|Z_I|}{Z_0}$$

dove Z_I è l'impedenza di trasferimento, definita come il rapporto tra la forza dinamica esercitata dal supporto su una struttura infinitamente rigida, detta forza bloccata, e la velocità del sistema sospeso valutata nel punto di contatto con il supporto.

Z_0 invece è l'impedenza di riferimento ed è pari a 1 Ns/m .

L'impedenza calcolata in questo modo è l'unica grandezza che è in grado di definire in modo completo le caratteristiche di un supporto in gomma.

Livello di mobilità della fondazione

Livello di mobilità della fondazione:

$$L_{M_S} = 20 \log_{10} \frac{|M_S|}{M_0}$$

con M_S mobilità del sistema in esame e $M_0 = 1 \text{ m/Ns}$ mobilità di riferimento.

Livello di vibrazione in una generica cabina:

$$20 \log_{10} \frac{|v_m|}{v_0} = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} - 10 \log_{10} \sigma + 10 \log_{10} \frac{4S}{0.163} T$$

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} \frac{|v_m|}{v_0} &= 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} - 10 \log_{10} \sigma + \\ &+ 20 \log_{10} \frac{|Z_I|}{Z_0} + 20 \log_{10} \frac{|M_S|}{M_0} + A_{TTT} \end{aligned}$$

Si è esplicitata l'equazione del rumore strutturale come funzione di cinque termini:

- ① $L_p = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0}$ livello di pressione
- ② $10 \log_{10} \sigma$ coefficiente di irraggiamento proprio della superficie, dipendente dalle caratteristiche del materiale da cui è costituito il motore o la lamiera in vibrazione
- ③ $10 \log_{10} \frac{4S}{0.163} T$ dipendente dalle dimensioni della superficie vibrante e dalle dimensioni e dalle caratteristiche di assorbimento dell'ambiente confinante
- ④ $20 \log_{10} \frac{|Z_I|}{Z_0}$ impedenza del supporto elastico, che varia al variare del supporto stesso
- ⑤ $20 \log_{10} \frac{|M_S|}{M_0}$ mobilità della fondazione.

Effetti sospensione elastica dimensionata:

- tranquillizzazione dinamica del motore;
- riduzione della trasmissibilità delle forze eccitanti alla fondazione;
- riduzione della trasmissibilità delle azioni eccitanti ad alta frequenza con la conseguente riduzione del rumore strutturale

Trasmissibilità delle vibrazioni

La trasmissibilità T_f (rapporto tra la forza trasmessa F_r alle fondazioni e la forza applicata alla massa sospesa F_e) è la misura dell'efficacia di una sospensione elastica:

$$T_f = \frac{F_r}{F_e} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

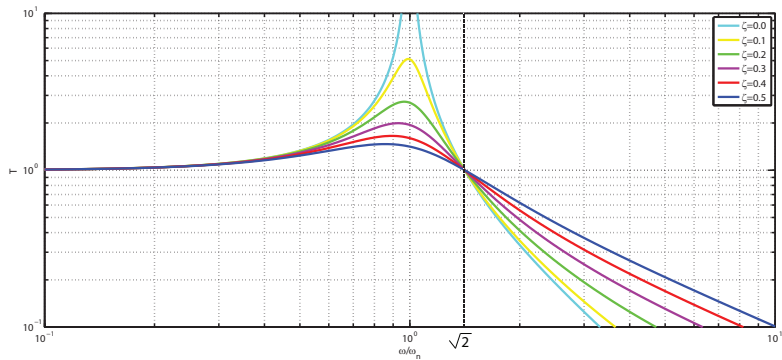
con $\xi = c/c_c$ rapporto di smorzamento e $c_c = 4\pi m f_n$ smorzamento critico.

La trasmissibilità alla risonanza è chiamata *fattore Q* ed è pari a

$$Q = \sqrt{\frac{1 + (2\xi)^2}{(2\xi)^2}}$$

Quando ξ è piccolo

$$Q \simeq \frac{1}{2\xi}$$



- Quando $r < \sqrt{2}$ ed in particolare quando la frequenza naturale è più grande della frequenza eccitante, non c'è attenuazione ma amplificazione delle vibrazioni. In questo caso le sospensioni elastiche sono pericolose.
- Quando $r > \sqrt{2}$ le vibrazioni sono attenuate.

Il vantaggio si ha quando la frequenza naturale della sospensione è minore della frequenza dell'eccitante. A basse velocità deve essere trovata una soluzione più complessa, per esempio un ammortizzatore di vibrazioni dinamico o una sospensione con frequenza naturale molto bassa.

- Quando $r < \sqrt{2}$ ed in particolare nella zona di risonanza, lo smorzamento riduce la trasmissibilità
- Quando $r > \sqrt{2}$ (zona di attenuazione) lo smorzamento aumenta la trasmissibilità

Da 100 Hz in poi si hanno discrepanze perché

- 1 motore e fondazioni possono avere risonanze strutturali locali nel campo di frequenze acustiche
- 2 la rigidità dinamica dei supporti in gomma non è costante, incrementa con l'aumentare delle frequenze
- 3 a frequenze sufficientemente elevate, la massa e l'elasticità distribuita del supporto stesso, tendono sostanzialmente ad aumentare la trasmissibilità.

Velocità di vibrazione nel punto di applicazione della forza:

$$v = MF$$

Indicando con F_{F_e} la forza trasmessa alle fondazioni dalla stessa macchina sospesa elasticamente, si definisce l'efficacia di una sospensione elastica ε il rapporto

$$\varepsilon = \frac{F_{F_r}}{F_{F_e}}$$

Se il supporto elastico è considerato privo di massa:

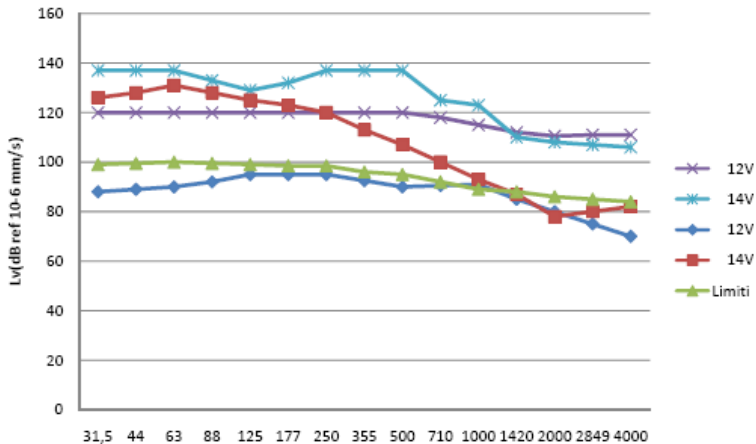
$$\varepsilon = \frac{M_E + M_I + M_F}{M_E + M_F}$$

nella quale M_E , M_I e M_F sono rispettivamente le mobilità della macchina, del supporto e della fondazione.

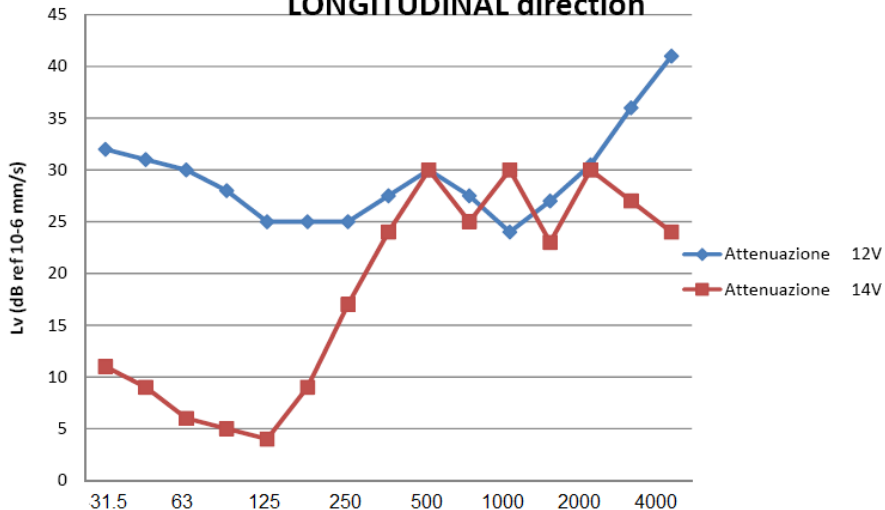
Efficacia: inverso della trasmissibilità. In applicazioni con motori Diesel M_E può essere trascurato rispetto a M_F :

$$\varepsilon = \frac{M_I + M_F}{M_F} = \frac{v_2}{v_1}$$

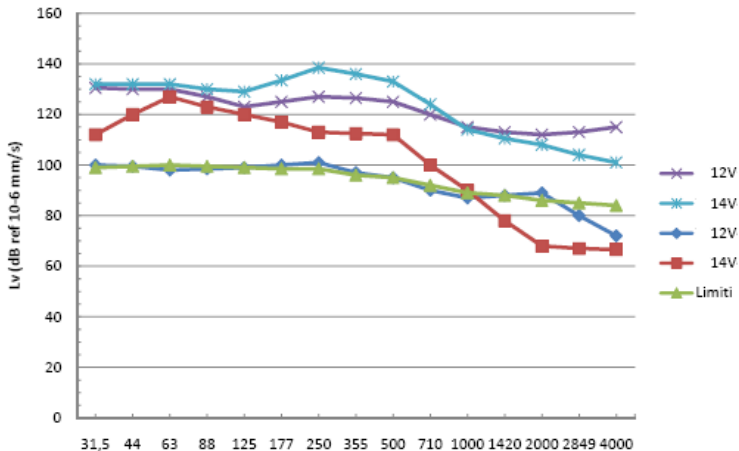
Structure-borne noise LONGITUDINAL direction



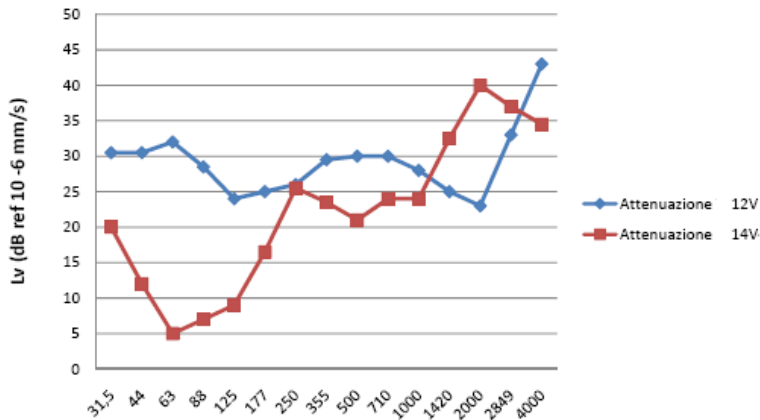
Attenuazione resiliente LONGITUDINAL direction



