TRASFORMAZIONI DEL PIANO EUCLIDEO E^2

Def: Una ISOMETRIA o CONGRUENZA di E^2 è un'applicazione (funzione) suriettiva

$$f : E^2 \to E^2$$

che conserva le DISTANZE, cioè

$$\forall\, P, Q \in E^2, \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \overline{PQ}$$

PROPRIETÀ

① Un'isometria trasforma in modo biunivoco (corrispondenza) i punti di una retta r e quelli di una retta s; cioè l'isometria è biunivoca tra i punti di r e quelli di s.

② f è iniettiva, cioè è semplice: punti uno a uno.

③ L'applicazione inversa $f^{-1} : E^2 \to E^2$ è anch'essa un'isometria.

④ Un'isometria trasforma una retta in una retta:

con A, B, C punti allineati, $A \ast B \ast C$

(A1) $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$

$\Downarrow$

$d(f(A), f(C)) = d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C))$

$\Rightarrow f(A), f(B), f(C)$ sono allineati

Ricordo: l'opposto: $\forall$ terna di punti di una retta, esiste una di tutte le terne tra cui quella che presenta l'ultimo dei tre punti come immagine.

Esempi: ① Se f isometria di fissa 2 punti di una retta

$\Rightarrow$ f fissa tutti i punti della retta: $\forall\, C \in r,\ f(C) = C$

② f isometria che fissa 3 punti non allineati

$\Rightarrow f = Id_{E^2}$ (f fissa tutti i punti)

③ f isometria che scambia due punti fissi di loro: $f(A) = B$, $f(B) = A$

$\Rightarrow \exists$ un punto fisso per f: cioè C t.c. $f(C) = C$.

SIMMETRIA ASSIALE

Def: Data nella $r \subset E^2$, si dice SIMMETRIA ASSIALE di asse r l'isometria $F : E^2 \to E^2$ t.c.

① F lascia fissi tutti i punti di r,

e porta ciascun semipiano nel semipiano opposto.

② F è INVOLUTORIA, cioè $F^2 = F \circ F = Id_{E^2}$

Def: Una retta s si dice PERPENDICOLARE a r ORTOGONALE ad r se $r \neq s$ e s è mediatrice in qualche segmento $\overline{PP'}$ di r.

Ma una simmetria assiale di asse r...

(A1) Data r nella, $\exists!$ simmetria assiale di asse r.

(A2) Data nella r e un punto $P \notin r$, $\exists!$ nella s perpendicolare ad r e passante per P.

Def: Prima Bisettrice Asse di un SEGMENTO

- BISETTRICE di un ANGOLO: asse di simmetria della simmetria assiale che manda un lato dell'angolo nell'altro lato dell'angolo.
- Se due rette r, s sono perpendicolari e ma terza retta t, allora sono parallele (cioè incidenti o sono parti di interessa).

GEOM. EUCLIDEA

Fissano $O \in E^2$, $\forall\, P \neq O$ sono r_O e nella nella $P' \neq O$ tali $P \neq P'$ t.c.

$$d(O, P) = d(O, P')$$
$$\overline{OP} = \overline{OP'}$$

$f \in E^2 \to E^2$

$f(O) = O$

$f(r) = r'$

oss: f è un'isometria e ha un unico punto fisso: O centro

Teorema: Ogni isometria centrale è data o da composizione di 2 simmetrie assiali, i cui assi sono 2 rette qualsiasi passanti per O e ognuna di esse.

Thm: Una simmetria centrale trasforma una qualsiasi retta r in una retta parallela ad r.

PROBLEMA DI ERONE:

Dati r retta e P, Q nello stesso semipiano, trovare il percorso più breve che congiunge P con Q toccando r.

Cioè: cerco $M \in r$ t.c. $\overline{PM} + \overline{MQ}$ sia minima

Cerco simmetrica assiale di asse r

$S_r : S_r(P) = P'$

$\Rightarrow$ minimizzare $\overline{P'M} + \overline{MQ}$

Ovvio: $\overline{P'M} + \overline{MQ}$

cioè il minimo è realizzato da M^*...

APPLICAZIONE del Thm alla Simile

- È possibile fare una classif. di triangoli a quadrilateri in base ai loro gruppi di simmetria?

cioè i gruppi finiti

PROBLEMA: Come due esse triangoli per esse trasformati l'uno stesso da una simm. assiale?