Vedi: Def 4 $\Sigma^k$ insieme liscio, $n \leq 3$

(condizione sufficiente affinché $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia $C^\infty$)

$T_p S = \{ \text{piano } (d_p f, \cdot 0_p f) \}$

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$

Def.: $E(x_0, y_0) = d_p f(\partial_x) \cdot d_p f(\partial_x) > 0$ poiché $\partial_x \neq 0$ (stesso perché $(x_0, y_0) = p \in U$ e $d_p f(\partial_x) = 0$)

$F(x_0, y_0) = d_p f(\partial_x) \cdot d_p f(\partial_y)$

$G(x_0, y_0) = d_p f(\partial_y) \cdot d_p f(\partial_y) > 0$ poiché $\partial_y \neq 0$ stesso perché

oss.: Se $v \in T_p S$

$v = \lambda \partial_x f + \mu \partial_y f$

$\Delta t > 0$

$\Rightarrow v \cdot v = I_p(v) = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$= \lambda^2 E + \lambda \mu F + \mu^2 G$ (*)

Possiamo usare (*) per definire $E, F, G$ e $I_p$ per esprimere lunghezze, angoli e aree:

① $\alpha : I \to S$ curva regolare in $S$

e $f: U \to S$ par. di $S$ t.c.

$\alpha(I) \subseteq f(U)$ , $t \in I$

Def.: lunghezza della curva $\alpha$:

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \alpha'(\tau) \| \, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_{\alpha(\tau)}(\alpha'(\tau))} \, d\tau$

$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F \cdot u' v' + G \cdot v'^2} \, d\tau$

$E, F, G$ stesse $\alpha$ stesse $\in f^{-1}S$




Caso: la curva piana

$(u(t), v(t)) := f^{-1}(\alpha(t))$ ; $\in C^\infty$

$\Rightarrow \alpha(t) = f(u(t), v(t))$

$\Rightarrow \alpha'(t) = \partial_u f \cdot u'(t) + \partial_v f \cdot v'(t)$

$\Rightarrow I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$

$= (\partial_u f \cdot u' \partial_u + \partial_v f \cdot v' \partial_v) \cdot (\partial_u f \cdot u' \partial_u + \partial_v f \cdot v' \partial_v)$

$= E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2$

(vedi nota (*))

$\Rightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F u' v' + G \cdot v'^2} \, d\tau$

② Angolo tra curve su $S$



$\alpha, \beta : I \to S$ curve reg.

t.c. $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = P \in S$

**Def.: Angolo convesso tra $\alpha$ e $\beta$ in $P$** è $\Theta$ t.c. $0 \leq \Theta \leq \pi$ e

$\cos \Theta = \dfrac{\alpha'(t_0) \cdot \beta'(t_0)}{\| \alpha'(t_0) \| \cdot \| \beta'(t_0) \|}$

In particolare, se $\alpha$ e $\beta$ sono CURVE COORDINATE:




$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ , $q = (u_0, v_0) \in U$

$\alpha(t) = f(u_0 + t, v_0)$ $\quad f(q) = P$

$\beta(t) = f(u_0, v_0 + t)$

$\alpha(0) = f(u_0, v_0) = \beta(0)$

$\alpha'(0) = \partial_u f(u_0, v_0)$

$\beta'(0) = \partial_v f(u_0, v_0)$

$\Rightarrow \cos \Theta = \dfrac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\| \alpha'(0) \| \, \| \beta'(0) \|} = \dfrac{\partial_u f \cdot \partial_v f}{\| \partial_u f \| \, \| \partial_v f \|}$

$= \dfrac{F}{\sqrt{E} \sqrt{G}} = \dfrac{F}{\sqrt{E \cdot G}}$

In particolare, le curve coordinate sono $\perp \iff F = 0$.

③ AREA di una regione $R \subseteq S$

sia $R \subseteq S$ una regione CONNESSA, CHIUSA, LIMITATA, con BORDO DIFFEOMORFO a $S^1$.

Supp. $\exists f: U \to S$ t.c. $R \subseteq f(U)$

Def.: $A(R) := \int_Q \| \partial_u f \wedge \partial_v f \| \, du \, dv = \int_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$

$= \int_Q \sqrt{\det I_p} \, du \, dv$




dove $Q = f^{-1}(R)$

OSS.: R limitato, $f$ omeomorfismo tra $U$ e $f(U)$ $\Rightarrow Q$ è una regione limitata $\subseteq U$.

Esempio:

$\| \partial_u f \wedge \partial_v f \|^2 = \underbrace{(\partial_u f)^2 (\partial_v f)^2}_{= F^2} = \underbrace{\| \partial_u f \|^2}_{E} \cdot \underbrace{\| \partial_v f \|^2}_{G}$

Prop. $A(R)$ non dipende dalla scelta di $f$.

Dim. Sia $\tilde{f}: \tilde{U} \to S$ un'altra parametrizzazione di $S$, $\tilde{f} = f(\tilde{U})$ con $R \subseteq \tilde{f}(\tilde{U})$ , e poniamo $\tilde{Q} = \tilde{f}^{-1}(R)$.

Dobbiamo con $h = f^{-1} \circ \tilde{f}$ la mappa di transizione.

Abbiamo già visto che vale $\partial_{\tilde{u}} \tilde{f} \wedge \partial_{\tilde{v}} \tilde{f} = (\partial_u f \wedge \partial_v f) \cdot \det J(h)$,

dove $J(h)$ è la matrice jacobiana di $h$.

Quindi $\iint_{\tilde{Q}} \| \partial_{\tilde{u}} \tilde{f} \wedge \partial_{\tilde{v}} \tilde{f} \| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \iint_{\tilde{Q}} \| \partial_u f \wedge \partial_v f \| \cdot |\det J(h)| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}$

$= \iint_Q \| \partial_u f \wedge \partial_v f \| \, du \, dv$ per il Teorema sul cambio di variabile nel calcolo integrale.

Esempi:

① Piano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^2 \to \Pi$

$f(x, y) = P_0 + x w_1 + y w_2$

$w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$, tali che $w_1 \perp w_2$ ORTOGONALI

$\partial_x f = w_1$

$\partial_y f = w_2$

$\Rightarrow E = w_1 \cdot w_1 = 1$

$F = w_1 \cdot w_2 = 0$

$G = w_2 \cdot w_2 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di $I_P$ $\quad \forall P \in \Pi$

② Cilindro $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$



$f: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$f(\vartheta, v) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, v)$

$\partial_\vartheta f = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)$

$\partial_v f = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow E = \partial_\vartheta f \cdot \partial_\vartheta f = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$

$F = 0$

$G = 1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di $I_P$, $\forall P \in S$