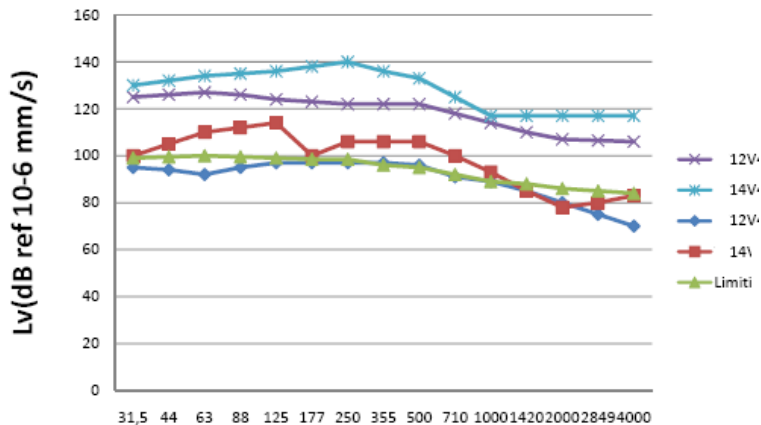
STRUCTURE-BORNE NOISE TRASVERSAL direction



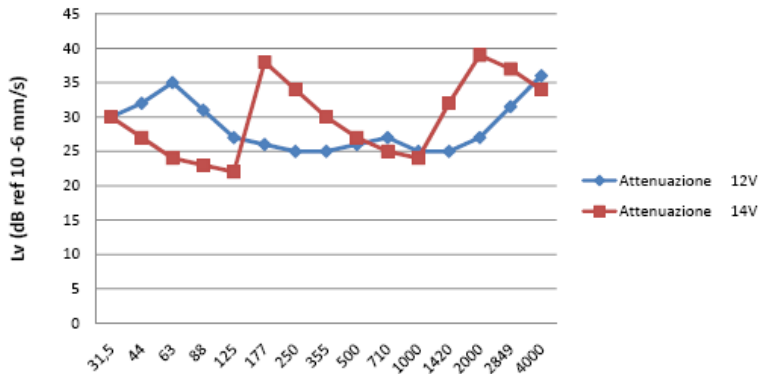
Attenuazione resiliente TRASVERSAL direction



Structure-borne noise VERTICAL direction below



Attenuazione resiliente VERTICAL direction



Scelta della sospensione

- Sospensioni a basse frequenze (10 Hz e meno), per macchinari che hanno una frequenza costante come i motori. Si sceglie una sospensione con una frequenza naturale minore di quella dell'eccitante, $r = f_e/f_n$ tra 2 e 4.
- Sospensioni a frequenze medie (da 10 a 30 Hz), per motori ad alte velocità di rotazione (da 1800 a 3000 rpm) o macchinari operanti a varie velocità (comunque con rpm superiori a 1000) ed aventi uno spettro delle vibrazioni molto largo
- Sospensioni con frequenze variabili, contemporaneamente efficienti a basse e medie frequenze. La frequenza naturale delle sospensioni si auto regola in maniera conforme alle esigenze del motore.

Supporti

Supporti in gomma usati per le seguenti caratteristiche:

- molteplici forme e a parità di forma possono avere caratteristiche differenti secondo il tipo di gomma utilizzata, libertà di scelta in fase di progetto
- ottimo smorzamento interno;
- elevato grado di isolamento interno della rumorosità strutturale
- elevata capacità di carico con dimensioni e pesi limitati

Aspetti negativi:

- caratteristiche fisiche variabili in relazione al processo produttivo e decadenti nel tempo;
- rigidità e smorzamento variabili sensibilmente in funzione della frequenza e dell'ampiezza delle vibrazioni;
- deflessione statica crescente nel tempo (*creep*);
- la gomma può essere danneggiata dal contatto prolungato con olio di lubrificazione o nafta.

Tipi di collegamento flessibili

Affinché l'isolamento di una sospensione elastica sia efficace occorre che le connessioni tra la massa sospesa e lo scafo, come ad esempio quelle dei tubi dei fluidi di servizio, dello scarico gas e simili, abbiano una sufficiente mobilità:

- realizzare tutte le connessioni con elementi flessibili di adeguata lunghezza e opportunamente sagomati;
- collegare le estremità dei flessibili sulla massa sospesa ed a scafo in punti a bassa mobilità.

I flessibili dei fluidi di servizio sono realizzati in gomma rinforzata od in metallo a seconda del tipo di fluido e delle temperature di esercizio.

Per trasmettere la coppia motrice al riduttore ed alla linea d'assi vengono impiegati giunti flessibili con elementi elastici realizzati in gomma, oppure in metallo.

Trasmissibilità del rumore strutturale

Insertion loss:

$$IL = L_{v_1}(c) - L_{v_2}(c)$$

- L_{v_1} livello di rumore strutturale nel punto di ricezione finale causato dalla sorgente prima dell'inserimento del sistema di sospensione
- L_{v_2} livello di rumore strutturale nel punto di ricezione finale causato dalla sorgente dopo l'inserimento del resiliente

$$IL = 20 \log_{10} \left| \frac{M_E + M_I + M_F}{M_E + M_F} \right| \text{ dB}$$

IL elevato significa mobilità dell'isolatore elevata (resiliente più soffice) e mobilità di macchinario e fondazione basse (struttura più rigida).

Transmission loss

$$TL = \Delta L = 20 \log_{10} \frac{v_1}{v_2}$$

- v_1 velocità di vibrazione sopra i resilienti
- v_2 velocità di vibrazione sotto i resilienti

La Transmission Loss è misurabile e fornisce importanti informazioni sul comportamento strutturale.

Se $M_E \ll M_F$, cioè se la mobilità della sorgente è molto inferiore alla mobilità delle fondazioni

$$TL == \Delta L = 20 \log_{10} \left| \frac{v_1}{v_2} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{M_I + M_F}{M_F} \right| = IL$$

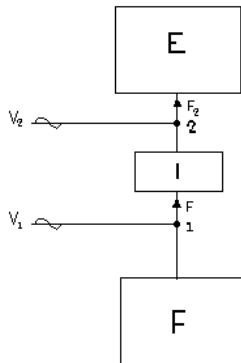
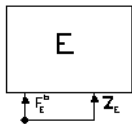
Caratteristiche di risposta

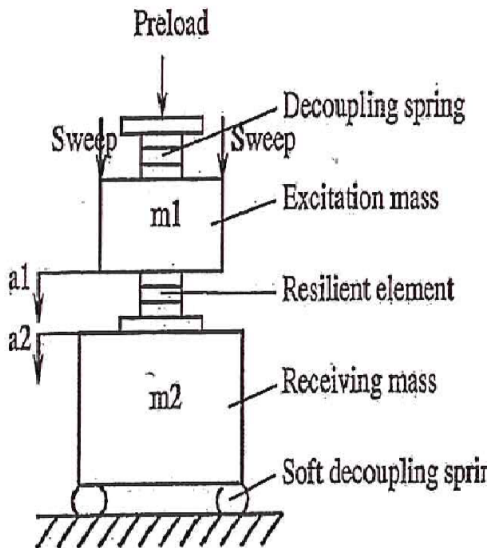
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_I}{Z_I + Z_F} = \frac{M_F}{M_I + M_F}$$

L'impedenza è un numero complesso in quanto definito dal rapporto di due quantità F e v complesse. Le caratteristiche elastiche e di smorzamento dei supporti di gomma sono complesse in quanto il loro comportamento dinamico dipende dal carico, dalla frequenza e dalla forma.

Per caratterizzare un supporto elastico in gomma si rileva la sua impedenza di trasferimento per il supporto bloccato in funzione della frequenza. Tale rilievo viene eseguito interponendo il supporto tra una massa di eccitazione ed una di bloccaggio, caricate tra due supporti più soffici.

Il sistema contenente la sorgente di potenza è caratterizzato da una forza F_E^b , chiamata forza di blocco, definita come la forza all'uscita del sistema quando questo è collegato ad un corpo di impedenza infinitamente grande, e da un'impedenza puntuale Z_E .





Trasmissibilità di forze modificata

Il valore $(T_F)_{E_1}$ è detto trasmissibilità modificata in quanto non è il rapporto di due forze che esistono simultaneamente.

$$(T_F)_{E_1} = \frac{F_1}{F_E^b} = \frac{Z_{12}^b}{\frac{Z_1^{2b}}{Z_F} (Z_E + Z_2^{1f}) + Z_E + Z_2^{1b}}$$

- Z_{12}^b è l'impedenza di trasferimento del supporto calcolata con la massa bloccata;
- Z_1^{2b} è l'impedenza di punto del supporto valutata nel punto 1 con il punto 2 vincolato ad una massa con impedenza infinitamente grande;
- Z_2^{1f} è l'impedenza di punto del supporto valutata nel punto 2 con il punto 1 libero
- Z_2^{1b} è l'impedenza di punto del supporto valutata nel punto 2 con il punto 1 vincolato ad una massa con impedenza infinitamente grande;

Se il supporto è di massa trascurabile, tutte le impedenze sono uguali e vengono rappresentate con Z_1 , mentre l'impedenza di un punto valutata con il punto libero è nulla:

$$(T_F)_{E_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_E \left(1 + \frac{Z_1}{Z_F}\right)} = \frac{M_E}{M_I + M_F + M_E}$$

dove Z_E è l'impedenza del sistema nel punto 2 e M_E è la mobilità del sistema nel punto 2.

Risposta della fondazione

Se si indica con v_1 la velocità della fondazione

$$v_1 = \frac{F_1}{Z_F}$$

dove Z_F è l'impedenza della fondazione e F_1 è la forza applicata dal supporto isolante alla fondazione stessa.

