Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 7

Prof. Valentina Beorchia

25 aprile 2025

1. Si consideri il seguente atlante

$$\mathcal{A} = \{(U_1 = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \varphi_1), (U_2 = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \varphi_2)\}$$

per il *nastro di Möbius*:

$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi_1(u_1, v_1) = \left((2 - v_1 \sin\frac{u_1}{2}) \sin u_1, (2 - v_1 \sin\frac{u_1}{2}) \cos u_1, v_1 \cos\frac{u_1}{2}\right),$$
$$\varphi_2 : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi_2(u_2, v_2) = \left((2 - v_2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2}) \cos u_2, -(2 - v_2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2})) \sin u_2, v_2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2})\right).$$

Si verifichi che $\mathcal{A}$ non è un atlante orientato, e che non è possibile modificare $\mathcal{A}$ in un atloante orientato, quindi il nostro di Móbius è una superficie (regolare) non orientabile.

2. Si dimostri che per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ vale l'identità

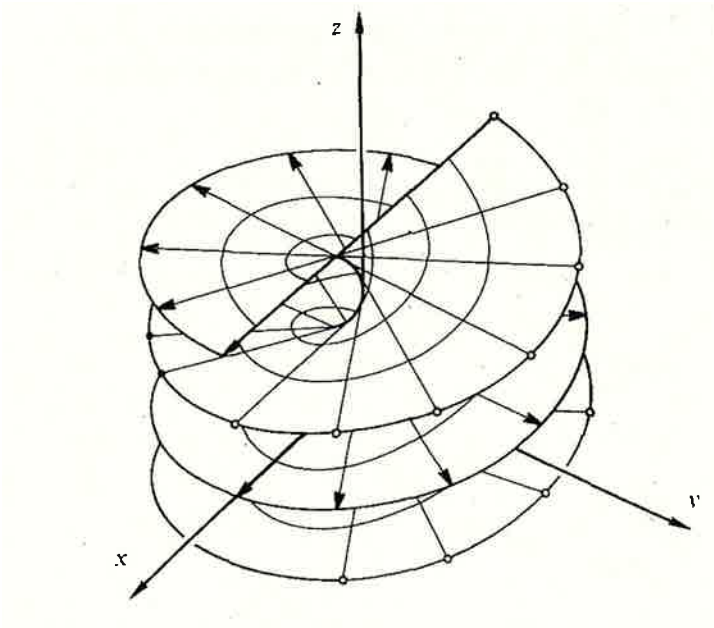
$$\|v \wedge w\|^2 + (v \cdot w)^2 = \|v\|^2 \, \|w\|^2.$$

3. Si calcolino i coefficienti E, F, G della Prima Forma Fondamentale delle seguenti superfici regolari:

   (a) *elicoide rigata*:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

   con $a > 0$. Questa superficie è ottenuta dal movimento elicoidale di una retta.



(b) sfera:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v);$$

si calcoli, inoltre, l'angolo convesso tra un meridiano ed un parallelo nel loro punto di intersezione, e l'area della sfera.

(c) toro:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u);$$

si calcoli, inoltre, la sua area.

(d) *ellissoide*:

$$\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

(e) *paraboloide ellittico*:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2).$$

4. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ su un aperto U, e sia $R \subset \Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ una regione limitata del grafico di f.

Si dimostri che l'area $A(R)$ di R è uguale a:

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2}\, dx\, dy,$$

dove Q è la proiezione ortogonale di R sul piano xy.