Proposizioni e tavole di verità

Una ***proposizione*** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il ***valore di verità*** della proposizione.
Nel contesto di questo insegnamento, una proposizione deve essere decidibile (cioè deve essere vera o, in alternativa, falsa). Le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni non sono proposizioni.
Esempio. Sono proposizioni:

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica* (ove si sia stabilito con precisione la data, il luogo, il calendario utilizzato)
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- $3x = 5$
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo, Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora ritenere possibili entrambe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.

Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscola, come p, q.
Le ***tavole (o tabelle) di verità*** sono tabelle nelle quali sono elencati tutti i possibili valori di verità di una proposizione, o di un insieme di proposizioni: su ogni colonna, il primo elemento in alto indica la proposizione cui la colonna si riferisce. I valori di verità sono *Vero* (denotato con V) e *Falso* (denotato con F): ogni riga elenca una possibile combinazione di valori di verità che le proposizioni considerate assumono simultaneamente.

Esempio. Se abbiamo solo la proposizione p, la tavola della verità è:

p
V
F

Se abbiamo due proposizioni p e q, qualunque sia il valore di verità di p, è possibile che la proposizione q sia vera oppure che sia falsa; la tavola diventa:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E' possibile che dichiarazioni diverse esprimano lo stesso significato. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità). Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due proposizioni hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) diciamo che sono logicamente equivalenti: dunque, **due proposizioni sono *(logicamente) equivalenti* se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi)**.
Una ***tautologia*** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele.*
Una ***contraddizione*** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.
Un ***paradosso*** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "*questa frase è falsa*".

Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.

1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$.

2. Due proposizioni p e q sono collegate con un ***connettivo logico*** tra i seguenti:

operazione su p **e** q	**simbolo**	**lettura del simbolo**	**esempio**
congiunzione logica	$p \wedge q$	p e q	*Guardo un film e mangio il pop-corn* *Sono richiesti l'invito e l'abito da sera*
disgiunzione logica	$p \vee q$	p o q	$x < y$ o $x > y$ *Leggo un libro o vado al cinema* *L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.*
implicazione logica	$\Rightarrow$	p implica q se p allora q	*Se ho la febbre, sono malato* *Se piove, andiamo al cinema*
coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	p se e solo se q	*Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto* *Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali*

Viceversa, individuando i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una ***proposizione elementare*** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale e gli è arrivata una telefonata*.

Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

Negazione

La negazione di una proposizione *p* è la proposizione che è vera quando *p* è falsa e falsa quando *p* è vera. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$ (che si legge *non p*).

Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

p	$\neg p$
V	F
F	V

Esempi: p : *mangio la mela*
$\neg p$:*non mangio la mela / non è vero che mangio la mela*
q : *dormo per terra*
$\neg q$:*non dormo per terra/non è vero che dormo per terra*

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza: $\neg(\neg p)$ è equivalente a p:

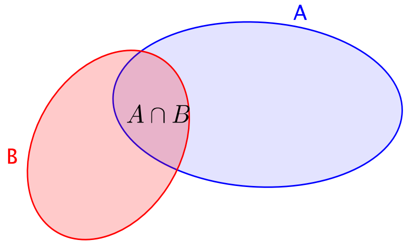
p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Rappresentazione insiemistica

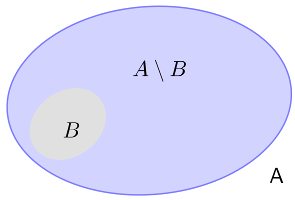
Gli insiemi possono essere rappresentati attraverso diagrammi di Eulero-Venn; è importante ricordare che l'aver disegnato un diagramma, non comporta necessariamente che gli insiemi rappresentati siano non vuoti.

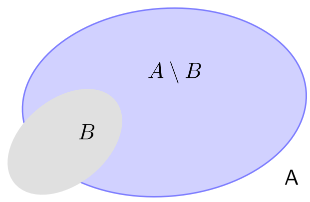
Dato un insieme A, un suo sottoinsieme C è un insieme tale che tutti gli elementi di C sono anche elementi di A. In tal caso, scriviamo C $\subseteq$ A.

Dati due insiemi A e B, si denota con **A∩B = {x | x ∈ A e x ∈ B}** l'insieme formato dagli elementi comuni di A e B: tale insieme è detto **intersezione di A e B**. L'insieme A∩B è un sottoinsieme sia di A che di B e può essere raffigurato come la parte più scura nella figura



L'insieme unione di A e B, denotato con A∪B, è invece l'insieme di tutti gli elementi che stanno in A o in B: **A∪B = {x | x ∈ A e x ∈ B}**
L'insieme complementare di B in A, denotato da A\B, è formato da tutti gli elementi di A che non sono in B: **A\B= {a ∈ A | a ∉ B}.**
La definizione di A\B si può applicare anche se B è un sottoinsieme di A.





Esercizio: Mostra che A\B = A\(A∩B)

Congiunzione

La ***congiunzione*** di due proposizioni p e q è una proposizione che è vera quando entrambe p e q sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni p e q viene denotata con $p \wedge q$, che si legge p e q.
La tavola della verità di $p \wedge q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

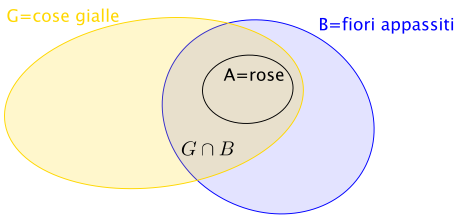
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \wedge p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \wedge q) \wedge r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\neg (p \wedge q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\neg p) \wedge q$.
- Determina la tavola della verità di $p \wedge (\neg q)$.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la congiunzione *p∧q: le rose sono gialle e appassite*. L'insieme delle rose gialle e appassite è l'intersezione dell'insieme delle rose gialle con l'insieme delle rose appassite.

Possiamo rappresentare la verità della congiunzione $p \wedge q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione

$p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'intersezione G∩B:



Disgiunzione

La ***disgiunzione*** di due proposizioni *p* e *q* è una proposizione che è falsa quando entrambe *p* e *q* sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

La tavola della verità di $p \vee q$, in base al valore di verità delle proposizioni *p* e *q*, è la seguente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni *p* e *q:*
a) la *disgiunzione inclusiva* quando *p* e *q* possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

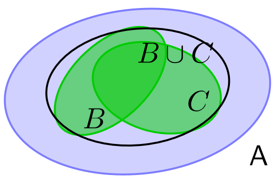
E' richiesto il biglietto o l'abbonamento

b) la *disgiunzione esclusiva* quando *p* e *q* non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con $p \dot{\vee} q$)

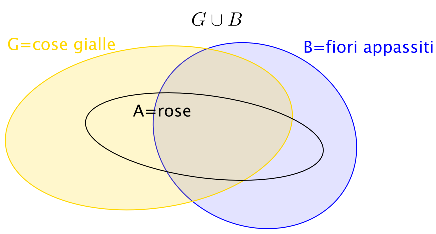
2>3 *oppure* 2<3

In italiano non si distingue in modo chiaro tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la disgiunzione $p \vee q$*: le rose sono gialle o appassite*. L'insieme delle rose che sono gialle o appassite coincide con l'unione dell'insieme B delle rose gialle e dell'insieme C delle rose appassite. La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui B∩C sia vuoto.



Possiamo rappresentare la verità della disgiunzione $p \vee q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione $p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'unione G∪B:



Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \vee p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \vee q) \vee r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \vee q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \vee q$.
- Determina la tavola della verità di $p \vee (\sim q)$.

Equivalenza

Due proposizioni sono ***(logicamente) equivalenti*** se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

Esempio: Mostra che $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ sono equivalenti.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.
Ad esempio, possiamo pensare
p: questo angolo è acuto
q: questo angolo è ottuso
$\neg(p \vee q)$: *non è vero che questo angolo è acuto o ottuso.*
$\neg p \wedge \neg q$: *questo angolo non è acuto e non è ottuso.*

Esempio Costruisci la tavola della verità per $(p \vee \neg q) \wedge r$.
Dobbiamo considerare tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni semplici coinvolte, e dobbiamo quindi considerare $2^3 = 8$ possibilità.

p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Esercizi Mostra che la congiunzione è commutativa, cioè $p \wedge q$ è equivalente a $q \wedge p$
- Mostra che la congiunzione è associativa, cioè $(p \wedge q) \wedge r$ è equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$
- Mostra che $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ sono equivalenti.

Proposizioni condizionali

Una ***proposizione condizionale*** è una proposizione della forma $p \Rightarrow q$, ove p e q siano due proposizioni. Ad esempio, se *p: il rubinetto è chiuso* e *q: non esce acqua dal mio lavandino*, otteniamo la proposizione condizionale *Se il rubinetto è chiuso, non esce acqua dal mio lavandino*.
Va osservato che non è rilevante che l'implicazione sia vera o falsa.
Esempi di una proposizione condizionale vera (a) Se x è un numero pari, allora $x + 1$ è un numero dispari
(b) Se $2 < 3$, allora $4 < 9$. (c) Se $3 < 2$, allora $9 < 4$.
Esempi di una proposizione condizionale falsa (a) Se x è un numero pari, allora $x + 2$ è un numero dispari. (b) Se $2 < 3$, allora $9 < 4$.

In una proposizione condizionale $p \Rightarrow q$, la proposizione p è detta ***antecedente (o ipotesi)***, mentre la proposizione q è detta ***conseguente (o tesi)***. Diciamo anche che p è ***condizione sufficiente*** per q, e che q è ***condizione necessaria*** per p.

La tavola della verità di una proposizione condizionale è la seguente (notare che, se l'ipotesi è falsa, si assume che l'implicazione sia vera sempre, interpretando l'implicazione come una promessa che non viene messa in discussione quando l'antecedente non accade):

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ad ogni proposizione condizionale $p \Rightarrow q$ risultano associate in modo formale altre proposizioni condizionali:

$q \Rightarrow p$ *l'implicazione inversa*

$\neg p \Rightarrow \neg q$ *l'implicazione contraria*

$\neg q \Rightarrow \neg p$ *l'implicazione contronominale*

Esempio: Considera la proposizione condizionale 'Se due rette del piano sono ortogonali, sono incidenti'. L'implicazione inversa è 'Se due rette del piano sono incidenti, allora sono ortogonali'. L'implicazione contronominale è 'Se due rette del piano non sono incidenti, non sono ortogonali.'

Esercizi:a) Trova l'implicazione inversa e la contronominale di 'Se corro, allora ho sete'.

b): Trova la negazione della proposizione 'Se corro, allora ho sete'.

Ogni proposizione condizionale è equivalente alla sua contronominale:

p	q	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\boldsymbol{\neg q \Rightarrow \neg p}$
V	V	F	F	**V**
V	F	V	F	**F**
F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	**V**

Esercizio: (a) Trova una implicazione condizionale vera la cui inversa sia falsa.

(b) $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge \neg q$.

(c) $\neg(p \wedge q)$ è equivalente a $p \Rightarrow \neg q$.

(d) $p \wedge (q \vee r)$ è equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(e) $p \vee (q \wedge r)$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Una ***coimplicazione*** $p \Leftrightarrow q$ è vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità. La corrispondente tavola della verità è:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Le coimplicazioni sono frequenti in matematica; le definizioni sono spesso coimplicazioni. ***Esempi***

(a) Un quadrilatero è un rettangolo se e solo se ha tutti gli angoli retti.

(b) $x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ or } x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ or } x = 4.$

Esercizio: $p \Leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Sitografia

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/economia/logicainsiemistica.pdf Prof. Garetto, Elementi di Logica,

https://www.youtube.com/watch?v=JczNoE43IuM proposizioni, negazione, tavole della verità

https://www.youtube.com/watch?v=_fjT7fnvttU congiunzione, tavole della verità

https://www.youtube.com/watch?v=lJX1AHKHFKU disgiunzione inclusiva, tavole della verità

https://www.youtube.com/watch?v=ehDBklEAx9Y disgiunzione esclusiva, tavole della verità

https://www.youtube.com/watch?v=Z7P-H5iA8QY implicazione

https://www.youtube.com/watch?v=QCnB4bi1ay0 doppia implicazione

Affermazioni aperte e quantificatori

Definizione Una ***affermazione aperta*** è una affermazione che coinvolge una o più variabili.