Dato che $(T_F)_{E_1} = \frac{F_1}{F_E^b}$, la velocità della fondazione si può scrivere come

$$v_1 = \frac{F_E^b}{Z_F} (T_F)_{E_1}$$

$$F_E^b = Z_E v_E^f$$

dove Z_E è l'impedenza puntuale del sistema misurata nel punto 2, F_E^b è la forza trasmessa ad un corpo di impedenza molto grande collegato alla sorgente e v_E^f è la velocità di vibrazione della sorgente quando non è collegata ad altri corpi.

$$\frac{v_1}{v_E^f} = \frac{Z_E}{Z_F} (T_F)_{E_1}$$

$$v_1 = \frac{Z_I}{Z_I + Z_F \left(1 + \frac{Z_I}{Z_E}\right)} v_E^f$$

Risposta del sistema sospeso

La velocità v_E^f del sistema esistente prima del collegamento con il supporto isolante, è diversa dalla velocità v_2 che si ha con supporto attaccato, perché il sistema isolante non è rigido.

$$\frac{v_2}{v_E^f} 1 - (T_F)_{E_1} = \frac{Z_I + Z_F}{Z_I + Z_F \left(1 + \frac{Z_I}{Z_E}\right)}$$

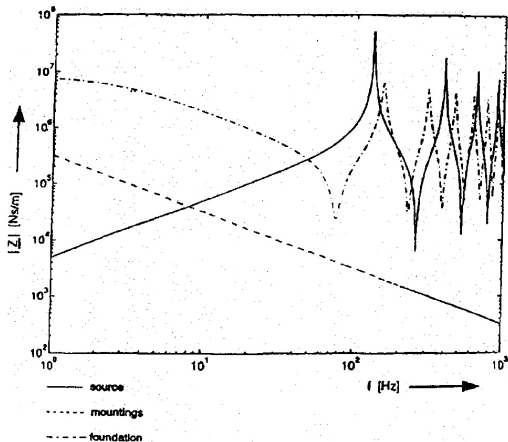
$$v_2 = \frac{Z_I + Z_F}{Z_I + Z_F \left(1 + \frac{Z_I}{Z_E}\right)} v_E^f$$

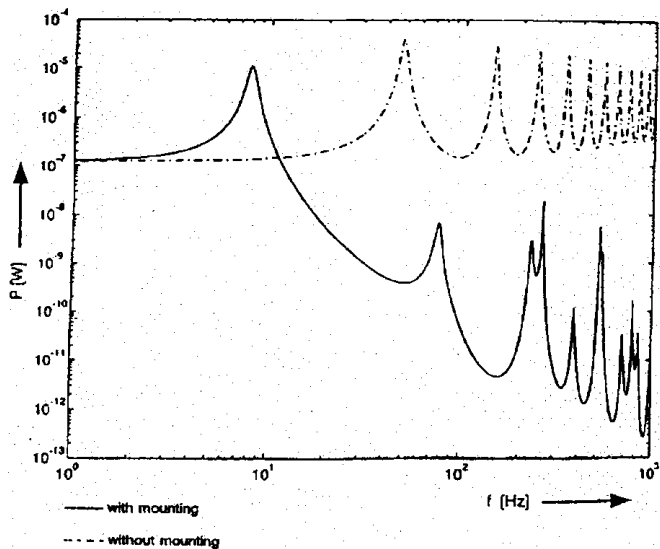
Influenza dell'impedenza sulla trasmissione delle vibrazioni

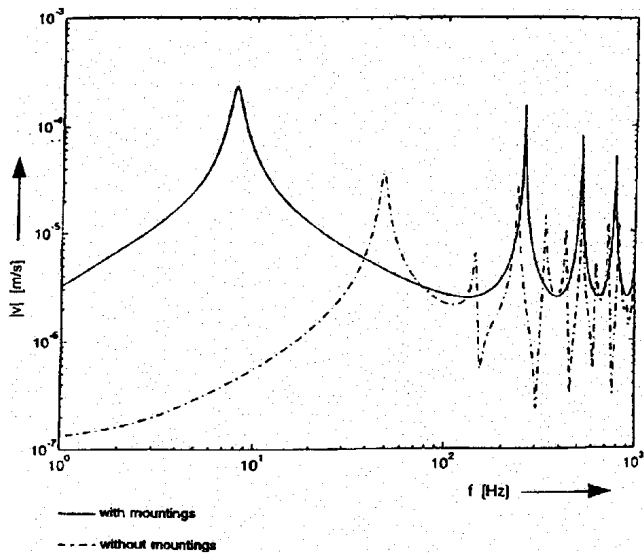
Tre differenti casi:

- ① alta impedenza su entrambi i lati del supporto (situazione ideale)
- ② sorgente di bassa impedenza
- ③ fondazione di bassa impedenza.

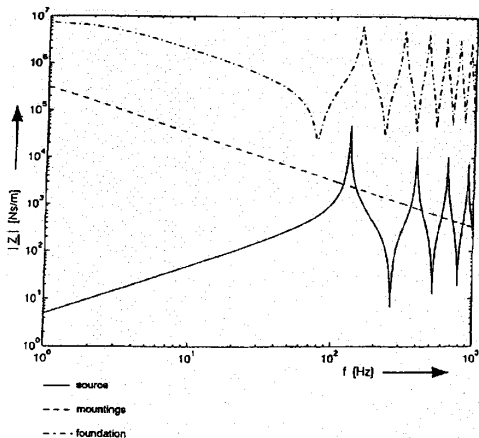
Alta impedenza su entrambi i lati del supporto

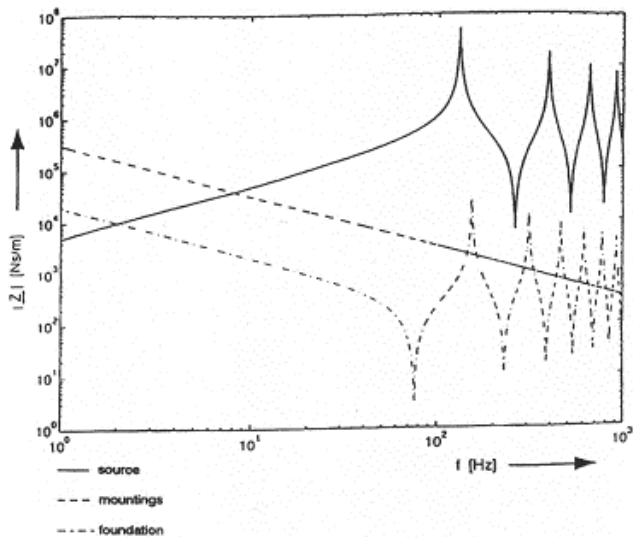


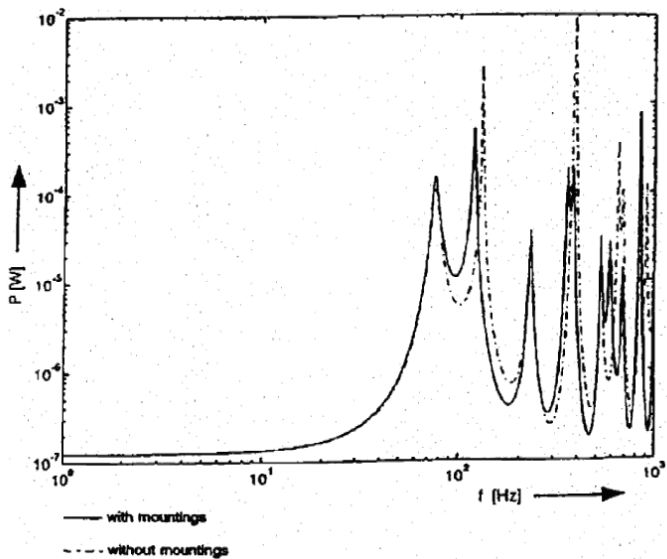




Sorgente di bassa impedenza







Acustica

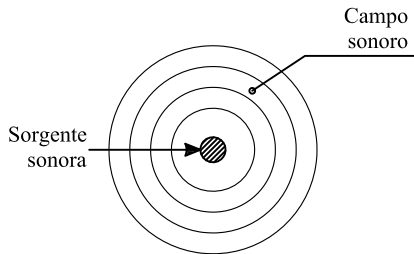
ACUSTICA

Generalità

Suono: rapida variazione di pressione (compressione e rarefazione) intorno al valore assunto dalla pressione atmosferica in quel punto.

Sorgente sonora: dispositivo, apparecchio o altro che provochi direttamente o indirettamente (ad esempio per percussione) dette variazioni di pressione

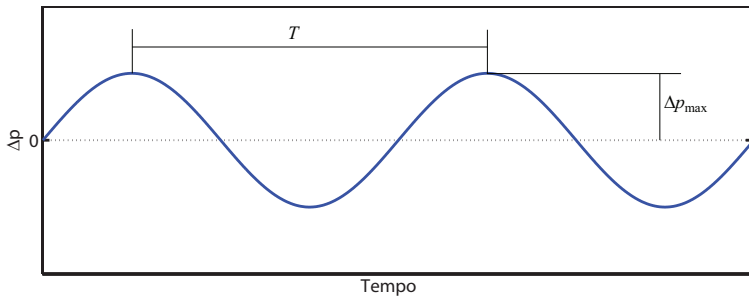
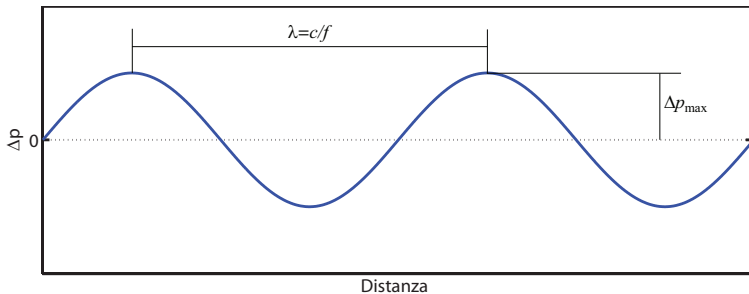
Campo sonoro: porzione di spazio interessata da tali variazioni di pressione



Propagazione e udibilità:

- presenza di un mezzo elastico (nel vuoto non c'è propagazione sonora)
- variazione di pressione nel mezzo intorno ad un valore di equilibrio (es. pressione atmosferica)
- frequenza $20 \div 20\,000\text{ Hz}$
- contenuto energetico superiore ad una soglia minima
 $p > 2 \cdot 10^{-5}\text{ Pa}$

Lunghezza d'onda λ (del suono nel mezzo considerato): distanza che intercorre tra due successive compressioni, o rarefazioni.

