

MATEMATICA COME LINGUAGGIO

Euclide (circa 300 e.C.) Elementi di Geometria
1° libro: assiomatizzazione della geometria.

Ciò introdotto SISTEMA ASSIOMATICO:

è il dato che:

- ELEMENTI PRIMITIVI
sono concetti che assumiamo esistere, e il cui significato è invariato al senso comune.

es. Geo. Euclidea: punto
retta (illimitata)
segmento
piano fisico (illimitato)
spazio fisico (illimitato)

- ASSIOMI (nell'ambito matematico POSTULATI)
affermazioni che noi accettiamo come vere

- REGOLE LOGICHE

Tipicamente si sceglie la LOGICA FORMALE DEDUTTIVA BINARIA

Def.: Un SIST. ASS. è **COERENTE** se non contiene contraddizioni (cioè: affermazioni contemp. vere e false)

è **COMPLETO** se ogni affermazione ammissibile è dimostrabile.

- un insieme di assiomi si dice formato da **ASSIOMI INDIPENDENTI** se nessun assioma è deducibile dagli altri assiomi.

Esempio di SIST. ASS.

Geometria dei 4 punti (4P)

Termini primitivi: punto, retta, appartenenza

ASSIOMI: ① esistono esattamente 4 punti

② 2 punti distinti appartengono esattamente a 1 retta.

③ a una retta appartengono esattamente 2 punti

Teorema: Esiste almeno una retta.

Dim. Per ①, esistono 4 punti. Ne scelgo 2.

Per ②, esiste una retta per essi.

Def.: Un **MODELLO** per un SIST. ASS. è la scelta di oggetti specifici che rappresentano termini primitivi e che verificano gli assiomi.

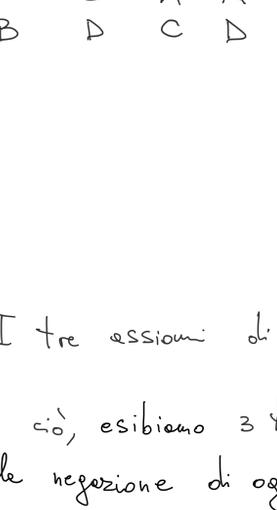
Es. 4P geom. 2 modelli

Primo modello: 4 punti A, B, C, D

rette: lettere in colonna, es. A B

2° MODELLO: 4 punti del piano euclideo

rette: segmenti che collegano 2 punti



Teorema: Nella geom 4P ci sono esattamente 6 rette.

Dim.: Per ogni coppia di punti, considero la retta per i 2 punti. (esiste per ②)

Otengo 6 rette. Inoltre, esse sono tutte diverse, perché altrimenti avremmo 3 o più punti su una retta, contraddicendo a ③.

Elenchiamo tutte le rette:

A C A A B B
B D C D D C

OSS.: I tre assiomi di 4P sono INDIP.

Per mostrare ciò, esibiamo 3 teorie assiomatiche coerenti: una per la negazione di ogni assioma.

- Neghiamo ①:

una teoria in cui non vale ①, ma valgono ② e ③:

A, B (2 punti)

A B
B 1 retta

- Neghiamo ②

punti A, B, C, D

rette A A A B
B C D C

oppure A C
B D

- Neghiamo ③

rete ①: A, B, C, D

rete ②: A A B C
B D D D
C

OSS. L'assioma che per 2 punti passa una unica retta non sempre è soddisfatto in modelli fisici

es. nella geometria sferica

rette ↔ cerchi di raggio massimo

(gli archi di cerchi di raggio massimo sono curve di lunghezza minima sulla sfera, analogamente ai segmenti nel piano).