Esempi

(a) $5 \geq 3x - 2$

(b) Il bambino ha un quaderno rosso.

Denotiamo con $p(x)$ una affermazione che coinvolge una variabile, x, e con $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una affermazione aperta nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esempio $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$: $x_2 = 5x_1 - 2x_3 + 7x_4$

Una affermazione aperta non è né vera né falsa: essa diventa una proposizione solo quando sono sostituiti valori particolari alle variabili, o è definito l'insieme sul quale va valutata (detto universo).

Definizione L'*insieme di verità* di una affermazione aperta è la collezione degli oggetti di uno specifico 'universo' che rendono vera l'affermazione.

Esempio $p(x)$: $x < 3$

(i) Se l'universo è l'insieme dei numeri naturali, allora l'insieme di verità è $\{1, 2\}$.

(ii) Se l'universo è l'insieme dei numeri interi, l'insieme di verità è $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.\}$.

Definizione Fissata una affermazione aperta $p(x)$,

a) l'espressione $\forall x,\ p(x)$ si legge 'per ogni x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\forall$ viene detto ***quantificatore universale***.

b) l'espressione $\exists\, x,\ p(x)$ si legge 'per qualche x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\exists$ viene detto ***quantificatore esistenziale***.

c) L'espressione $\exists\,!\ x,\ p(x)$ si legge 'per uno ed un solo x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\exists$! viene detto ***quantificatore di esistenza e unicità*** (ed è un particolare quantificatore esistenziale).

Esempio Nell'universo dei numeri reali $\exists\, x,\ x^2 > 0$ è vera, mentre $\forall\, x, x^2 > 0$ è falsa (per $x = 0$ l'affermazione non è vera).

Nella geometria euclidea, è vera la proposizione *Data una circonferenza, esiste* ***uno ed un solo*** *punto equidistante da tutti i punti della circonferenza.'* Ci si riferisce al centro della circonferenza.

Nel linguaggio corrente, i quantificatori non sono sempre espressi con chiarezza.

Esempi

(1) "*Alcuni quadrilateri sono quadrati*" significa "$\exists\, x$, (x è un quadrilatero e x è un quadrato)".

(2) "*Tutti i quadrati hanno quattro lati.*" significa " Per tutti gli x, se x è un quadrato, allora x ha quattro lati." In generale, "Tutti i $p(x)$ sono $q(x)$." significa "$\forall\, x,\ (p(x) \Rightarrow q(x))$".

(3) "*Nessun gatto ama bagnarsi*" significa che "*Ogni gatto non ama bagnarsi*", cioè " Per tutti gli x, se x è un gatto, allora è falso che x ama bagnarsi."

(4) "*C'è un dottore*" può significare oppure "*C'è esattamente un dottore*" oppure "*C'è almeno un dottore*"

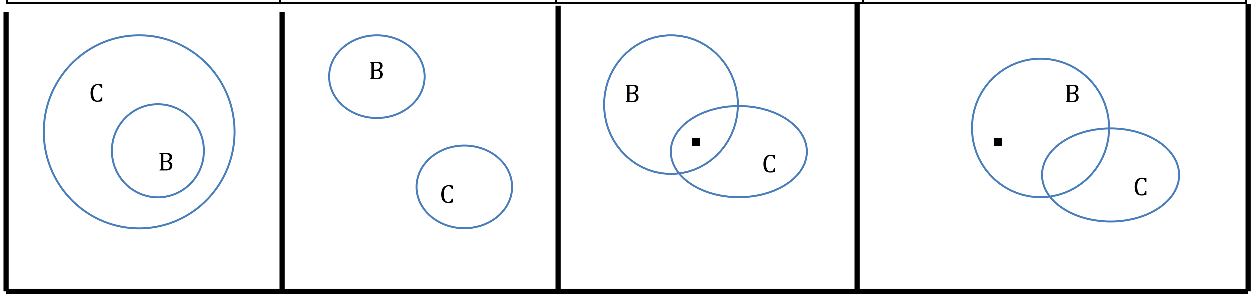
Frasi della forma: "Qualche x...", "Alcuni x..." verrano intesi nel senso di 'Esiste almeno un x....", non escludendo che tale x sia unico.

Le proposizioni aperte contenenti quantificatori sono suddivise in 4 differenti tipologie e vengono identificate da una vocale maiuscola A, I, E, O :

	Universale affermativa	***Esempi***	***Simbolo***
Universale affermativa	Tutti i B sono C Ogni B è C	Tutti i cani hanno la coda	A (è la prima vocale di **A**ffirmo)
Universale negativa	Nessun B è C Tutti i B non sono C Ogni B non è C	Nessun bambino ha il diario	E (è la prima vocale di N**e**go)
Particolare affermativa	Esiste un B che è C	Un bambino è seduto	I (è la seconda vocale di Aff**i**rmo)
Particolare negativa	Esiste B che non è C	Qualche bambino non ha lo zaino	O (è la seconda vocale di Neg**o**)

Possiamo rappresentare insiemisticamente queste proposizioni, scegliendo sempre la rappresentazione più generale. La presenza di un puntino nell'insieme significa che c'è almeno un elemento.

Ogni B è C	Nessun B è C	Esiste un B che è C	Esiste un B che non è C



Per memorizzare i tipi, è possibile fare riferimento alla figura detta 'quadrato delle opposizioni':

Universale affermativa A	Universale negativa E
I Particolare affermativa	O Particolare negativa

Definizione Due affermazioni aperte, relative allo stesso universo, sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di verità.

Esempio $x \leq 3$ è equivalente a $x < 4$ nell'universo dei numeri naturali, ma non è equivalente nell'universo dei numeri reali.

Teorema Per ogni affermazione aperta $p(x)$,
(1) Negare che una proposizione sia vera per tutti gli x equivale a mostrare che esiste un x per cui la proposizione è falsa:

$$\neg(\forall\, x,\, p(x)) \text{ è equivalente a } \exists\, x,\, \neg\, p(x)$$

(2) Negare l'esistenza di un x per il quale la proposizione sia vera, equivale a mostrare che, per tutti gli x, la proposizione è falsa:

$$\neg(\exists\, x,\, p(x)\,) \quad \text{è equivalente a} \quad \forall\, x,\, \neg\, p(x)$$

Dimostrazione (1) $\neg(\forall\, x,\, p(x))$ è vero se e solo se $(\forall\, x,\ p(x))$ è falso
se e solo se l'insieme di verità di $p(x)$ non è tutto l'universo
se e solo se l'insieme di verità di $\neg p(x)$ è non vuoto,
se e solo se $\exists\, x,\, \neg\, p(x)$ è vero.

(2) Svolgere per esercizio (simile alla precedente).

Osserva: *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

p : tutti i bambini parlano $\neg$*p:non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla*
q : non vado mai in piscina $\neg$*q:qualche volta vado in piscina/almeno una volta vado in piscina*
r: un alunno partecipa alla gara $\neg$*r:nessun alunno partecipa alla gara*
t:nessun genitore mi ha parlato $\neg$*t:mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato*

Sillogismi condizionali

Il ragionamento è un movimento della mente tramite il quale passiamo da alcune affermazioni – confrontate tra loro – alla formulazione di una nuova affermazione, che segue necessariamente da quelle precedenti.
Un ***sillogismo*** (ragionamento concatenato) è un argomento formato da due proposizioni (dette *premesse*) e una terza proposizione, detta *conclusione*. Diciamo che la conclusione *discende logicamente* dalle premesse, o è *logicamente valida*, quando la conclusione resta vera in *tutti* i casi nei quali le premesse sono vere.
In un ***sillogismo condizionale***, una delle due premesse è una proposizione condizionale, mentre l'altra premessa afferma la verità o la falsità di uno tra antecedente o conseguente. La premessa che è una proposizione condizionale è detta ***premessa maggiore*** (ed è della forma *se* p *allora* q), mentre l'altra premessa è detta ***premessa minore*** (ed è data dalla proposizione p in forma affermativa o negativa oppure dalla proposizione q in forma affermativa o negativa). La ***conclusione*** può essere la proposizione p in forma affermativa o negativa oppure la proposizione q in forma affermativa o negativa (ma p e q non coincidono).
In un sillogismo condizionale, per discutere se la conclusione è logicamente valida, si suppone che le due premesse siano vere (indipendentemente dal fatto che a volte non sembrano ragionevoli) e si verifica se la verità della conclusione segue utilizzando solo le informazioni date dalle premesse.

Esempi:

Premessa maggiore: Se mi annoio, vado a teatro. *Premessa minore*: Mi annoio *Conclusione*: Vado a teatro	*Premessa maggiore*: Se indosso il cappotto lungo, inciampo. *Premessa minore*: Inciampo *Conclusione*: indosso il cappotto lungo
in questo caso, la conclusione è valida	conclusione non valida, perchè i motivi per cui inciampo possono essere tanti. E' possibile che io indossi il cappotto lungo, e la conclusione affermi un fatto vero, ma il ragionamento non è corretto.

Si possono presentare solo quattro casi di premesse per un sillogismo condizionale (le due premesse vengono raccolte da una parentesi grafa perché stiamo supponendo che siano entrambe vere):

$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
Modus ponens (affermazione dell'antecedente)	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens (negazione del conseguente)**

Il fatto che sia possibile dedurre una conclusione logicamente corretta dipende solo dalla struttura del sillogismo condizionale, e non dal contenuto delle proposizioni coinvolte.

	Modus ponens	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens**
Premesse	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
conclusione valida	q	non ci sono conclusioni valide	non ci sono conclusioni valide	$\neg q$

Sillogismi categorici

Riprendiamo la classificazione già appresa sulle tipologie delle proposizioni aperte semplici che contengono quantificatori (le chiamiamo **asserzioni categoriche**):

1. ***Universale affermativa: "tutti i B sono C"*** L'enunciato afferma che ogni elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Tutti gli italiani sono europe*i.
Si designa l'enunciato universale affermativo con la lettera **A** (prima vocale di **A**FFIRMO)

2. ***Particolare affermativa: "qualche B è C"*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Qualche italiano è biondo.*
Si designa l'enunciato particolare affermativo con la lettera **I** (seconda vocale di AFF**I**RMO)

3. ***Universale negativa: "nessun B è C"*** L'enunciato afferma che nessun elemento che ha la proprietà B ha la proprietà C. Esempio: *Nessun corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato universale negativo con la lettera **E** (prima vocale di N**E**GO)

4. ***Particolare negativa: "qualche B non è C"*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B non ha la proprietà C. Esempio: *Qualche corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato particolare negativo con la lettera **O** (seconda vocale di NEG**O**)

Un sillogismo categorico è dato da due premesse e una conclusione, ciascuna delle quali sia una asserzione categorica. Il ***soggetto*** e il ***predicato*** della conclusione devono comparire uno in una premessa, e l'altro nell'altra: *si chiama **premessa maggiore** la premessa che contiene il predicato*, ***premessa minore** la premessa che contiene il soggetto*. Un ulteriore termine (detto ***termine medio***) compare in ciascuna delle premesse ma non nella conclusione. La conclusione è detta *logicamente valida* se è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere.

Il ***modo*** di un sillogismo in forma normale è dato dai tipi delle proposizioni categoriche in forma normale che esso contiene: A, E, I, O. Il modo viene identificato da una sequenza di tre lettere date in ordine definito, di cui la prima indica il tipo della premessa maggiore del sillogismo, la seconda il tipo della premessa minore, la terza il tipo della conclusione.
La ***figura*** di un sillogismo categorico indica la posizione del termine medio nelle premesse, posizione che può variare. Ci possono essere solo 4 possibili figure diverse in cui rispettivamente il termine medio può essere:

- prima figura: soggetto della premessa maggiore e predicato della premessa minore;
- seconda figura: predicato di entrambe le premesse;
- terza figura: soggetto di entrambe le premesse;
- quarta figura: predicato della premessa maggiore e soggetto della premessa minore.