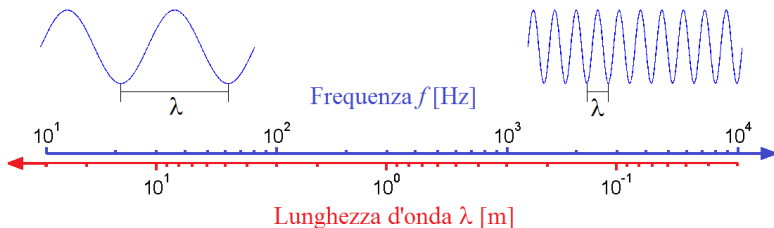


$$f = \frac{1}{T}$$

$$c = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

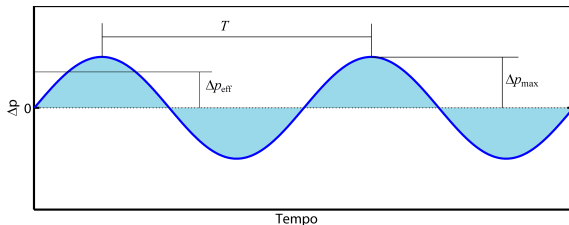


Lunghezza d'onda udibile: da 20 mm (a 18 kHz) a circa 17 m (a 20 Hz)

Le variazioni di pressione sono positive (compressione) e negative (rarefazione), pertanto non si può ricorrere al loro valore medio che risulterebbe nullo.

Pressione sonora efficace:

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \Delta p^2 d\tau}$$



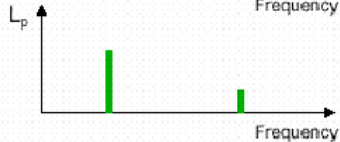
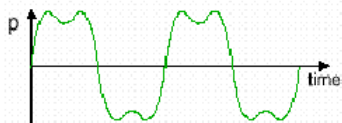
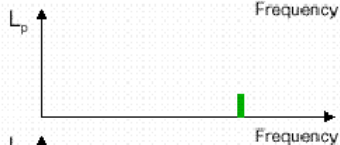
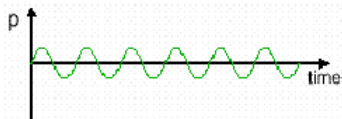
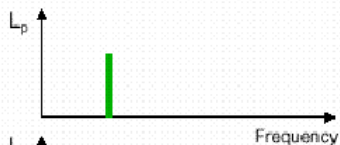
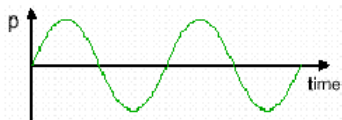
Tono puro: suono corrispondente ad una variazione perfettamente sinusoidale della pressione con un'unica frequenza

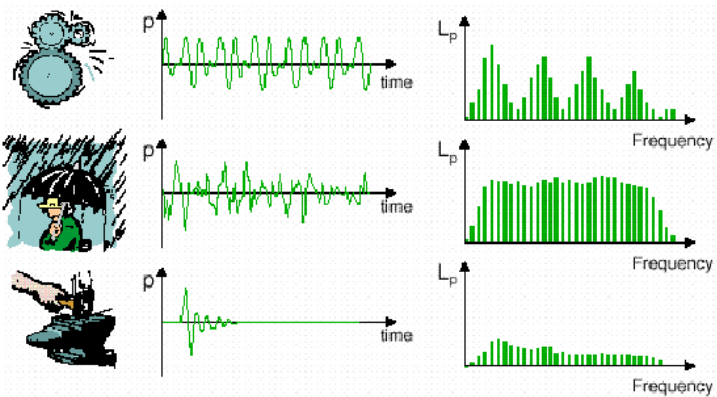
$$p_{\text{eff},\sin} = \frac{\Delta p_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Il parametro p_{eff} usualmente è denominato *pressione sonora* p e rappresenta quindi il valore efficace delle variazioni di pressione.

I suoni sono sempre composti da un numero variabile di suoni perfettamente sinusoidali:

- se i componenti del suono sono costituiti da una frequenza fondamentale e da un numero finito o infinito di frequenze che stanno in rapporti discreti con la frequenza fondamentale il suono risultante è un suono periodico o armonico;
- i suoni complessi sono invece aperiodici in quanto la frequenza delle componenti sinusoidali varia con continuità.





La propagazione del suono nei mezzi elastici

Nei solidi, la velocità di propagazione delle onde flessionali c_B è diversa da quella delle onde longitudinali c_L .

Nell'aria (gas perfetto) a 20°C e 1013 bar, $c_0 \simeq 340 \text{ m/s}$:

$$c_0 = (331.2 + 0.6\theta) \text{ m/s}$$

con la temperatura dell'aria θ espressa in gradi celsius.

In generale c_L in un mezzo solido elastico assimilato ad una barra sottile:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

per una piastra indefinita:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

Materiale	E [N/m ²]	ρ [kg/m ³]	ν [—]
Mattoni pieni	$2.5 \cdot 10^{10}$	1800	0.3
Calcestruzzo	$2.6 \cdot 10^{10}$	2800	0.3
Vetro	$7 \cdot 10^{10}$	2500	0.23
Marmo	$3.8 \cdot 10^{10}$	2600	0.3
Gesso	$1.5 \cdot 10^{10}$	900	0.3
Legno	$1.2 \cdot 10^{10}$	700	0.3
Alluminio	$7.3 \cdot 10^{10}$	2700	0.33
Piombo	$1.7 \cdot 10^{10}$	11300	0.43
Acciaio	$20 \cdot 10^{10}$	7800	0.29

Impedenza acustica

$$z_{\text{aria}} = \rho c_L = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} = 400 \text{ rayl}$$

La capacità di trasmettere energia sonora tra l'aria e mezzi diversi si può quindi desumere dal coefficiente di riflessione dell'energia sonora incidente r :

$$r = \left(\frac{z_{\text{aria}} - z_2}{z_{\text{aria}} + z_2} \right)^2$$

Materiale	c_L [m/s]	ρ [kg/m ³]	z [rayl]
Acciaio	5 000	7 800	$390 \cdot 10^5$
Alluminio	5 100	2 700	$138 \cdot 10^5$
Argento	2 600	10 500	$273 \cdot 10^5$
Nickel	4 970	8 700	$432 \cdot 10^5$
Oro	2 000	19 300	$386 \cdot 10^5$
Ottone	3 500	8 400	$294 \cdot 10^5$
Piombo	1 220	11 400	$139 \cdot 10^5$
Platino	2 650	21 400	$567 \cdot 10^5$
Rame	3 560	8 900	$317 \cdot 10^5$
Stagno	2 500	7 300	$183 \cdot 10^5$
Zinco	3 700	7 000	$259 \cdot 10^5$

Materiale	c_L [m/s]	ρ [kg/m ³]	z [rayl]
Ardesia	4500	3000	$135 \cdot 10^5$
Avorio	3010	1800	$54 \cdot 10^5$
Gomma	54	1000	$0.54 \cdot 10^5$
Granito	3950	2700	$107 \cdot 10^5$
Marmo	3810	2700	$103 \cdot 10^5$
Mattone	3650	1800	$66 \cdot 10^5$
Sughero	500	240	$1.2 \cdot 10^5$
Vetro	5500	2600	$142 \cdot 10^5$

Materiale	c_L [m/s]	ρ [kg/m ³]	z [rayl]
Abete	4640	450	$20.8 \cdot 10^5$
Acero	4110	670	$27.8 \cdot 10^5$
Faggio	3340	750	$25 \cdot 10^5$
Frassino	4670	700	$32.7 \cdot 10^5$
Olmo	4120	570	$23.4 \cdot 10^5$
Pino	3320	500	$16.6 \cdot 10^5$
Pioppo	4280	370	$15.9 \cdot 10^5$
Quercia	3850	800	$30.7 \cdot 10^5$

Trasversalmente alla fibra
valori ridotti ad $1/3$

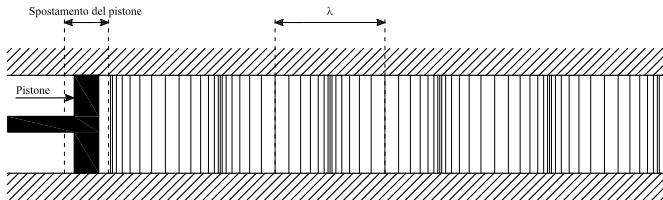
Materiale	c_L [m/s]	ρ [kg/m ³]	z [rayl]
Acqua a 13 °C	1441	1000	$14.4 \cdot 10^5$
Alcool	1240	800	$9.9 \cdot 10^5$
Benzina	1166	900	$10.5 \cdot 10^5$

Materiale	c_L [m/s]	ρ [kg/m ³]	z [rayl]
Aria a 0 °C	331	1.30	$4.27 \cdot 10^2$
Aria a 15 °C	341	1.21	$4.11 \cdot 10^2$
Azoto	336	1.25	$4.2 \cdot 10^2$
Idrogeno	1269	0.09	$1.1 \cdot 10^2$
Ossigeno	317	1.43	$4.5 \cdot 10^2$

$$v = \frac{p}{\rho c} = \frac{p}{z}$$

Legge di Ohm acustica:

$$p = zv$$



Infatti, per analogia alla legge di Ohm si ha che la variazione di pressione dp corrisponde alla differenza di potenziale elettrico V , l'impedenza acustica z alla resistenza elettrica R e l'intensità vibratoria v all'intensità di corrente i .

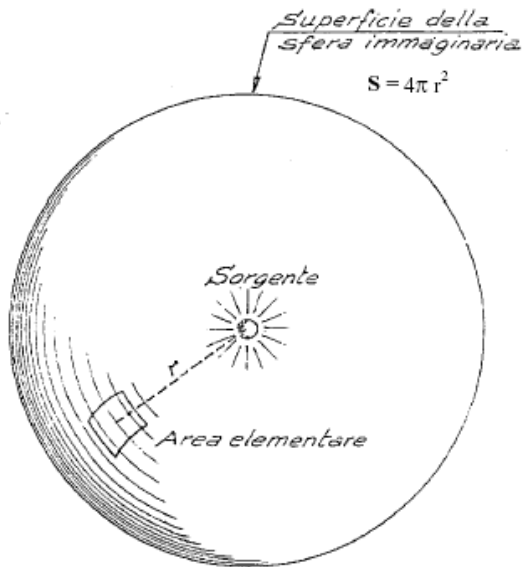
Definizioni

La potenza sonora P_w (quantità di energia irradiata da una sorgente sonora nell'unità di tempo) emessa da una sorgente è irradiata nel mezzo elastico, come l'aria, attraverso una determinata superficie S (o fronte d'onda) come lavoro dovuto al prodotto della forza di pressione p per la velocità di spostamento delle particelle v intorno al punto di equilibrio.

$$P_w = p \frac{p}{\rho c} S = \frac{p^2}{\rho c} S$$

Alla distanza r dalla sorgente la potenza sonora sarà dunque pari a:

$$P_w = \frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2$$



Sorgente	P_w [W]
Aereo turbogetto	10^4
Aereo turboelica	10^3
Orchestra (75 elementi)	10
Martello pneumatico	1
Radio (alto volume)	10^{-1}
Auto in autostrada	10^{-2}
Ventilatore assiale [1500 giri/min]	10^{-3}
Conversazione normale	10^{-6}
Sussurro di voce	10^{-9}

Intensità sonora I [W/m^2]: energia che fluisce attraverso l'unità di area del fronte d'onda nell'unità di tempo.

$$I = \frac{P_w}{4\pi r^2}$$

L'intensità discrimina i suoni da deboli a forti.

$$I = p v = \frac{p^2}{\rho c}$$

e quindi si ha che la pressione sonora in campo libero risulta così legata alla potenza:

$$p = \sqrt{\frac{P_w \rho c}{4\pi r^2}}$$

Quantità di energia per unità di volume o densità di energia sonora D trasferita dalla sorgente al mezzo:

$$w = D = \frac{E}{V} = \rho v^2$$

con v velocità della superficie del pistone e, per onde piane in un mezzo non viscoso, anche dell'oscillazione delle particelle nel mezzo.

$$w = D = \frac{p^2}{\rho c^2}$$

$$I = wc$$

Per onde piane:

$$W = IS = wcS$$

Per onde sferiche:

$$W = I \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 wc$$

Livelli sonori: il decibel

- Livello di potenza sonora L_w :

$$L_w = 10 \log_{10} \frac{P_w}{P_0}$$

dove P_w è la potenza sonora in esame e $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$ la potenza sonora di riferimento

- Livello di intensità sonora L_I :

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

dove I è l'intensità sonora in esame e $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ è l'intensità sonora di riferimento

- Livello di pressione sonora L_p :

$$L_p = 10 \log_{10} \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0}$$

dove p è la pressione sonora in esame e $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ è la pressione sonora di riferimento, corrispondente alla soglia di udibilità a 1000 Hz.

Agli effetti pratici, per le grandezze di riferimento suddette, si dimostra che

$$L_I \simeq L_p^4$$

- 130 dB (63 Pa): soglia del dolore
- Un raddoppio o un dimezzamento dell'energia sonora non provoca un raddoppio o un dimezzamento nei livelli sonori ma solo incrementi o decrementi di circa 3dB
- Quando si calcola il livello totale dovuto al contributo di due o più sorgenti sonore agenti contemporaneamente, bisogna calcolare il livello globale di pressione sonora generato dalle componenti sonore in esame

1

$$\frac{p_i^2}{p_0^2} = 10^{\frac{L_{p_i}}{10}}$$

2

$$\sum 10^{\frac{L_{p_i}}{10}}$$

3

$$L_{p,t} = 10 \log_{10} \left(\sum 10^{\frac{L_{p_i}}{10}} \right)$$

Contributo offerto da una determinata sorgente al rumore globale rilevato:

$$L_{p,2} = 10 \log_{10} \left(10^{\frac{L_{p,t}}{10}} - 10^{\frac{L_{p1}}{10}} \right)$$

Analisi acustica e variabilità del livello sonoro nel tempo

- Bande d'ottava:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

$$f_2 = 2f_1$$

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

- Bande di terzi d'ottava:

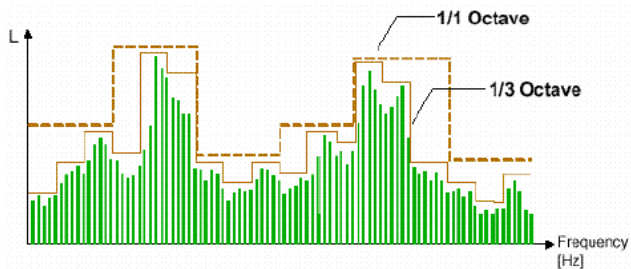
$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{3\sqrt{2}}$$

$$f_2 = \sqrt[3]{2} f_1$$

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

bande	ottava			1/3 d'ottava		
	taglio inf.	centrale	taglio sup.	taglio inf.	centrale	taglio sup.
frequenza (Hz)	44	63	88	56.2	63	70.8
				70.8	80	89.1
				89.1	100	112
				112	125	141
	88	125	177	141	160	178
				178	200	224
				224	250	282
				282	315	355
	177	250	355	355	400	447
				447	500	562
				562	630	708
				708	800	891
	355	500	710	891	1000	1122
				1122	1250	1413
				1413	1600	1778
				1778	2000	2239
	710	1000	1420	2239	2500	2818
				2818	3150	3548
				3548	4000	4467
				4467	5000	5623
	1420	2000	2840	5623	6300	7079
				7079	8000	8913
				8913	10000	11220
				11220	12500	14130
	2840	4000	5680			
	5680	8000	11360			

$$L_{sp} = 10 \log_{10} \frac{p^2}{p_0^2 \Delta f} = L_p - 10 \log_{10} \Delta f$$

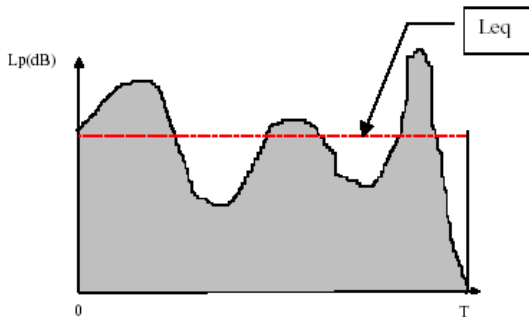


Spettri particolari

- il rumore bianco possiede un livello L_p costante e continuo per tutte le bande di frequenza (rumore di una cascata d'acqua); occorre che il livello di pressione dello spettro $L_{sp} = L_p - 10 \log_{10} \Delta f$ diminuisca di 3 dB ad ogni raddoppio di frequenza
- il rumore rosa ha un contenuto energetico costante per tutte le bande di frequenza, ovvero si mantiene costante L_{sp} , quindi dovrà aumentare di 3 dB il valore di L_p ad ogni raddoppio di frequenza

Livello continuo equivalente di pressione sonora L_{eq} :

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{[p(t)]^2}{p_0^2} dt \right]$$

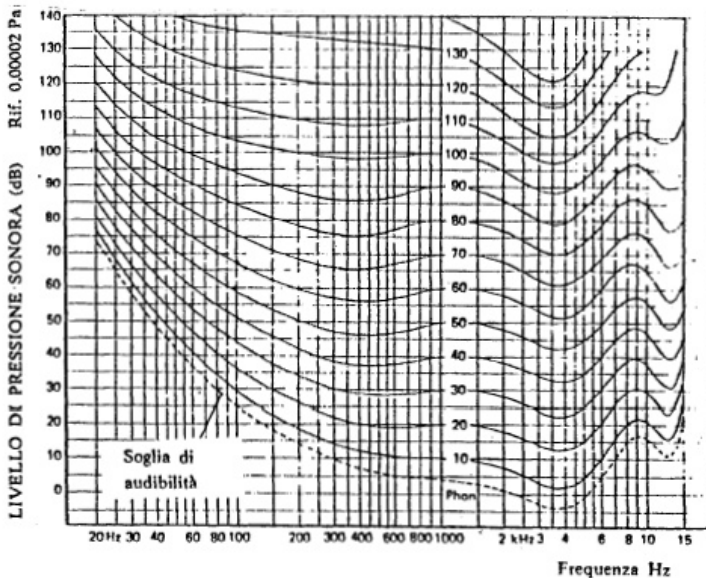


Grandezze psicoacustiche

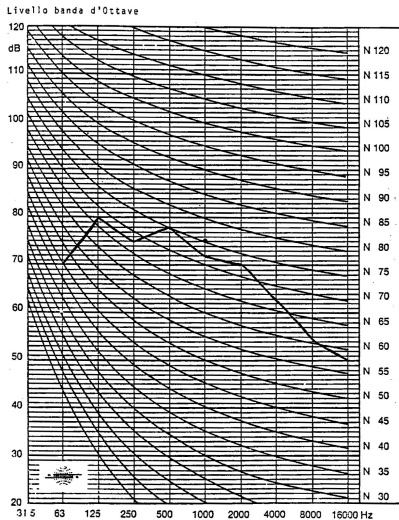
Audiogramma normale medio per toni puri: assumendo un suono puro a 1000 Hz di riferimento; al variare delle frequenze la giuria sonora giudica quando la sonia del suono in esame è uguale a quella del suono di riferimento individuando così una serie di punti aventi eguale sonia: l'unione dei punti così ottenuti individua delle curve definite curve di isosensazione. L'esame dell'audiogramma mostra come varia la sensibilità dell'orecchio al variare delle frequenze per i toni puri.

La valutazione numerica della sonia del suono in esame è rappresentato dal valore N espresso in phon (o livello di sensazione sonora L_{ss}) cui corrisponde la stessa sensazione sonora prodotta dal livello di pressione sonora N in decibel del suono di riferimento a 1000 Hz.

La massima sensibilità dell'orecchio si ha nella zona compresa tra 1000 Hz e 6000 Hz.



Curve di iso sensazione per bande di ottava



Livello sonoro in dB(A)

Il livello di pressione sonora $L_{p(A)}$ in dB(A) è diventata la grandezza psicoacustica base per esprimere le risposte soggettive degli individui ai rumori: creata in base a fattori di correzione degli L_p per bande di ottava, secondo la curva di ponderazione A, alle frequenze più significative.