Ci sono 64 modi diversi e 256 forme distinte (in base a modo e figura) possibili dei sillogismi categorici. Tuttavia, solo in pochi casi la conclusione è logicamente valida.

Esempi di sillogismi categorici e loro classificazione

	modo	**figura**	**conclusione valida**
Premessa maggiore: Tutti gli studenti amano cantare. *Premessa minore*: Mario è uno studente. *Conclusione*: Mario ama cantare.	A I I	I°	SI
Premessa maggiore: Qualche idraulico è giovane. *Premessa minore*: Qualche insegnante è giovane. *Conclusione*: Qualche insegnante è un idraulico.	I I I	II°	NO
Premessa maggiore: Qualche barbiere non è raffreddato *Premessa minore*: Tutti i barbieri sono biondi. *Conclusione*: Qualche biondo non è raffreddato.	OAO	III°	SI
Premessa maggiore: Qualche consigliere è avvocato. *Premessa minore*: Tutti gli avvocati sono laureati. *Conclusione*: Qualche laureato è un consigliere.	IAI	IV°	SI

Esercizio Per ciascuno dei sillogismi ipotetici nell'elenco, discuti se la conclusione è logicamente corretta:

a. Se supero l'esame della patente mi tingo i capelli.
   Ho superato l'esame della patente.
   Conclusione: Mi tingo i capelli.
b. Se non piove esco per una scampagnata.
   Piove.
   Conclusione: Non esco.
c. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.
   Non vado al cinema.
   Conclusione: Sono arrivato in ritardo.

Esercizio Per ciascuna delle coppie di premesse, discuti se è possibile trovare una conclusione logicamente corretta e, in caso positivo, trascrivila completando il sillogismo ipotetico:

d. Se non supero l'esame della patente mi tingo i capelli.
   Ho superato l'esame della patente.
   Conclusione: ……………………..
e. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.
   Vado al cinema.
   Conclusione: ………………..

Esercizio Per ciascuno dei sillogismi categorici, determina modo e figura, fornisci una rappresentazione insiemistica e discuti se la conclusione è logicamente corretta:

a. Tutti gli oleandri sono arbusti.
   Qualche arbusto è una pianta sempreverdi.
   Conclusione: Tutte le piante sempreverdi sono piante oleandri.
b. Qualche elefante è addormentato.
   Giorgio è un elefante.
   Conclusione: Giorgio è addormentato.
c. Nessun musicista è un muratore.
   Alcuni operai edili sono muratori.
   Alcuni operai edili non sono musicisti.

Esercizio Scrivi un sillogismo categorico per ciascuna figura.

Esercizio Per ciascuna coppia proposta di premesse, completa inserendo una conclusione e stabilisci se la conclusione è logicamente corretta:

a. Tutti gli autoveicoli devono rispettare il codice stradale.
   Tutti autobus sono autoveicoli.
   ....
b. I capelli sono sottili.
   Qualche capello è biondo.
   ....
c. Tutti i roditori sono mammiferi.
   Alcuni animali non sono roditori.
   ....
d. Tutti i roditori sono mammiferi.
   Alcuni animali non sono mammiferi.
   ....
e. Nessun ladro è una persona onesta.
   Gianni è un ladro.
   ....
f. Nessun ladro è una persona onesta.
   Gianni non è un ladro.
   ....

Introduzione a una teoria assiomatica materiale

Una teoria assiomatica (o, sistema assiomatico) comprende il seguente insieme di informazioni:

1. Un elenco di **termini primitivi (o indefiniti)**, cioè un elenco di parole per le quali non viene fornita una descrizione precisa, ma solo una spiegazione. Le parole in questo elenco vengono utilizzate nella teoria successiva come se fossero noti e condivisi da tutti.
2. Un elenco di **assiomi** (detti anche **postulati**): sono enunciati che illustrano le proprietà dei termini primitivi e le loro relazioni. Tali enunciati vengono considerati veri.
3. Un elenco di **regole logiche**: queste sono le uniche regole da utilizzare.

A partire da questi dati, è possibile introdurre altri termini (ma solo se definiti con precisione) e altri enunciati (ma solo se essi possono essere dimostrati utilizzando solo le regole logiche specificate e gli assiomi):

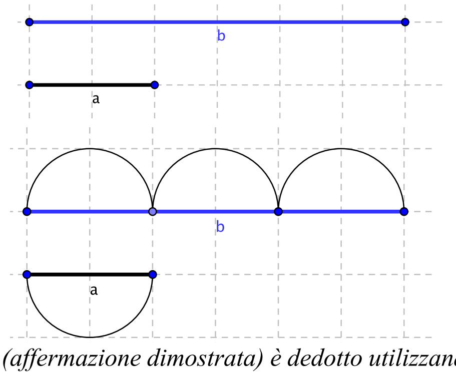
4. Le **definizioni**: un elenco di parole (che può essere allungato a piacere) di termini che vengono univocamente precisati, utilizzando i termini primitivi, gli assiomi o le definizioni introdotte in precedenza. Le definizioni rendono più corti ed efficaci gli enunciati.
5. I **teoremi**, cioè enunciati per i quali è possibile dimostrare che sono veri usando solo i temini primitivi, gli assiomi, le regole logiche. In una dimostrazione, è possibile utilizzare anche teoremi già dimostrati in precedenza.

Per precisione, bisognerebbe inserire nella struttura assiomatica anche la lingua nella quale ci esprimiamo. Inoltre, utilizzeremo spesso, senza dichiararlo, i numeri reali, parte della teoria degli insiemi, la logica aristotelica.
Eventuali raffigurazioni possono essere utilizzate solo come supporto, e non costituiscono una dimostrazione.

Un sistema assiomatico è **consistente (o coerente)** se non contiene contraddizioni (cioè se non contiene enunciati che sono veri e falsi contemporaneamente).
Un **modello** di un sistema assiomatico si ottiene assegnando ai termini primitivi un significato, in modo che valgano gli assiomi. Esistono modelli concreti (ottenuti utilizzando oggetti e relazioni concreti) e modelli astratti. **Se è possibile trovare un modello concreto per un sistema assiomatico, allora il sistema è consistente**.
Un sistema assiomatico è **completo** se, comunque fissato un enunciato, è possibile dimostrare che esso è vero o è falso. Il sistema assiomatico dell'aritmetica non è completo (Gödel).
In un sistema assiomatico, un assioma è **indipendente** dagli altri se non può essere dedotto come un teorema utilizzando solo gli altri assiomi.
Due modelli di uno stesso sistema assiomatico sono **isomorfi** se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi, tale che conservi tutte le relazioni.

Esempi di definizioni

a) *Un numero intero n è* multiplo di *un numero intero m se il numero n può essere ottenuto moltiplicando m per un numero intero, cioè se esiste un opportuno numero intero, che chiamiamo k, tale che n= mk.*
Diciamo anche che *m divide n*, che *m è un divisore di n*. Si utilizza il simbolo $m \mid n$, da leggere '*m* divide *n*'.
b) *Un numero intero n è* pari *se è multiplo di 2.*
c) *Un numero intero n è* dispari *se esiste in numero intero k tale che n= 1+mk.*



a divide b

Un **teorema** *(affermazione dimostrata) è dedotto utilizzando tautologie o argomentazioni valide a partire da una lista di termini non definiti (concetti primitivi), termini definiti (definizioni), ipotesi, teoremi dimostrati in precedenza.*

Definizione. *Un* **argomento** *consiste di premesse e di una conclusione. Diciamo che l'argomento è (logicamente)* ***valido*** *se e solo se la conclusione è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere. Se le premesse sono $p_1, \ldots, p_n$ e la conclusione è q, l'argomento è valido se e solo se $(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ è una tautologia.*

Esempi *(a) Un argomento valido tramite il* modus ponens*: supponiamo di sapere che*
$p \Rightarrow q$*:* Se un parallelogramma ha un angolo retto, allora è un rettangolo
e che
p*:* Il parallelogramma considerato ha un angolo retto.
Possiamo concludere che
Il parallelogramma considerato è un rettangolo.

(b) Un argomento valido per transitività*: supponiamo di sapere*
$p \Rightarrow q$*:* Se un triangolo è isoscele, allora due suoi lati sono congruenti.
e che:
$q \Rightarrow t$*:* Se in un triangolo due lati sono congruenti, allora anche due angoli sono congruenti.
Possiamo allora concludere che
$p \Rightarrow t$*:* Se un triangolo è isoscele, due suoi angoli sono congruenti.

Definizione. ***La dimostrazione*** *di un teorema è una successione di argomenti validi che utilizzano le premesse del teorema e il sistema assiomatico.*

Le giustificazioni permesse all'interno di una dimostrazione sono:

1) per ipotesi
2) per ipotesi assurda
3) per un assioma
4) per un teorema precedente
5) per definizione
6) per un passo di una dimostrazione precedente
7) per una regola di logica

Per provare che un enuciato è falso, è sufficiente fornire un controesempio.

Esempio di sistema assiomatico: **Il Club delle Tartarughe** *[Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991, pp.30-34]*

Termini primitivi*: persona, insieme, appartenenza.*

Definizioni*:* *a) Il* Club delle Tartarughe *è un insieme di una o più persone.*
b) Una persona appartenente al Club è detta Tartaruga.
c) I comitati *sono insiemi di una o più Tartarughe.*
d) Una Tartaruga appartenente a un comitato è detta membro *di quel comitato.*
e) Due comitati sono uguali *se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo.*
f) Due comitati che non hanno membri in comune sono detti disgiunti.

Assiomi *1. Ogni Tartaruga è membro di almeno un comitato;*
2. Per ogni coppia di due distinte Tartarughe esiste uno ed uno solo comitato di cui entrambe sono membri;
3. Per ogni comitato esiste uno ed uno solo comitato disgiunto da esso.

Utilizzando solo gli assiomi e le regole logiche, è possibile dedurre alcuni enunciati, che vengono chiamati 'teoremi'.

Teorema*: Ogni Tartaruga è membro di almeno due comitati.*

Dimostrazione [provare a farla prima di leggere il seguito]
Passo1: Sia "t" una Tartaruga. [ipotesi, definizione]
Passo 2: t è membro di un comitato "C" [Assioma 1, definizione]
Passo 3. Esiste un comitato, che indichiamo con "D", che è disgiunto da C. [Assioma 3, definizione]
Passo 4. Sia "u" un membro di D. [u esiste per definizione di comitato]
Passo 5. u non è membro di C. [Definizione di "disgiunto"]
Passo 6. Esiste un comitato, che indichiamo con "E", di cui sia t che u sono membri. [Assioma 2, definizione].
Passo 7. I comitati C ed E non sono uguali. [Definizione di "uguale"; 5, 6]
Passo 8. t è membro sia di C che di E. [passi 2, 6]
Passo 9. t è membro di almeno due Comitati. [Passi 7, 8]
Passo 10. Di conseguenza ogni Tartaruga è Membro di almeno due comitati. [generalizzazione: i passi precedenti valgono per ogni tartaruga]

Esercizi 1) Nel sistema del Club delle Tartarughe, mostra il *Teorema 2: Ogni comitato ha almeno due membri.*

2) Considera il seguente sistema assiomatico

Assioma1. Ogni formica ha almeno 2 case.
Assioma 2. Ogni casa ha almeno due formiche.
Assioma 3. Esiste almeno una formica.

a) Individua quali sono i termini primitivi in questo sistema assiomatico.
b) Dimostra che c'è almeno una casa.
c) Mostra che ci sono almeno due 2 formiche.
d) Determina quattro modelli non isomorfi.