I fattori di correzione penalizzano i contributi energetici alle basse frequenze, dove l'orecchio è meno sensibile, mentre lasciano invariato, o aumentano di poco, il contributo alle frequenze medio-alte.

$$L_{phon} = L_{p(A)} + 13.5$$
$$\text{dB(A)} \simeq NR + 5$$

Hz	dB
63	-26
125	-17
250	-8.6
500	-3
1000	0
2000	+1.2
4000	+1
8000	-1.1

Per ottenere il valore pesato "A":

- 1 si correggono i valori $L_{p,i}$ secondo la curva "A" ottenendo i valori pesati $L_{p,i(A)}$;
- 2 si trasformano i livelli $L_{p(A)}$ nei valori del rapporto

$$\left(\frac{p_{i,A}}{p_0}\right)^2 = 10^{\frac{L_{p,i(A)}}{10}}$$

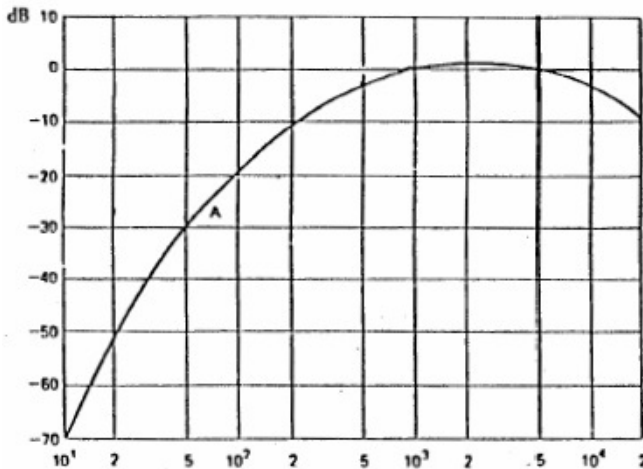
- 3 si effettua la sommatoria

$$\sum \left(\frac{p_{i,A}}{p_0}\right)^2$$

- 4 si calcola il valore globale

$$L_{p(A)} = 10 \log_{10} \sum \left(\frac{p_{i,A}}{p_0}\right)^2$$

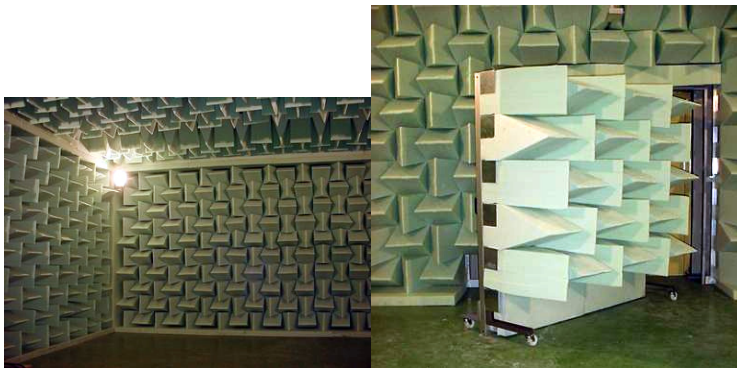
$$L_{eq(A)} = 10 \log_{10} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{p_A(t)}{p_0} \right)^2 dt \right]$$



Propagazione del suono in campo libero

$$\begin{aligned} L_I &= L_p = L_w - 10 \log_{10} (4\pi r^2) = \\ &= L_w - 20 \log_{10} r - 11 \text{ dB} \end{aligned}$$

Valido in "campo libero" o nelle "camere anecoiche", realizzate in modo da ridurre al minimo possibile l'energia riflessa dalle pareti che confinano la camera.



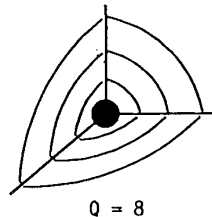
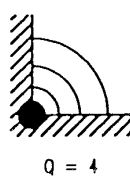
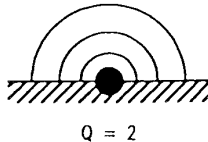
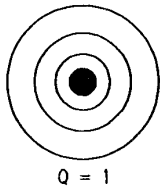
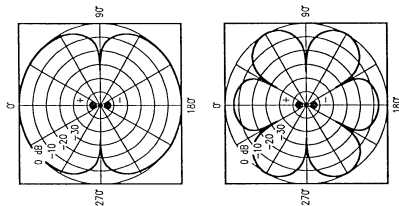
Fattore di direttività Q : rapporto tra l'intensità sonora nella direzione θ (I_θ) e l'intensità sonora I_0 che avrebbe il campo acustico in quel punto, se la sorgente fosse omnidirezionale

$$Q = \frac{I_\theta}{I_0}$$

Indice di direttività D :

$$D = 10 \log_{10} Q$$

$$L_I = L_p = L_w - 20 \log_{10} r - 11 + 10 \log_{10} Q$$

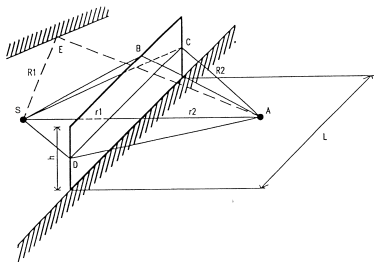


A notevole distanza dalla sorgente:

$$L_I = L_p = L_w - 20 \log_{10} r - 11 + 10 \log_{10} Q - \Delta L$$

L'efficienza acustica di una barriera è rappresentata dall'isolamento acustico ΔL , definito dalla differenza tra il livello di pressione sonora L_{T_0} in un certo punto in assenza della barriera, ed il livello L_{T_b} in presenza della stessa:

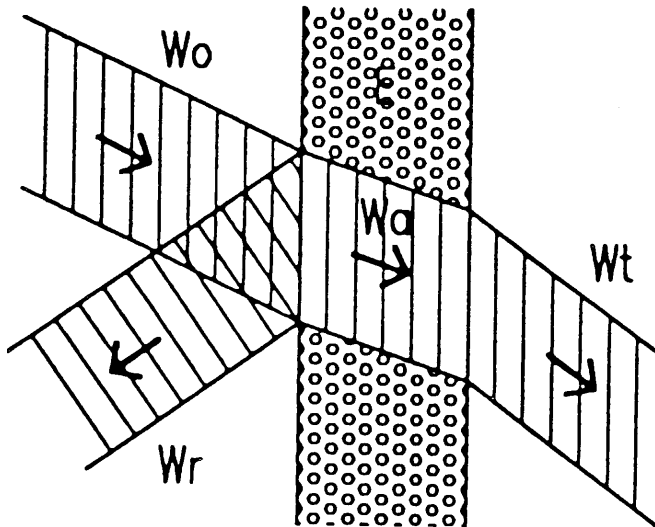
$$\Delta L = L_{T_0} - L_{T_b}$$



- diffrazione sul bordo superiore e sui bordi laterali della barriera (B , C , D)
- trasmissione attraverso lo schermo ($S - A$)
- riflessioni e diffrazioni prodotte da superfici investite dal campo acustico della sorgente ($S - E - A$).

Nel caso di propagazione in campo libero possiamo trascurare l'ultimo termine, mentre per quanto riguarda il termine relativo alla trasmissione attraverso la barriera, si può osservare che nel caso di materiali aventi una densità superficiale superiore ad almeno 20 kg/m^2 , può essere trascurato.

Coefficienti di riflessione, assorbimento e trasmissione



$$W_o = W_r + W_a + W_t$$

$$r + a + t = 1$$

- $r = W_r/W_o$ è il coefficiente di riflessione
- $a = W_a/W_o$ è il coefficiente di assorbimento
- $t = W_t/W_o$ è il coefficiente di riflessione

Coefficiente di assorbimento acustico apparente α :

$$\alpha = 1 - r$$

Campo acustico riverberante e semiriverberante

Campo riverberante: numero delle riflessioni prodotte dalle pareti tanto elevato da formare un campo acustico uniforme in tutto l'ambiente (anche in prossimità della sorgente)

In questa situazione:

$$w = \frac{4W}{\alpha S c_0}$$

dove W è la potenza sonora della sorgente o delle sorgenti, c_0 la velocità del suono, S la superficie totale con α il valore medio del coefficiente di assorbimento acustico delle pareti che delimitano l'ambiente:

$$\alpha = \frac{\sum_j S_j \alpha_j}{\sum_j S_j} = \sum_j \frac{S_j \alpha_j}{S_j}$$

dove S_j rappresenta la singola superficie avente coefficiente di assorbimento acustico α_j . Il prodotto αS prende il nome di area equivalente di assorbimento acustico e si indica con A .

In generale, in ambienti di normali dimensioni, si può ipotizzare che il campo acustico sia semiriverberante. In tal caso si può pensare che esistano contemporaneamente zone di campo libero, in prossimità della sorgente (dove prevale il contributo dell'energia diretta), e zone di campo riverberante, in prossimità delle pareti (dove prevale il campo riflesso).

La potenza che contribuisce al campo riflesso è quella che ha subito una prima riflessione sulle pareti, $W(1 - \alpha)$.

$$w = w_d + w_r = \frac{WQ}{4\pi r^2 c_0} + \frac{4W(1 - \alpha)}{\alpha S c_0}$$

$$R = \frac{\alpha}{1 - \alpha} S$$

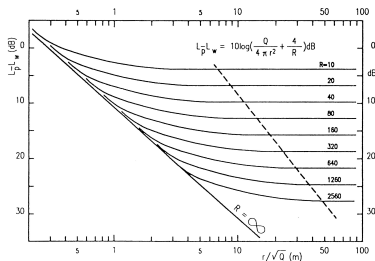
R è detta costante dell'ambiente.

Per campo riverberante

$$L_w = L_p = L_W + 10 \log_{10} \frac{4}{\alpha S} = L_W + 10 \log_{10} \frac{4}{A}$$

Per campo semiriverberante

$$L_w = L_p = L_W + 10 \log_{10} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right)$$



- La retta $R = \infty$ rappresenta il caso limite di campo libero (6 dB per raddoppio della distanza r)
- la linea tratteggiata ed ombreggiata, delimita una zona alla destra della quale il campo acustico è praticamente riverberante.

Nel caso in cui si desideri ridurre il livello sonoro nell'ambiente attraverso un trattamento acustico delle pareti, risulta particolarmente utile verificare sul diagramma l'attenuazione che sarà possibile ottenere.