3) Osserva che i termini utilizzati nelle definizioni sono irrilevanti. Considera, ad esempio, il sistema assiomatico:

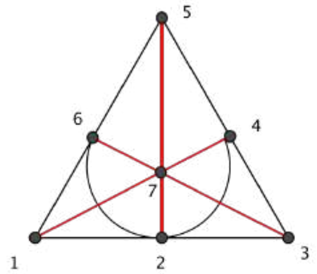
Termini primitivi*: persona, insieme, appartenenza.*
Definizioni*: Il Club di Facebook è un insieme di uno o più persone.*
Una persona appartenente al Club di Facebook è detta amico.
I gruppi sono insiemi di uno o più amici.
Un amico appartenente a un gruppo è detto componente di quel gruppo.
Due gruppi sono uguali se ogni componente del primo è anche componente del secondo, e se ogni componente del secondo è anche componente del primo.
Due gruppi che non hanno componenti in comune sono detti disgiunti.
Assiomi *1. Ogni amico è componente di almeno un gruppo;*
2. Per ogni coppia di due distinti amici esiste uno ed uno solo gruppo di cui entrambi sono componenti;
3. Per ogni gruppo esiste uno ed uno solo gruppo disgiunto da esso.
Mostra che:
Teorema1*: Ogni amico è componente di almeno due gruppi.*
Teorema 2*: Ogni gruppo ha almeno due componenti.*

Ulteriore esempio di sistema assiomatico: **Il Piano di Fano**
Gino Fano (1871–1952), un matematico italiano, ha fornito quello che è considerato il primo esempio di sistema assiomatico 'geometrico' relativo a un modello formato da un numero finito di punti. Tale esempio ha molteplici applicazioni. Illustriamo solo una parte dell'esempio; tale parte viene detta Piano di Fano.
Assiomi per il Piano di Fano
Termini primitivi: punto, linea, incidenza.
Assiomi 1. *Esiste almeno una linea.*
  2. *Ogni linea ha esattamente tre punti incidenti ad essa.*
  3. *Non tutti i punti sono incidenti alla stessa linea.*
  4. *C'è una e una sola linea incidente ogni coppia di punti distinti.*
  5. *C'è almeno un punto incidente a ogni coppia di linee distinte.*

Due modelli isomorfi soddisfano gli assiomi del Piano di Fano:
Primo modello: è illustrato dalla seguente tabella

punti	*linee*
A, B, C, D, E, F, G	ADB, AGE, AFC, BEC, BGF, CGD, FDE

Secondo modello:



Nella Figura, i punti *sono 7 piccoli cerchietti e le linee sono sei segmenti di retta (ciascuno dei quali contiene tre punti) e una porzione di circonferenza (contenente 4, 2, 6).*
Esercizio 1: *Nel piano di Fano, mostra il* **Teorema 1:** Due distinte linee incidono in esattamente un punto.
Dim. Siano *r* e *s* due distinte linee. Per l'Assioma 5, esiste (almeno) un punto A incidente sia *r* che *s*. Supponiamo che ci sia un secondo punto, B, diverso da A, incidente sia *r* che *s*. Per l'Assioma 4, le linee *r* e *s* coincidono (perché una sola linea passa per A e B), ma questo contraddice l'ipotesi che *r* e *s* siano linee distinte. Dunque *r* e *s* si intersecano in un unico punto. Possiamo quindi affermare che due linee distinte qualsiasi incidono in un unico punto.

Esercizio 2: *Il piano di Fano è formato da 7 punti.*
Dim. Per l'Assioma 1, esiste (almeno) una linea *t*. Per l'Assioma 2, esistono esattamente 3 punti A, B, C incidenti la linea *t*. Per l'Assioma 3, esiste (almeno) un punto D che non incide la linea *t*. Dunque ci sono almeno 4 punti A, B, C, e D. Poiché D non incide *t*, per l'Assioma 4 c'è una linea *a* diversa da *t* che incide A e D. Allo stesso modo, ci sono una linea *b* diversa da *t* che incide B e D e una linea c diversa da *t* che incide C e D. Le rette *a*, *b* e c sono distinte tra loro e distinte da *t* (per gli Assiomi 2 e 3). Per l'Assioma 2, la linea *a* incide un terzo punto A' diverso da A e da D. Analogamente, per l'Assioma 2, la linea *b* incide un terzo punto B' diverso da B e da D e la linea c incide un terzo punto C' diverso da C e da D. Per l'assioma 4 nessuno tra i punti A', B', C' può coincidere con A, B, C (altrimenti dovrebbero coincidere coppie di linee che sappiamo essere distinte).
Dunque nel piano ci sono almeno 7 punti: A, B, C, A', B', C', e D. Dobbiamo mostrare che non ci sono altri punti. Supponiamo che ci sia anche un altro punto Q diverso dai precedenti. Il punto Q non incide *t*, poiché A, B, e C sono gli unici punti che incidono *t* per l'Assioma 2. Per il teorema 1, la linea *t* e la linea che incide D e Q incidono esattamente in un punto, R. Tale punto R (per l'Assioma 2) deve coincidere con uno dei punti A, B, C (che sono i soli punti che incidono *t*). Supponiamo che R = A. Poiché A' appartiene alla linea a per A e P e il punto A = R appartiene alla linea per D e Q, i quattro punti distinti R = A, A', D e Q risulterebbero incidere la stessa linea, contraddicendo l'Assioma 2. In modo analogo, si esclude che R possa coincidere con B o con C. Quindi, i punti nel piano di Fano sono 7.
Esercizi
  a) *Mostra il Teorema 3:* Ogni punto nel piano di Fano incide esattamente 3 linee distinte.
  b) *Mostra il Teorema 4:* Nel piano di Fano ci sono esattamente 7 linee.

Bibliografia: Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991
Sitografia: http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C1AxiomSystem/AxSysWorksheet.htm - E1_2

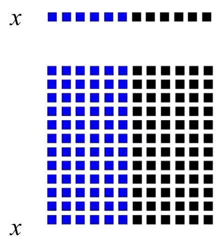
Argomentazione valida e dimostrazioni dirette e indirette

In base agli argomenti che vengono utilizzati, le dimostrazioni sono dette **dirette** o **indirette**. Talora la dimostrazione viene articolata e suddivisa in vari casi, qualora l'ipotesi p lo renda vantaggioso. Per fornire esempi, si utilizzeranno gli assiomi e alcune definizioni dell'aritmetica e dell'insiemistica, utilizzati e studiati nella carriera pre-universitaria.

*Schema di una **dimostrazione diretta** dell'implicazione $p \Rightarrow q$*
Enunciato: $p \Rightarrow q$
Dimostrazione
Supponi p
.....
....
Allora q. ■

Esempi di dimostrazione diretta

a) *Se $x \in \mathbb{Z}$ è pari, allora x^2 è pari.*
Dimostrazione. Supponiamo che x sia pari.
Per definizione di numero pari sappiamo che esiste un numero intero k tale che $x=2k$. Dunque:
$x^2 = x \cdot x = (2k) \cdot (2k) =$ [sostituendo l'espressione $x=2k$]
$= 2(k \cdot 2k) =$ [per la proprietà associativa della moltiplicazione]
$= 2 \cdot h$ [ponendo $h = k \cdot 2k$]
Osserviamo che h è un numero intero, e dunque $2 \cdot h$ è un numero pari, per definizione di numero pari.
Concludiamo che x^2 è un numero pari. ■
Rappresentazione grafica della dimostrazione, che ne illustra la motivazione: se n è un numero pari, è possibile dividerlo in parti uguali (in modo che ciascuna parte sia un numero intero). Raffiguriamo in nero e in blu le due parti ottenute.

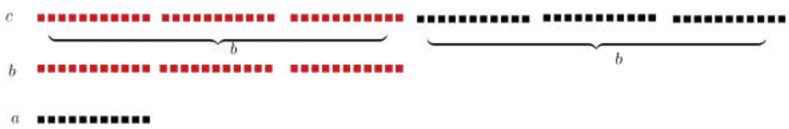


Il numero x^2 può essere raffigurato tramite un quadrato di lato x. Colorando opportunamente le colonne, si 'vede' che x^2 è pari, perché può essere diviso in due parti uguali (in modo tale che ciascuna sia un numero intero)

Si intuisce che anche il lato sinistro verticale blu del quadrato (che è uguale a x) è pari, e dunque può essere diviso a metà. Colorando differentemente tali due metà e le 'righe' che da esso nascono, il quadrato risulta diviso in quattro parti uguali. Dimostrare per esercizio che s*e $x \in \mathbb{Z}$ è pari, allora x^2 è multiplo di 4.*

b) *Se $x \in \mathbb{Z}$ è dispari, allora x^2 è dispari.*
Dimostrazione. Supponiamo che x sia dispari.
Per definizione di numero dispari sappiamo che esiste un numero intero k tale che $x=1+2k$. Dunque:
$x^2 = x \cdot x = (1+2k) \cdot (1+2k) =$ [sostituendo l'espressione $x=1+2k$]
$= 1+2k+(2k) \cdot (1+2k) =$ [per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma]
$= 1+2k+(2k)+(2k) \cdot (2k)$ [per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma]=
$= 1+2 \cdot (2k)+(2k) \cdot (2k) =$ [sommando due termini uguali]
$= 1+2 \cdot (2k)+2 \cdot (k \cdot 2k) =$ [per la proprietà associativa del prodotto]
$= 1+2 \cdot [2k + k \cdot 2k]$ [raccogliendo a fattor comune, per la proprietà distributiva]
$= 1+2 \cdot h$ [ponendo $h = 2k + k \cdot 2k$]
Osserviamo che h è un numero intero, e dunque $1+2 \cdot h$ è un numero dispari per definizione di numero dispari.
Concludiamo che x^2 è un numero dispari. ■

c) *Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a|b$ e $b|c$, allora $a|c$.*
Dimostrazione. Supponiamo che gli interi a, b, c siano tali che $a \mid b$ and $b \mid c$. Per definizione di divisibilità, sappiamo che $a \mid b$ significa che esiste un intero k tale che $b = ak$. Analogamente, $b \mid c$ significa che esiste un intero h tale che $c = bh$. Dunque, $c = bk = (ah)k = a(hk)$, ove l'ultima uguaglianza segue dalla proprietà associativa della moltiplicazione. Poniamo $t = hk$ e osserviamo che t è un numero intero e dunque il numero at è divisibile per a (cioè $a \mid at$). Poiché $c = at$, concludiamo che $a \mid c$. ■



Esempi di dimostrazione diretta per casi

a) *Se $x \in \mathbb{Z}$ non è multiplo di 3, allora x^2 non è multiplo di 3.*
Dimostrazione. Supponiamo che $x \in \mathbb{Z}$ non sia multiplo di 3. Allora si presentano due differenti casi: o esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x= 1+3k$, oppure esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $x= 2+3h$.
PRIMO CASO: Supponiamo che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x= 1+3k$.
Allora, $x^2= (1+3k)^2 =$ (per ipotesi)
$= (1+3k)(1+3k) =$ (per definizione di potenza)
$= 1+3k+ 3k(1+3k) =$ (per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma)
$= 1+3[k+ k(1+3k)]$ (per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma)
$= 1 + 3k'$ posto $k'= [k+ k(1+3k)]$
Osservo che $1 + 3k'$ non è multiplo di 3 (perche' si ottiene da un mutiplo di 3 sommandogli 1)
Dunque, nel primo caso, x^2 non è multiplo di 3.
SECONDO CASO: Supponiamo che esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $x=2+3h$.
Allora, $x^2= (2+3h)^2 =$ (per ipotesi)
$= (2+3h)(2+3h) =$ (per definizione di potenza)
$= 4+6h+ 3h(2+3h) =$ (per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma)
$= 1+3+6h+ 3h(2+3h) =$
$= 1+3[1 +2h+ h(2+3h)]$ (per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma)
$= 1 + 3h'$ posto $h' = [1 +2h+ h(2+3h)]$
Osservo che $1 + 3h'$ non è multiplo di 3 (perche' si ottiene da un mutiplo di 3 sommandogli 1)
Dunque, nel secondo caso, x^2 non è multiplo di 3.
Poiché sono stati analizzati tutti i possibili casi, concludiamo che x^2 non è multiplo di 3. ■

***Esercizi**:* Siano *n* e *m* numeri naturali. Tramite una dimostrazione diretta dimostra i seguenti enunciati.
a) Se n è multiplo di 3, anche nm è multiplo di 3.
b) Il numero $n(n+1)$ è pari.
c) Il numero $n(n+1)(n+2)$ è multiplo di 3.
d) Se n è multiplo di 3, anche $n^2 - n$ è multiplo di 3.
e) Se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
f) Se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
g) Se n e m sono multipli di 3, anche $n+m$ è multiplo di 3.