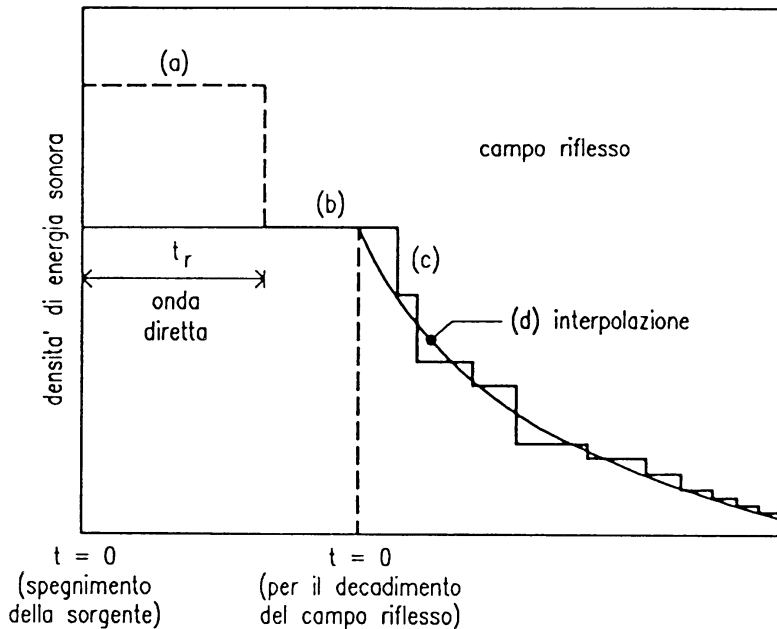
Tempo di riverberazione

Tempo di riverberazione T_R di un ambiente: il tempo necessario affinché la densità di energia sonora raggiunga un milionesimo del valore che aveva prima dello spegnimento della sorgente (-60dB). Se l'ambiente è perfettamente riverberante allora il valore del tempo di riverberazione è lo stesso in tutti i punti e vale:

$$T_R = 0.16 \frac{V}{\alpha S}$$

dove V è il volume dell'ambiente. Tale relazione è nota come “formula di Sabine”. Consente di determinare il valore dell'area equivalente di assorbimento acustico $A = \alpha S$ o della costante dell'ambiente.

Inoltre con la formula di Sabine si possono conoscere i valori di α dei materiali attraverso la misura del tempo di riverberazione in camera riverberante secondo la norma ISO 354.

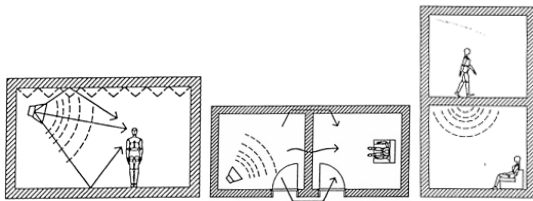


Materiali	Coefficienti d'assorbimento sonoro					
	Hz 125	250	500	1000	2000	4000
Pietrisco						
Pietrisco da 3,18 cm; spessore 15,2 cm	0.19	0.23	0.43	0.37	0.58	0.62
Pietrisco da 3,18 cm; spessore 30,5 cm	0.27	0.58	0.48	0.54	0.73	0.63
Pietrisco da 3,18 cm; spessore 45,7 cm	0.41	0.53	0.64	0.84	0.91	0.63
Conglomerato da 0,64 cm; spessore 15,2 cm	0.22	0.64	0.70	0.79	0.88	0.72
Mattoni porosi	0.03	0.03	0.03	0.04	0.05	0.07
Mattoni porosi dipinti	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03
Moquette pesante su cemento	0.02	0.06	0.14	0.37	0.60	0.65
La stessa di crine o gomma espansa da 1350 g/m ²	0.08	0.24	0.57	0.69	0.71	0.73
La stessa con la parte posteriore in lattice impermeabile	0.08	0.27	0.39	0.34	0.48	0.63
Cemento greggio	0.36	0.44	0.31	0.29	0.39	0.25
Cemento dipinto	0.10	0.05	0.06	0.07	0.09	0.08
Drappi (figg. 21.16 e 21.17)						
Velluto leggero da 338 g/m ² appeso verticalmente, in contatto con il muro	0.03	0.04	0.11	0.17	0.24	0.35
Velluto medio, da 457 g/m ² , su metà area	0.07	0.31	0.49	0.75	0.70	0.60
Velluto pesante, da 610 g/m ² , su metà area	0.14	0.35	0.55	0.72	0.70	0.65
Rivestimenti e copertura in fibra di vetro						
2,54 cm di lana di vetro da 24 a 48 kg/m ³	0.08	0.25	0.65	0.85	0.80	0.75
5,1 cm di lana di vetro da 24 a 48 kg/m ³	0.17	0.55	0.80	0.90	0.85	0.80
2,54 cm di lana di vetro, con 2,54 cm di intercapedine	0.15	0.55	0.80	0.90	0.85	0.80
pannelli da 5,1 cm in fibra di vetro ricoperti con foglio in plastica e di metallo forato	0.33	0.79	0.99	0.91	0.76	0.64
Pavimenti						
Cemento o piastrelle	0.01	0.01	0.015	0.02	0.02	0.02
Linoleum, asfalto, gomma o sughero su cemento	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
Legno	0.15	0.11	0.10	0.07	0.06	0.07
Parquet di legno su asfalto e cemento	0.04	0.04	0.07	0.06	0.06	0.07
Vetro						
Grandi pannelli di vetro piatto pesante	0.18	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02
Vetro normale per finestre	0.35	0.25	0.18	0.12	0.07	0.04
Tavole di gesso da 1,27 cm chiodate su traversini di 5 × 10 cm distanti 40 cm	0.29	0.10	0.05	0.04	0.07	0.09
Marmo o gres	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02

Isolamento acustico tra ambienti

Modalità di propagazione dell'energia sonora:

- 1 per via aerea, nel caso in cui le onde sonore si trasmettano dalla sorgente all'ascoltatore direttamente o attraverso pareti divisorie
- 2 per via strutturale, nel caso in cui le onde sonore che raggiungono l'ascoltatore siano generate da urti e vibrazioni prodotte sulle strutture dell'edificio in cui si trova l'ambiente disturbato



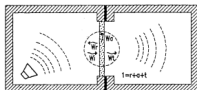
Requisiti acustici richiesti:

- nel caso di rumore aereo prodotto nel locale stesso, requisiti di assorbimento acustico alle superfici di confine
- nel caso di rumori aerei trasmessi attraverso le pareti divisorie, requisiti di isolamento acustico
- nel caso di rumore strutturale, requisiti di isolamento dai rumori impattivi.

Potere fonoisolante R della parete:

$$R = 10 \log_{10} \frac{1}{t}$$

Il valore di R varia con la frequenza e la direzione di provenienza del suono oltre che con le proprietà geometriche e fisiche della parete.



Determinazione sperimentale di R in campo acustico diffuso in laboratorio secondo UNI 8270/3 conforme alla ISO 140/III.

Per ogni banda di frequenza, noti i livelli di pressione sonora medi nell'ambiente disturbante L_1 e nell'ambiente ricevente L_2 , il potere fonoisolante R della parete in prova si ottiene dall'espressione:

$$R = L_1 - L_2 + 10 \log_{10} \frac{S}{A}$$

in cui S è la superficie del divisorio ed A è l'area equivalente di assorbimento acustico dell'ambiente ricevente.

Nella pratica interessa la risposta d'insieme dell'opera, per cui si usa l'isolamento acustico D , definito dalla relazione seguente:

$$D = L_1 - L_2$$

Poiché l'assorbimento acustico dell'ambiente ricevente influenza il livello sonoro L_2 :

$$D_T = L_1 - L_2 + 10 \log_{10} \frac{T}{0.5}$$

dove T è il tempo di riverberazione dell'ambiente ricevente misurato in secondi.

Nella norma UNI 8270/4 è prevista anche la misura dell'isolamento acustico normalizzato D_n , definito dalla relazione:

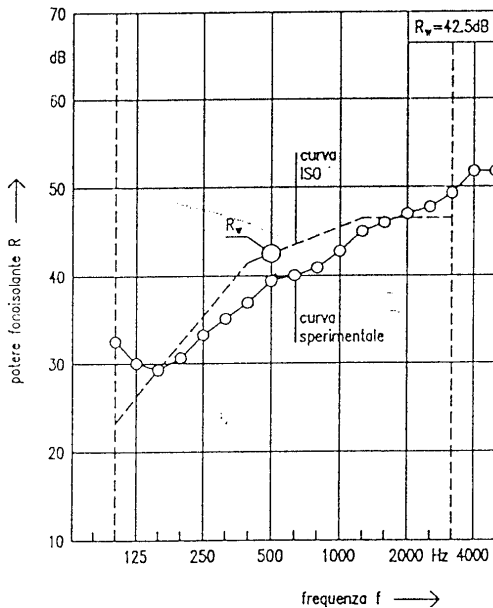
$$D_n = L_1 - L_2 + 10 \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

dove A è l'area equivalente di assorbimento acustico dell'ambiente ricevente e $A_0 = 10 \text{ m}^2$ è l'area equivalente di assorbimento acustico di riferimento.

Indice di valutazione

Indice di valutazione per classificare le curve del potere fonoisolante R_w , dell'isolamento acustico D_{nw} ed anche del livello di calpestio L_{nw}

Il metodo per determinare il valore dell'indice di valutazione è riportato nella Norma UNI 8270/7 (conforme alla ISO 717/1-2-3). Il valore dell'indice di valutazione è ottenuto sovrapponendo alla curva sperimentale di R , D o L_n , la curva di riferimento indicata in modo tale che il valore medio degli scostamenti negativi della curva sperimentale rispetto a quella di riferimento sia inferiore a 2dB. Il valore della curva di riferimento a 500Hz rappresenta l'indice di valutazione della curva sperimentale.



Previsione del potere fonoisolante R

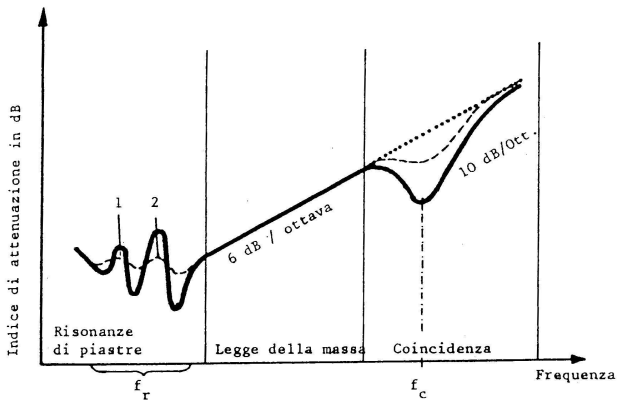
Tra i 100 ed i 3150 Hz è possibile prevedere il valore del potere fonoisolante:

$$R_0 = 20 \log_{10} \sigma + 20 \log_{10} f - 42.5$$

valida nel caso di parete omogenea di densità superficiale σ , campo acustico di frequenza f e caratterizzato da onde piane ad incidenza normale. Tale relazione è nota come legge della massa.