Le dimostrazioni che non sono dirette, vengono chiamate indirette. Le dimostrazioni indirette possono essere di vario tipo. Una tra le possibili modalità di dimostrazione indiretta è la **dimostrazione per contrapposizione**: poiché sappiamo che $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente alla contronominale $\neg q \Rightarrow \neg p$, dimostriamo che $\neg q \Rightarrow \neg p$ e ne deduciamo che anche $p \Rightarrow q$ è vera.

*Schema di una **dimostrazione indiretta per contrapposizione** dell'implicazione $p \Rightarrow q$*
Enunciato: $p \Rightarrow q$
Dimostrazione
Supponi $\neg q$
…..
….
Allora $\neg p$. ■

Esempio: Confronto tra dimostrazione diretta e indiretta dello stesso enunciato:

Dimostriamo il seguente enunciato. *Se $x \in \mathbb{Z}$ è un numero tale che $5x + 7$ è pari, allora x is dispari.*

***Dimostrazione diretta**. Supponiamo che $5x + 7$ sia pari. Per definizione di numero pari sappiamo che esiste un numero intero k tale che $5x+7=2k$, e dunque $5x=2k-7$. Ricaviamo che*

$$x=2k-7-4x= 1-8+2k-4x = 1+ 2\cdot(-4+k-2x).$$

Posto $h = -4+k-2x$, notiamo che h è un numero intero e che $1+2h$ è un numero dispari. Poiché $x= 1+2h$, concludiamo che x è dispari. ■

***Dimostrazione indiretta per contrapposizione**. Supponiamo che x sia un numero intero che non sia dispari. Allora x è pari, e dunque esiste un numero intero k tale che $x = 2k$. Pertanto:*

$$5x + 7 = 5\cdot(2k) + 7 =10k+7=1 + 2\cdot(5k+3).$$

Posto $t = 5k+3$, notiamo che t è un numero intero e che $1+2t$ è un numero dispari. Poiché $5x + 7 = 1+2t$, concludiamo che $5x + 7$ è dispari. ■

Esempio di dimostrazione indiretta per contrapposizione:

a) *Sia n un numero naturale tale che* $2 \mid n^2$*. Allora* $2 \mid n$*.*
Dimostrazione: supponiamo che non sia vero che $2|n$*, cioè supponiamo che n sia dispari. Ma allora esiste un numero naturale h tale che* $n= 1+2h$*. Ne segue che* $n^2 = (1+2h)^2 = 1+2h + 2h+2 \cdot 2h^2= 1+2\,(2h+ 2h^2)$ *è un numero dispari. Dunque non è vero che* $2|n^2$*. Per contrapposizione, segue che, se* $2 \mid n^2$*, allora* $2 \mid n$*.*

b) *Siano* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tali che 7 non divide ab. Allora, 7 non divide a e 7 non divide b.*
Dimostrazione. Supponiamo che non sia vero che '7 non divide a e 7 non divide b'. Allora, deve accadere che 7 divide a oppure 7 divide b, cioè $7 \mid a$ *o* $7 \mid b$*. Consideriamo separatamente i due casi (che non si autoescludono).*
PRIMO CASO: supponiamo che $7 \mid a$*; sappiamo dunque che esiste un intero k tale che* $a = 7k$*; concludiamo che* $ab = (7k)\, b= 7\,(kb)$ *e quindi* $7 \mid ab$*.*
SECONDO CASO: supponiamo che $7 \mid b$*; sappiamo dunque che esiste un intero h tale che* $b = 7h$*; concludiamo che* $ab = a\,(7h) = (a7)\, h =7(ah)$ *e quindi* $7 \mid ab$*.*
In entrambi i casi abbiamo concluso che $7 \mid ab$*; dalla negazione del conseguente, abbiamo quindi mostrato la negazione dell'antecedente. Possiamo quindi concludere che l'enunciato da dimostrare è vero.* ■

Un modo per articolare una dimostrazione indiretta è detto **dimostrazione per assurdo o per contraddizione**: per mostrare che $p \Rightarrow q$, si suppone che p sia vera, ma la tesi q sia falsa; a partire da queste assunzioni, si determina una proposizione r della quale si puo mostrare contemporaneamente sia che r è vera, sia che r è falsa: dunque r deve essere contemporaneamerte vera e falsa, e questo è impossibile. Si deduce che, allora, quando p è vera, anche q deve necessariamente essere vera, e dunque $p \Rightarrow q$.

Schema di una ***dimostrazione indiretta per assurdo (o per contraddizione)*** *dell'implicazione* $p \Rightarrow q$
Enunciato: $p \Rightarrow q$
Dimostrazione
Supponi p *e* $\neg q$ (*cioè* $p \wedge \neg q$*. L'ipotesi* $\neg q$ *è detta ipotesi assurda o ipotesi per assurdo*)
…..
….
Allora $r \wedge \neg r$ *per una opportuna proposizione r.*
Dunque $p \Rightarrow q$ ■

Esempi di dimostrazione indiretta per assurdo

a) Se A e B sono due insiemi, allora $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$
Dimostrazione per assurdo.
Supponiamo che A e B siano due insiemi. Supponiamo per assurdo che l'intersezione $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$ non sia vuota. Supponiamo quindi che ci sia un elemento x appartenente a $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$. Poiché x appartiene all'intersezione $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$, si deve avere che x appartiene sia a $(A\setminus B)$ che a $(B\setminus A)$. Allora
$x \in (A\setminus B)$ significa che $x \in A$ e $x \notin B$: in particolare, $x \in A$.
$x \in (B\setminus A)$ significa che $x \notin A$ e $x \in B$: in particolare, $x \notin A$.
Abbiamo mostrato contemporaneamente che $x \in A$ e $x \notin A$, trovando una contraddizione. Dunque, l'ipotesi assurda che $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$ non fosse vuota è falsa, e dunque $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$. ■

b) Se a, b sono due numeri naturali tali che $ab > 16$ allora o $a > 4$ o $b > 4$.
Dimostrazione per assurdo.
Supponiamo che a, b siano due numeri naturali tali che $ab > 16$. Per assurdo, supponiamo che $a \leq 4$ e $b \leq 4$ (cioè che sia falso che $a > 4$ o $b > 4$). Ma, allora, $ab \leq 16$: ma questa è una contradizione rispetto all'ipotesi iniziale.
[nota: questa dimostrazione è riconducibile a una dimostrazione per contrapposizione]

Esercizio*:* Siano n e m numeri naturali. Dimostra, tramite una dimostrazione indiretta, che:
a) se n^2 è multiplo di 3, anche n è multiplo di 3.
b) se $2n$ è multiplo di 3, anche n è multiplo di 3.
c) Mostra che se n e m sono multipli di 3, anche il prodotto nm è multiplo di 3.

Sitografia: https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/

Breve nota sulle proprietà delle operazioni sui numeri naturali

Le proprietà delle operazioni possono essere introdotte “geometricamente” in modo da fornirne una giustificazione intuitiva e una “visualizzazione”:
Le proprietà delle operazioni vengono utilizzate, ad esempio:

a. negli algoritmi di calcolo
b. nell'individuazione di percorsi più rapidi di calcolo
c. come supporto al calcolo mentale

Le proprietà delle operazioni si estendono a frazioni e numeri decimali

Introduzione geometrica alle proprietà delle operazioni

addizione: L’addizione gode della proprietà associativa, della proprietà commutativa, dell’esistenza di un elemento neutro (0) e dell’esistenza dell’opposto (per ciascun numero)

La somma di due addendi corrisponde alla giustapposizione (nello stesso ordine) di due aste di lunghezza corrispondente agli addendi.
La proprietà commutativa corrisponde ad osservare che la lunghezza del bastone non varia, se lo ruoto:

3 + 8 = 11 = 8 + 3

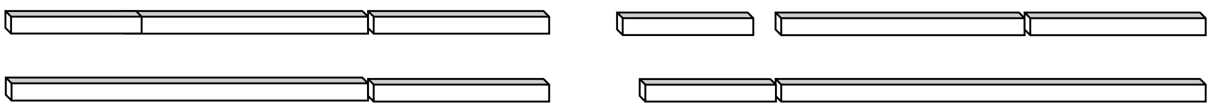
Il ruolo speciale di 0 nell’addizione (è l’elemento neutro, cioè $a + 0$ ($= 0 + a$) $= a$ per ogni naturale a) è immediato (perchè sommando 0 non aggiungo “nulla”).

La proprietà associativa tratta un problema generalmente non percepito dai bambini: se la somma è rappresentata da una asta, non sembra fare nessuna differenza il fatto che l’asta sia stata ottenuta incollando aste più piccole. Da un punto di vista più formale, la definizione iniziale di somma parla della “somma di due numeri” e non di un numero arbitrario di addendi; ad essere rigorosi, se voglio sommare 3 addendi a, b e c, dovrei specificare in quale ordine eseguire le somme (che coinvolgono solo una coppia di numeri: ad esempio, dovrei scrivere $(a+b) + c$ oppure $a + (b+c)$. La proprietà associativa mi assicura che il risultato è sempre lo stesso, cioè

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

e siamo quindi autorizzati a scrivere $a + b + c$ intendendo una qualunque delle due scritture precedenti (e a generalizzare per una somma di più di 3 addendi).

3 + 8 8 + 5



(3 + 8) + 5 = 11 = 3 + (8 + 5)

Riassumendo: *quando devo calcolare una somma, posso*

- *sostituire due o più addendi con il risultato della loro somma*

- *sostituire un addendo con una somma di addendi (che abbia per risultato l'addendo sostituito)*

Questi sono due aspetti della stessa proprietà.

applicazioni delle proprietà dell'addizione:

a) l'algoritmo dell'addizione: l'usuale algoritmo di somma in colonna sfrutta un percorso del tipo seguito in questo esempio:

47 + (40 + 7)+ (20 + 4) = (40+20) + (7+4) =
24 =

^{1}47 + (40 + 20)+ 11 = (40 + 20)+ 10 + 1 = (40 + 20 + 10)+ 10=
24 =
1

^{1}47 + 70 + 1 = 71
24 =
7 1

dove, nell'algoritmo, la scrittura posizionale semplifica la gestione delle decine: le somme svolte nell'algoritmo sono, quindi, sempre somme di più addendi, ciascuno dei quali compreso da 0 a 9.

Esempio: Si dispongono sulla tavola 10x10 le quantità di quadretti relativi a due addendi (ciascuno dei quali maggiore di 10): ad esempio 23 + 18. Il numero 23 risulta in modo naturale scomposto come 10 + 10 + 3, mentre il numero 18 come 10 + 8. La somma iniziale coincide con (10 + 10 + 3) + (10 + 8): riordinando i quadretti in modo da riempire la parte superiore della tavoletta, si scambiano ad esempio le righe con 3 e 10, ottenendo
(10+10+10) + (3+8). Si passa a calcolare la somma delle unità: 3 + 8 = 11, ricavando un'altra riga completa e una unità isolata: 11 = 10 + 1. La riga completa si aggiunge alle altre righe complete (per un totale di 4) : (10+10+10) + (3+8) = (10+10+10) + (11) = (10+10+10) + (10+1) = (10+10+10+10) +1 = 41.

b) la tavola dell'addizione sulle cifre da 0 a 9 è simmetrica rispetto alla diagonale principale (e con tale tavola, insieme al meccanismo dei riporti, si operano tutte le addizioni di numeri naturali)

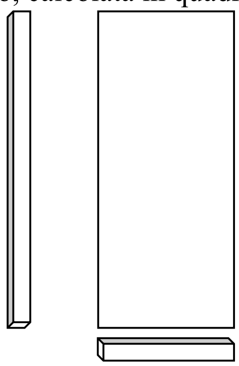
c) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali:
Ad esempio, nel calcolare 18+ 24 + 2 + 13 + 6, si può procedere calcolando
(18 + 2) + (24+6) + 13

Ancora, nel calcolare mentalmente 17+ 35, si può riflettere che il complemento di 17 alla "cifra tonda successiva" 20 è 3:

$$17 + 35 = 17 + (3 + 32) = (17 + 3) + 32 = 20 + 32 = 52$$

moltiplicazione: La moltiplicazione gode delle proprietà associativa e commutativa, e dell'esistenza dell'elemento neutro 1. La moltiplicazione tra numeri razionali o reali gode inoltre del fatto che ogni numero non nullo ammette un inverso.
La moltiplicazione di due fattori dà come risultato il numero di quadretti di cui è composto il rettangolo avente lati pari (rispettivamente) ad uno dei fattori (con un ordine da stabilire): è l'area del rettangolo, calcolata in quadretti.

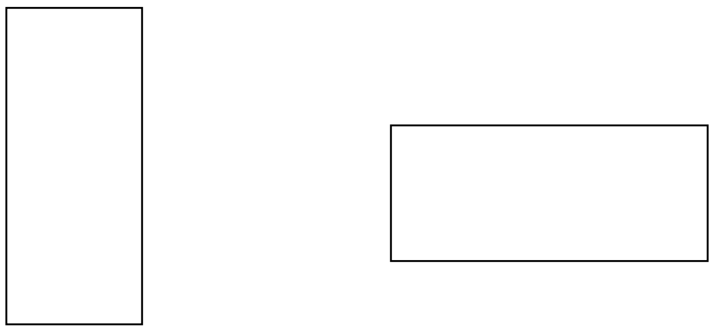
7



3×7

3

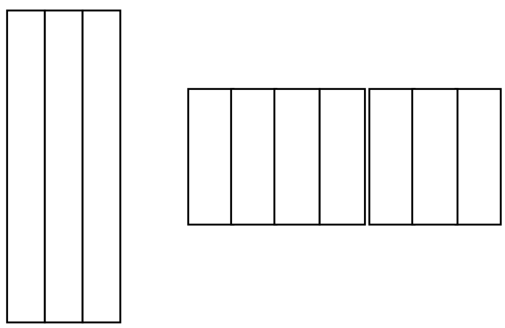
La proprietà commutativa corrisponde ad osservare che il numero di quadretti compresi nel rettangolo non varia, se lo ruoto:



$3 \times 7 = 21 = 7 \times 3$

In particolare, l'area del rettangolo non dipende da come è stato disegnato, ma solo dai sui lati.

Posso anche pensare di aver affettato in modo differente il rettangolo, in strisce parallele ai lati. Una volta decomposte le figure in quadretti, il numero di quadretti coinvolti non varia.

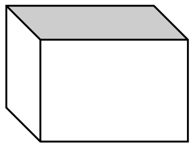


Il ruolo speciale di 1 nella moltiplicazione (è l'elemento neutro, cioè $a \times 1$ ($= 1 \times a$) $= a$ per ogni naturale a) è immediato, perchè il rettangolo da costruire nella moltiplicazione coincide con l'asta del numero a:

1×3: 

Il ruolo speciale di 0 nella moltiplicazione ($a \times 0$ ($= 0 \times a$) $= 0$ per ogni naturale a) è immediato (perchè non costruisco il rettangolo, visto che un suo lato è nullo).

La proprietà associativa pone riflessioni analoghe a quelle svolte per l'addizione. Una dimostrazione geometrica diretta è più semplice rappresentando il prodotto di 3 fattori come un parallelepipedo aventi i tre fattori per spigoli.



Sezionando differentemente il parallelepipedo, si ritrova che

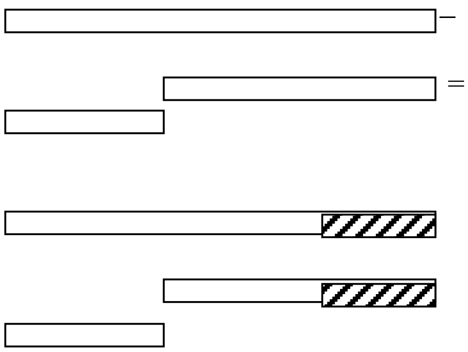
$$(a\times b) \times c = a \times (b \times c).$$

E` possibile utilizzare la proprietà distributiva:
$[a\times b] \times c = [(1+1+....+1) \times b] \times c = (b+b+....+b) \times c = b\times c+\mathbf{bc}+....+b\times c = a \times (b\times c)$.
(ove ogni addendo è ripetuto a volte). Tale percorso può essere rivisitato geometricamente.

applicazioni delle proprietà della moltiplicazione:

a) la tavola pitagorica è simmetrica rispetto alla diagonale principale
b) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali

sottrazione: **La sottrazione (che non è sempre definita nell'insieme dei numeri naturali) gode della proprietà invariantiva:** sommando o sottraendo la stessa quantità da minuendo e sottraendo, la differenza non cambia. Per ora occorre supporre che la quantità sottratta sia minore o uguale al sottraendo, ma nei numeri reali questo è superfluo e la sottrazione non è più considerata una operazione distinta dall'addizione.



9–

6 =
3

9–2=7

6–2 = 4

7 –
4=
3

applicazioni delle proprietà della sottrazione:

a) la proprietà invariantiva può esser utilizzata per semplificare il calcolo scritto e il calcolo mentale: $65 - 12 = 63 - 10 = 53$

Divisione

proprietà invariantiva: moltiplicando o dividendo per la stessa quantità entrambi i termini della divisione, il risultato non cambia.
Nella divisione tra numeri reali, vale anche la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma e alla differenza.

applicazioni delle proprietà della divisione:
il calcolo della divisione tra numeri decimali

Proprietà distributiva

La proprietà distributiva coinvolge più operazioni.
Ad esempio, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione afferma che:

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \quad \text{per ogni numero } a, b, c$$

Comunque decomposto un rettangolo che ha un lato di lunghezza *c* in due rettangoli aventi un lato di lunghezza *c* parallelo al lato del rettangolo di partenza, l'area del rettangolo grande è la somma delle aree dei rettangoli piccoli: questo risultato è alla base della possibilità di calcolare l'area per scomposizione:

Questa osservazione sta alla base della possibilità di calcolare le aree per scomposizione.
Valgono anche

- la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione
  $$(a-b) \times c = a \times c - b \times c \text{ per ogni numero } a, b, c$$
- la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
  $$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \text{ per ogni numero } a, b, c$$
- la proprietà distributiva della divisione rispetto alla sottrazione
  $$(a-b) \times c = a \times c - b \times c \text{ per ogni numero } a, b, c$$

applicazioni delle proprietà distributiva

a) E' possibile calcolare tutti prodotti a partire dai prodotti dei numeri ad una cifra (cioè basta limitarsi a studiare le tabelline da 1 a 9); in particolare, vale l'algoritmo della moltiplicazione: l'usuale algoritmo di prodotto in colonna sfrutta un percorso del tipo seguito in questo esempio:

$47 \times 24 \quad = 47 \times (20 + 4) = 47 \times 20 + 47 \times 4$
$\qquad\qquad = 47 \times 20 + 188 = 940+188 = 1128$

```
    4 7 ×
    2 4 =
 ------------
   188
   94
---------------
  1128
```

ove tutto viene semplificato dall'uso della scrittura posizionale.

b) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali:
Ad esempio, nel calcolare 18×3, si può procedere calcolando
$(10 \times 3) + (8\times3) = 30 + 24 = 54$
c) la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla differenza è alla base dell'algoritmo della sottrazione.

L'algoritmo di divisione (nella scrittura decimale posizionale)

La procedura proposta è liberamente tratta da Maria Montessori, Psicoaritmetica, Opera Nazionale Montessori.

Come prerequisito, si assume la conoscenza delle tabelline (oppure si prevede di disporre di una tavola pitagorica). Si assume anche la comprensione del significato della divisione, e ci si limita allo studio del metodo di calcolo. Gli esempi riportati sono abbastanza elaborati: in classe, si introdurranno prima esempi analoghi, ma meno complessi. Inizialmente si lavora solo distribuendo il materiale: la scrittura algebrica comparirà solo come trascrizione del lavoro con il materiale e, in seguito, come sostituzione del materiale. L'utilizzo del materiale è finalizzato alla comprensione dell'algoritmo, e quindi solleciteremo i bambini ad abbandonarlo, per concentrarsi sulla trattazione algebrica della divisione.

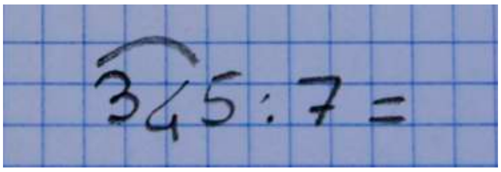
La divisione in colonna (divisore a 1 cifra)

Utilizziamo il materiale multibase, o dei ritagli di carta (su fogli con quadretto di 1 cm, prepariamo vari quadrati grandi come un quadretto per rappresentare le unità, rettangoli 1x10 per rappresentare le decine e quadrati 10x10 per rappresentare le centinaia). Il materiale sarà trattato come se fosse prezioso, in modo che sia desiderabile riceverne una quota maggiore.

Vogliamo calcolare 345 : 7. Rappresentiamo 345 con il materiale (3 quadrati, 4 aste, 5 quadretti sciolti). Lavoriamo con il materiale sulla cattedra, in modo che tutti possano vedere e disponiamo 7 segnaposto (essi rappresentano i destinatari: 7 vassoi, o 7 pupazzi o 7 figurine) e distribuiamo il materiale formando un mucchietto vicino ad ogni segnaposto (o in ciascun vassoio). Contemporaneamente, scriviamo alla lavagna 345 : 7 = .

Chiediamo ai bambini se distribuire per primi i quadretti o i pezzi più grandi. Facilmente i bambini indicheranno che conviene distribuire per primi i quadrati delle centinaia. Abbiamo tre pezzi da 100 da distribuire ai sette destinatari: non ne abbiamo abbastanza da darne un pezzo da 100 per ciascuno. Che fare? Rinunciamo a distribuirli? I bambini concluderanno che è possibile scambiare ogni pezzo da cento con 10 pezzi da 10, e distribuire le decine.

Dai 3 pezzi da cento otteniamo 30 decine che, unite alle 4 decine che avevamo già, danno 34 decine. Nella divisione alla lavagna, distinguiamo con un archetto le prime due cifre 34 del dividendo, per indicare la quantità considerata.



Quanti pezzi da 10 possiamo distribuire? servono 7 decine per poterne dare una ciascuno, 14 = 7 × 2 per darne due ciascuno e così via proseguendo con la tabellina del 7:

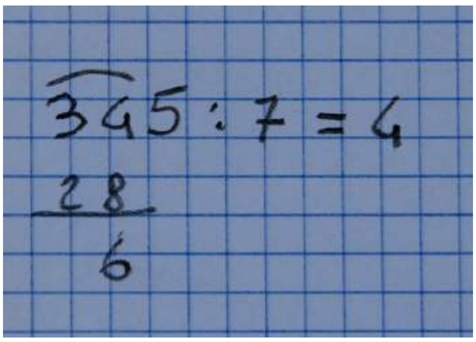
7, 14, 21, 28

e qui ci fermiamo perché il successivo è 35, che è maggiore di 34, e non ne abbiamo abbastanza.

Concludiamo che, al massimo, possiamo dare 4 decine ciascuno.

Poiché 28 = 4 × 7, diciamo che il 7 sta 4 volte nel 34, con il resto di 6. Distribuiamo 4 decine a ciascuno nei bambini e controlliamo che ci restino 6 decine.

Alla lavagna, scriviamo 4 dalla parte del risultato; calcoliamo il prodotto 4 × 7 = 28 e lo trascriviamo sotto le cifre 34 segnate prima. Abbiamo usato le 28 decine per distribuirle ai destinatari: per sapere quante ne restano dobbiamo fare la sottrazione. Tiriamo una piccola riga e facciamo la sottrazione in colonna, e di nuovo troviamo che ci avanzano 6 decine.