Nel caso più generale di campo acustico diffuso e quindi di onde sonore ad incidenza casuale:

$$R = R_0 - 10 \log_{10} (0.23 R_0)$$



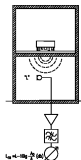
Nella curva sperimentale di R per una parete omogenea si distinguono tre distinti campi di frequenze:

- alle basse frequenze R è controllato dai fenomeni di risonanza determinati dalle condizioni di vincolo dell'intera parete;
- al di sopra di tale limite la massa superficiale della parete assume l'effetto preponderante e vale pertanto la legge di massa
- al raggiungimento della frequenza di coincidenza f_c in corrispondenza alla quale la velocità delle onde flessionali nella parete uguaglia quella del suono nell'aria, si riduce drammaticamente il valore di R .
- Per frequenze superiori si può ancora ritenere valida la legge di massa, assegnando però una costante da sottrarre con un valore tanto più grande quanto più piccolo è il valore dello smorzamento interno della parete.

Misura del rumore impattivo

Rumori impattivi: causati dalla caduta di oggetti sul pavimento o dai passi delle persone. Trasmessi per via strutturale, interessano il complesso pavimento-solaio.

Parametro: livello normalizzato di rumore di calpestio L_n , valutato con la misura del livello di pressione sonora nell'ambiente sottostante quando sul pavimento agisce una macchina normalizzata generatrice di rumori impattivi



Misure in laboratorio a solaio completo, per livello di rumore di calpestio normalizzato L_n :

$$L_n = L + 10 \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

dove L è il valore medio della pressione sonora misurato nell'ambiente ricevente quando sul pavimento in prova è in funzione il generatore, A è l'area equivalente di assorbimento acustico dello stesso ambiente e $A_0 = 10 \text{ m}^2$ è l'area equivalente di assorbimento acustico di riferimento.

La grandezza che descrive il comportamento dei rivestimenti di pavimento acustico è l'attenuazione del rumore di calpestio DL :

$$DL = L_{no} - L_n$$

dove L_{no} è il livello di rumore di calpestio normalizzato che si misura quando il generatore è in funzione sul solaio normalizzato.

Misure in opera: in edifici finiti e riguardano l'intero solaio.

$$L_n = L_i + 10 \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

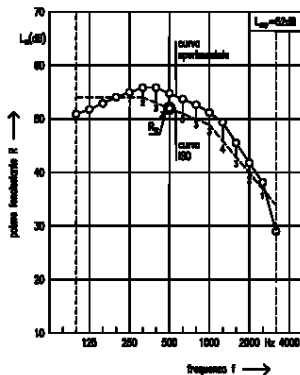
dove L_i è il livello medio di rumore misurato in più punti dell'ambiente ricevente quando nell'ambiente sovrastante è in funzione la macchina normalizzata di rumore di calpestio.

Livello di calpestio L_{nt} (standardized impact sound pressure level):

$$L_{nt} = L_i + 10 \log_{10} \frac{T}{T_0}$$

dove T è il tempo di riverberazione nell'ambiente ricevente e $T_0 = 0.5 \text{ s}$ è il tempo di riverberazione di riferimento.

Indice di valutazione del livello di calpestio L_{nw} ottenuto sovrapponendo alla curva sperimentale L_n , la curva di riferimento, in modo che il valore medio degli scostamenti sfavorevoli della curva sperimentale rispetto a quella di riferimento sia inferiore a 2dB. Il valore della curva di riferimento a 500 Hz rappresenta l'indice di valutazione del livello di calpestio.



Materiali fonoassorbenti

Quando la sorgente del disturbo si trova nello stesso locale bisogna aumentare l'area equivalente di assorbimento acustico delle superfici esposte al campo acustico.

Attenuazione DL con l'installazione di materiale fonoassorbente:

$$DL(f) = 10 \log_{10} \frac{A_2}{A_1}$$

dove A_1 e A_2 rappresentano rispettivamente l'area equivalente di assorbimento acustico delle pareti che delimitano l'ambiente prima e dopo il trattamento acustico.

$$A = \sum \alpha_j S_j$$

dove S_j ed α_j sono rispettivamente l'area ed il coefficiente di assorbimento acustico apparente della j -esima porzione della superficie che delimita l'ambiente.

α , e quindi anche l'attenuazione, varia con la frequenza del suono incidente

Materiali fonoassorbenti:

- materiali porosi
- risuonatori acustici
- pannelli vibranti
- sistemi misti

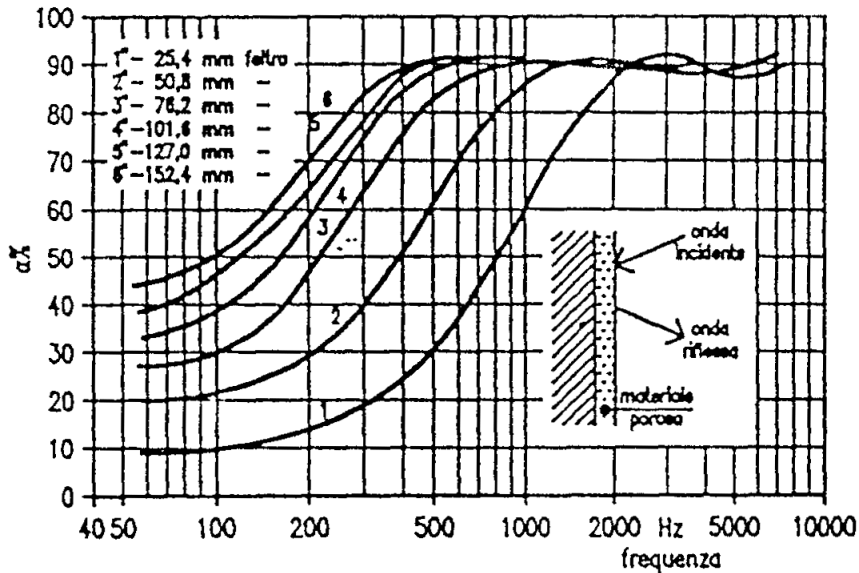
Nelle normali situazioni si possono ottenere attenuazioni massime di livello sonoro di $7 \div 8$ dB.

Materiali porosi

Assorbimento acustico dei materiali porosi determinato dalla conversione in calore dell'energia meccanica attraverso fenomeni di attrito. Dipende da:

- lunghezza d'onda del suono incidente
- rapporto tra il volume dei vuoti e quello totale
- spessore del materiale
- modalità di installazione

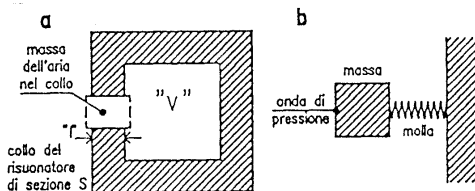
α in genere aumenta con la frequenza, con il valore del rapporto densità apparente-densità reale e, alle basse frequenze, con lo spessore dello strato di materiale.



Risuonatori acustici

Risuonatore acustico: una cavità comunicante con l'esterno attraverso un foro praticato su di una parete non troppo sottile, che prende il nome di *collo del risuonatore*.

Se le dimensioni della cavità sono abbastanza piccole rispetto alla lunghezza d'onda e se le dimensioni del collo sono piccole rispetto a quelle della cavità, l'aria in esso contenuta si comporta come un pistone oscillante, mentre quella contenuta nella cavità costituisce l'elemento elastico del sistema.

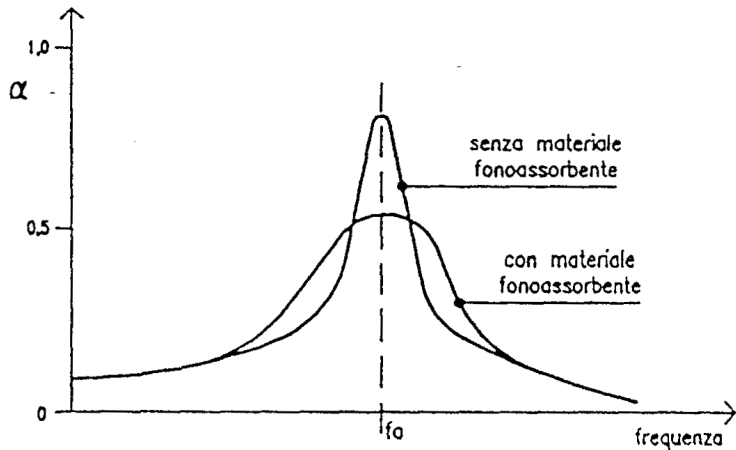


Frequenza di risonanza del risuonatore:

$$f_0 = \frac{c_0}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{V(l+\pi/2r)}}$$

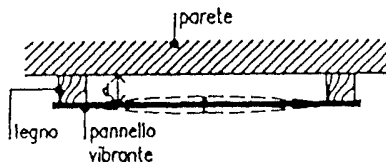
dove c_0 è la velocità di propagazione del suono nel mezzo, r e l rispettivamente il raggio e la lunghezza del collo del risuonatore e V il volume della cavità.

Se la frequenza del suono incidente coincide con f_0 , la velocità delle particelle d'aria contenute nel collo assume valori particolarmente elevati e l'effetto dei fenomeni dissipativi raggiunge il suo massimo con conseguente assorbimento della energia sonora. Se la frequenza si discosta da tale valore di risonanza, l'onda sonora non esercita nessuna influenza sul risuonatore che è un assorbitore fortemente selettivo.



Pannelli vibranti

I pannelli vibranti sono costituiti da pannelli rigidi piani, disposti parallelamente e ad una certa distanza dalla parete.



Il sistema può essere assimilato ad una massa oscillante (il pannello) accoppiata ad un elemento elastico dotato di un certo smorzamento (l'aria racchiusa nell'intercapedine).

Frequenza di risonanza:

$$f_0 = \frac{60}{\sqrt{\sigma d}}$$

dove σ è la densità superficiale del pannello e d la distanza del pannello dalla parete.

Sistemi misti

La realizzazione più frequente di sistemi misti è costituita da lastre rigide (metallo, legno, gesso, ecc.) sulla cui superficie vengono praticati fori di diversa forma e dimensione, fissate ad una certa distanza dalla parete. L'intercapedine, che costituisce la cavità di una molteplicità di risuonatori tra loro comunicanti, può essere o no riempita con materiale poroso.