A questo punto, come continuare la divisione? Non possiamo dare una decina a ciascuno, ma possiamo scambiare ogni decina con 10 quadretti separati. Dalle 6 decine otteniamo 60 quadretti, ai quali vanno aggiunti i 5 che avevamo già, per un totale di 65.

Per segnalare che utilizziamo anche le unità, alla lavagna poniamo un archetto rovesciato sopra il cinque e ricopiamo la cifra 5 all'altezza del 6 che indicava le decine rimaste: diciamo che "abbassiamo il cinque". Abbiamo 65 unità.

$$\begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 : 7 = 4 \\ \underline{2} & \underline{8} & \\ & 6 & 5 \end{array}$$

Quante ne possiamo dare a ciascuno dei 7 bambini? Di nuovo, consideriamo la numerazione per 7

7 14 21 28 35 42 49 54 63

fermandoci a 63 perché il numero successivo sarebbe 70, che è maggiore di 65.
Poiché 63 = 7 × 9, possiamo dare a ciascun cavaliere 9 unità e diciamo che il 7 sta 9 volte nel 65. Quante unità restano? Ne avevamo 65 e ne abbiamo utilizzate 63; quindi ne restano 65-63 =2.

Alla lavagna, aggiungiamo la cifra 9 nel risultato; poi calcoliamo 9 × 7 = 63, che riportiamo sotto il numero 65, e operiamo la sottrazione. Il risultato è 49 e il resto è 2, come avevamo ricavato con il materiale.

$$\begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \;\; : 7 = 4 \\ \underline{2} & \underline{8} & \\ & 6 & 5 \\ & \underline{6} & \underline{3} \\ & & 2 \end{array}$$

Possiamo commentare assieme che non è necessario ripercorrere la numerazione per 7 ogni volta: la numerazione serve per calcolare la divisione; quindi, diventa inutile se abbiamo intuito la risposta. Quando il divisore è a due cifre, raramente si opera la numerazione, ma si tende piuttosto a fornire una stima del risultato e a verificarne la correttezza: per facilitare il lavoro successivo, mettiamo bene in evidenza che la cifra da aggiungere al risultato, moltiplicata per il divisore, deve dare un numero più piccolo della quantità che stiamo dividendo in quel momento (siano esse centinaia, decine o unità) e deve essere la cifra maggiore possibile con questa proprietà.
Anche il prodotto e la sottrazione per calcolare il resto diventano inutili se abbiamo già capito quale sia il resto.

Divisore a due cifre

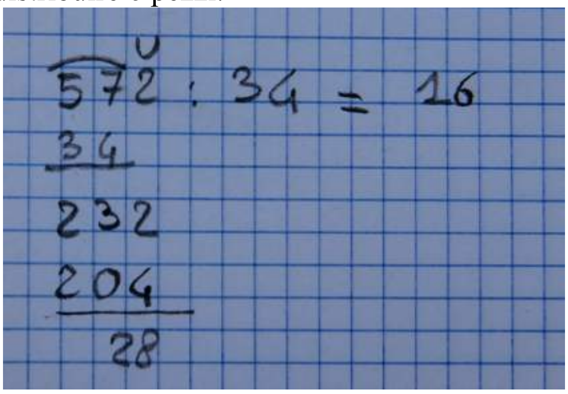
Calcoliamo 572 : 34. Commentiamo che non c'è spazio sulla scrivania per 34 segnaposti, e quindi occorre organizzare la distribuzione in modo differente. Organizziamo i bambini in squadre da 10; formeremo così 3 squadre e resteranno 4 bambini. Per rappresentare i bambini utilizziamo gli stessi segnaposti utilizzati in precedenza, mentre per rappresentare ciascuna squadra da 10 prendiamo nuovi segnaposti. Ad esempio, se i segnaposti erano figurine, per le squadre possiamo usare mazzetti di 10 figurine legate da un elastico; anche un foglietto colorato con la scritta 10 può andare bene. In ogni squadra, eleggiamo un caposquadra.
Ora, sulla cattedra, abbiamo 3 segnaposti per le squadre e 4 per i bambini singoli.
Come operare la ripartizione? Se diamo un quadretto a ciascun bambino singolo, ad ogni squadra ne vanno dati 10 (cioè una decina); se diamo una decina a ciascun bambino singolo, ogni squadra deve avere 10 decine, cioè un quadrato da 100. Dobbiamo quindi lavorare con due tipologie di pezzi: uno più grande da dare alle squadre e quello subito più piccolo da dare ai bambini singoli.
Iniziamo la distribuzione: abbiamo 5 centinaia, 7 decine e due unità. Come prima, cominciamo distribuendo le centinaia: non possiamo dare un centinaio a ciascun bambino, perché non abbiamo i pezzi più grandi per le squadre. D'altra parte, abbiamo detto che dobbiamo usare pezzi di tipo diverso: proviamo quindi con centinaia e decine. Ci preoccupiamo inizialmente del materiale da distribuire alle squadre (che ne necessitano una quantità maggiore). Diamo un pezzo da cento ad ogni squadra; in corrispondenza, consegniamo un pezzo da 10 ad ogni bambino singolo. Ne

abbiamo abbastanza per tutti? Sì, perché i pezzi da cento sono 5 e le squadre 3, mentre i pezzi da 10 sono 7 e i bambini 4: ci servono 3 pezzi da 100 e 4 da 10, per un totale di 34 decine. Non possiamo distribuire un secondo pezzo perché non abbiamo abbastanza centinaia.
Dopo la distribuzione ci avanzano 2 centinaia e 3 decine, cioè 23 decine.
Riportiamo alla lavagna i passaggi operati: scriviamo l'operazione "572 : 34 =", raccogliamo con un archetto le cifre 57 che stiamo considerando e chiediamo "quante volte 34 sta nel 57?". Commentiamo che 34 sta nel 57 una sola volta, perché 34 × 2 = 68 supera 57. Dunque scriviamo 1 dalla parte del risultato. Per controllare quanto materiale abbiamo già distribuito, moltiplichiamo 1 per il divisore 34, ottenendo 34; dunque abbiamo usato 34 decine e scriviamo questo numero sotto il numero 57 delle decine che avevamo. Operiamo la sottrazione 57–34 = 23 per calcolare quante decine sono rimaste. Per proseguire la divisione, abbassiamo la cifra 2 delle unità.

5 7 2 : 3 4 = 1
3 4
2 3 2

Torniamo al materiale per proseguire la divisione e facciamo intervenire anche le 2 unità; abbiamo 23 decine e 2 unità (cioè 232 unità). Poiché le squadre sono 3 e abbiamo 23 decine, potremmo dare 7 decine per ciascuno. Calcoliamo il prodotto 7 × 34 = 238 e lo scartiamo perché è maggiore 232. Non ci possiamo permettere di distribuire 7 pezzi e proviamo quindi con 6; calcoliamo dunque 6 × 34 = 204, che è minore di 232. Possiamo quindi distribuire 6 pezzi.

Alla lavagna, aggiungiamo la cifra 6 al risultato; poi, per calcolare il resto, riportiamo il risultato 204 delle unità utilizzate e calcoliamo la differenza 232 – 204 = 28. Dunque, il risultato è 16, con resto di 28. Notiamo che il resto deve sempre essere minore del divisore, perché altrimenti avremmo potuto distribuire altri quadretti.



Dunque 572 = 16 × 34 + 28

Calcoliamo ora 732: 34.
Rappresentiamo 732 con il materiale, e 34 con i segnaposti delle 3 squadre e dei 4 bambini.
Abbiamo 7 centinaia, e quindi potremmo dare 2 centinaia ad ogni squadra, ma le tre decine non sono sufficienti per darne una ad ogni bambino; riflettendo meglio, però, alle squadre sono sufficienti 2 × 3 = 6 centinaia e ce ne avanza ancora una: se la dividiamo in 10 decine, abbiamo 13 decine, grazie alle quali possiamo dare 2 decine ad ogni bambino singolo. Infatti, 2 × 34 = 68 è minore di 73. Ci avanzano 73 – 68 = 5 decine. Proseguiamo la divisione e ricaviamo che il risultato è 16 con resto 18, cioè 732 = 21 × 34 + 18.

7 3 2 : 3 4 = 2 1
6 8
  5 2
  3 4
  1 8

Questo esempio insegna che, ad ogni passo, la domanda 'quanti oggetti posso dare alle squadre' fornisce una stima della cifra che va riportata nel risultato (che è sicuramente uguale o minore); non è detto che questa sia già la risposta: lo devo verificare e, se questa cifra è eccessiva, procedo abbassandola di uno e verifico nuovamente. Continuo ad abbassarne il valore, finchè il suo prodotto con il divisore non supera più il materiale in distribuzione.
Il controllo se la cifra è esatta può essere fatta in due modi differenti.
Calcoliamo ad esempio 732: 14. Ora abbiamo una unica squadra. Considero le 7 centinaia e le 3 decine e inizio distribuendo questo materiale.
primo modo: Se consegno 7 centinaia alla squadra, avrei bisogno di $7 \times 4 = 28$ decine da dare ai bambini singoli. Ma ho solo 3 decine, e non sono sufficienti. Provo con 6: se consegnassi 6 centinaia alla squadra, mi avanzerebbero 1 centinaio e 3 decine, cioè 13 decine; ma avrei bisogno di $6 \times 4 = 24$ decine (nota: potevo calcolare questo numero anche come $28 - 4$) decine. Provo con 5: se consegnassi 5 centinaia alla squadra, e mi resterebbero 2 centinaia e 3 decine, cioè 23 decine. Poiché avrei bisogno di $5 \times 4 = 20$ decine, le decine sarebbero sufficienti: procedo quindi consegnando 5 centinaia alla squadra e cinque decine a ciascun bambino. Mi avanzano $23 - 20 = 3$ decine.
secondo modo: Se consegno 7 centinaia alla squadra, avrei bisogno in tutto di $7 \times 14 = 98$ decine da dare ai bambini singoli. Ma ho solo 73 decine, e non sono sufficienti. Provo con 6: se consegnassi 6 centinaia alla squadra, avrei bisogno complessivamente di $6 \times 14 = 84$ decine (potevo ottenere questo numero anche come $98 - 14$). Provo con 5: se consegnassi 5 centinaia alla squadra, avrei bisogno complessivamente di $5 \times 14 = 70$ decine, e le decine sarebbero sufficienti: procedo quindi consegnando 5 centinaia alla squadra e cinque decine a ciascun bambino singolo. Mi avanzano $73–70 = 3$ decine.

Proseguiamo la divisione.

```
7 3 2 : 1 4 = 5 2
7 0
  3 2
  2 8
    4
```

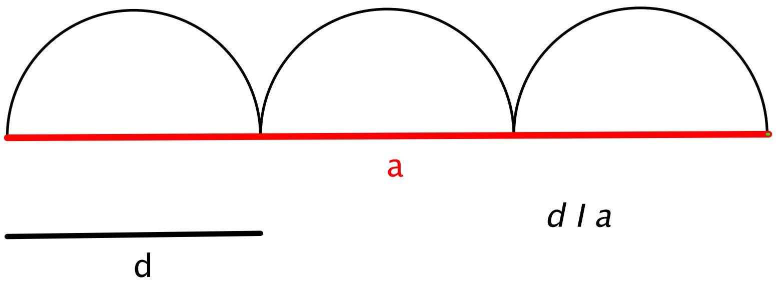
Quando i calcoli coinvolgono numeri grandi, e il materiale è stato abbandonato, spesso si ricorre al secondo metodo. Per aiutare la gestione algebrica, si possono colorare diversamente le cifre in base al valore assunto nella scrittura posizionale.

Metodo di Euclide per il calcolo del Massimo comune divisore
di due numeri naturali
Tovena Francesca

MASSIMO COMUNE DIVISORE E ALGORITMO DI EUCLIDE

L'algoritmo di Euclide permette di calcolare il massimo comun divisore tra due numeri, anche se questi sono molto grandi, senza aver bisogno di fattorizzarli come prodotto di fattori primi.
Ricordiamo, per completezza, alcune definizioni:
Se un numero naturale a è multiplo di un numero naturale d, diciamo che d è un divisore di a e scriviamo:

$$d \,|a$$



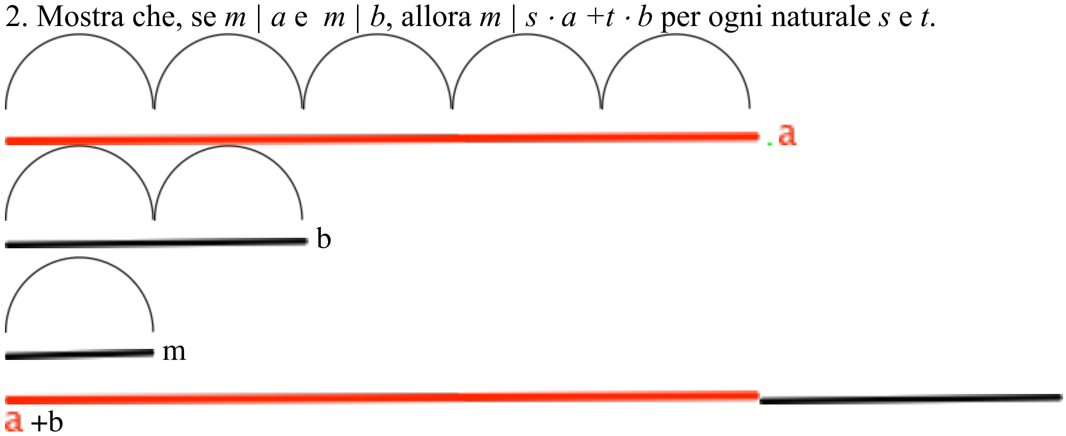
<u>Definizione</u> Siano dati due numeri naturali non nulli a e b. Un loro **massimo comun divisore** è un numero naturale non nullo d, tale che

1. d divide a e d divide b (cioè d è un divisore comune)
2. d è il numero più grande con tale proprietà.

Se a e b non sono entrambi nulli, l'insieme dei loro divisori comuni è non vuoto (contenendo almeno 1) e finito (perchè i divisori di un numero non nullo non possono essere maggiori del numero stesso). Poichè i numeri naturali formano un insieme ordinato, il massimo comune divisore esiste sempre, ed è unico: esso viene indicato con il simbolo MCD(a,b).

Due numeri naturali non nulli a, b tali che MCD(a,b) = 1 si dicono *coprimi* o *relativamente primi*.

Esercizio: Siano m, a, b numeri naturali non nulli con $a > b$.
1. Mostra che, se m divide a e b, allora m divide $a + b$ e anche a-b.
2. Mostra che, se $m \mid a$ e $m \mid b$, allora $m \mid s \cdot a + t \cdot b$ per ogni naturale s e t.



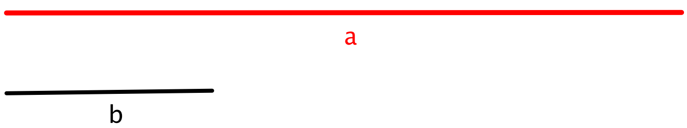
Metodo di Euclide per il calcolo del Massimo comune divisore
di due numeri naturali
Tovena Francesca

La divisione tra numeri naturali può essere riletta nel modo seguente:
<u>Proposizione</u> Siano a, b numeri naturali non nulli. Allora esistono e sono univocamente determinati due interi q e r tali che

$$a = b \cdot q + r \quad \text{con } 0 \leq r < b$$

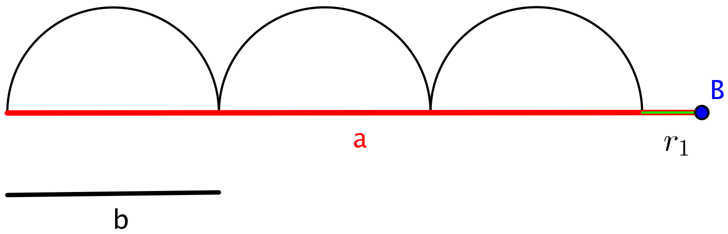
In quest'operazione a è detto *dividendo*, b *divisore*, q *quoziente* e r *resto.*
Risulta, che b divide a se e solo se il resto r è uguale a zero.

L'**algoritmo di Euclide** (o **metodo delle divisioni successive**), che consente di calcolare il M.C.D. tra due qualsiasi numeri, si basa su una serie di divisioni successive. Rappresentiamo i numeri come lunghezza, e supponiamo $a > b$.

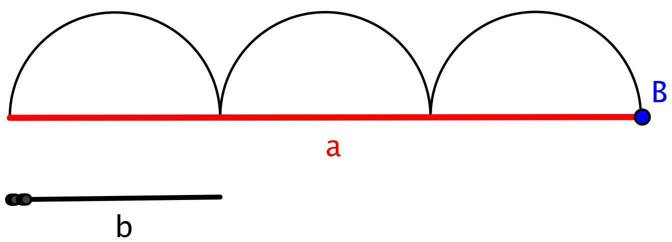


Si inizia dividendo a per b e si ottengono un quoziente q_1 e un resto r_1, tali che

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \, .$$

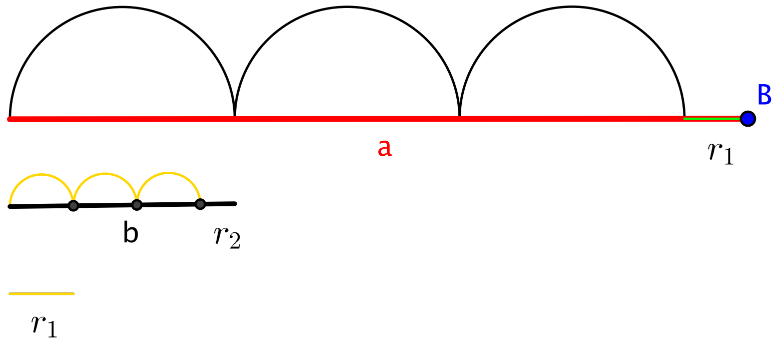


Possono accadere solo due distinti casi: o il resto r_1 è nullo, oppure non è nullo.
Se $r_1 = 0$, allora b divide a e la figura è della forma:

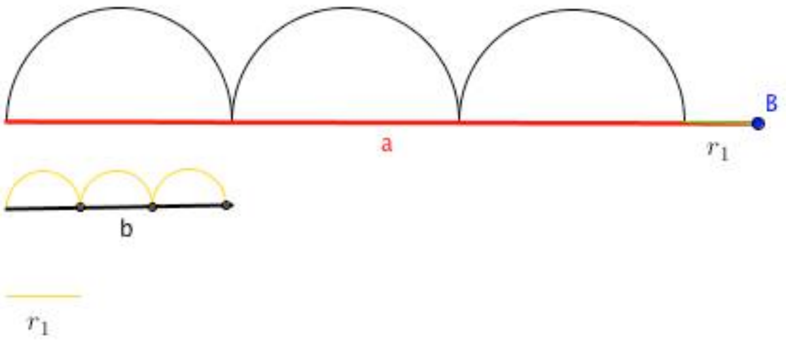


quindi MCD$(a,b)=b$ e ci si ferma;
Se, invece, $r_1 \neq 0$, disegniamo anche il segmento r_1. Confrontiamo il segmento r_1 con il segmento precedente b: dividiamo quindi b per r_1 e otteniamo q_2 e r_2 tali che

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2 \, .$$



Nuovamente, si presentano due casi: $r_2 = 0$ oppure $r_2 \neq 0$.
se $r_2 = 0$, la figura è della forma



Sappiamo che r_1 divide b, perché $r_2 = 0$. Ma allora r_1 divide anche a (perché divide b, quindi divide i multipli di b; inoltre, coincide con la parte di differenza tra a e $b \cdot q_1$) . Dunque, r_1 è un divisore comune di a e b. Ma qualsiasi divisore comune di a e b deve dividere r_1 . Concludiamo che

$$r_1 = \mathrm{MCD}(a,b)$$

Osserviamo che r_1 è l'ultimo resto non nullo e che abbiamo ottenuto la risposta cercata.

Se, invece, $r_2 \neq 0$, si ripete il ragionamento precedente:
- disegno un nuovo segmento, r_2
- divido il segmento precedente r_1 per r_2, ottenendo q_3 e r_3 tali che

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 .$$

- se $r_3 = 0$, allora r_2 divide r_1 . Ma allora r_2 divide anche $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$. Concludiamo che r_2 divide $a = b \cdot q_1 + r_1$. Dunque, r_2 è un divisore comune di a e b. Ma qualsiasi divisore comune di a e b deve dividere $r_1 = a - b \cdot q_1$ e quindi anche $r_2 = b - r_1 \cdot q_2$. Concludiamo che

$$r_2 = \mathrm{MCD}(a,b)$$

Osserviamo che il MCD r_2 è l'ultimo resto non nullo e che abbiamo ottenuto la risposta cercata.

Se, invece, $r_3 \neq 0$, si aggiunge un nuovo segmento e si ripete il ragionamento precedente. L'algoritmo termina quando troviamo resto nullo e il MCD è l'ultimo resto diverso da zero. La procedura ha sicuramente termine perché il resto si riduce ad ogni passo.

Metodo di Euclide per il calcolo del Massimo comune divisore
di due numeri naturali
Tovena Francesca

Esempio: Il procedimento è illustrato di seguito, calcolando MCD (44880,5292).

$a = b \cdot q + r$

$a = 44880$
$b = 5292$

$44880 = 5292 \cdot 8 + 2544$ $\quad r_1 = 2544$

$5292 = 2544 \cdot 2 + 204$ $\quad r_2 = 204$

$2544 = 204 \cdot 12 + 96$ $\quad r_3 = 96$

$204 = 96 \cdot 2 + \mathbf{12}$ $\quad \boldsymbol{r_4 = 12}$

$96 = 12 \cdot 8 + 0$

MCD

MCD (44880,5292) = 12 (=ultimo resto non nullo)

Osservazione: ad ogni passo, il resto ottenuto divide il resto precedente.

Esempio

1) Calcola MCD (1637,31)

$1637 = 31 \cdot 52 + 25$

$31 = 25 \cdot 1 + 6$

$25 = 6 \cdot 4 + 1$

$6 = 1 \cdot 6 + \mathbf{0}$

MCD

MCD (1637,31) = 1 (=ultimo resto non nullo)

2) Calcola MCD (1763,51)

$1763 = 51 \cdot 34 + 29$

$51 = 29 \cdot 1 + 22$

$29 = 22 \cdot 1 + 7$

$22 = 7 \cdot 3 + \mathbf{1}$

$7 = 1 \cdot 7 + 0$

MCD

MCD (1763,51)= 1 (=ultimo resto non nullo)

3) Calcola MCD (1547,560)

$1547 = 560 \cdot 2 + 427$

$560 = 427 \cdot 1 + 133$

$427 = 133 \cdot 3 + 28$

$133 = 28 \cdot 4 + 21$

$28 = 21 \cdot 1 + 7$ ← MCD

$21 = 7 \cdot 1 + 0$

MCD (1547, 560)= 7 (=ultimo resto non nullo)

Esercizi Calcola, con il metodo di Euclide, i seguenti numeri:
MCD(2337, 1482)= …..
MCD(16717, 8249)= …..
MCD(4891, 1541)= …..

IDENTITA' DI EUCLIDE-BEZOUT

L'algoritmo di Euclide ci permette, una volta individuato d = MCD (a, b), di trovare due numeri interi s, t tali che

$$d = s \cdot a + t \cdot b$$

questa relazione si chiama **IDENTITA' DI EUCLIDE-BEZOUT**.

Vediamo il procedimento per trovare un'identità di Euclide-Bézout in un esempio, riprendendo i calcoli fatti per calcolaree MCD (44880,5292) = 12.

Dobbiamo individuare $s, t \in Z$ tali che 12 = s * 44880 + t * 5292. Riscriviamo i passaggi dell'algoritmo euclideo nel modo seguente:

$44880 = 5292 \cdot 8 + 2544 \longrightarrow r_1 = 2544 = 44880 - 5292 \cdot 8$

$5292 = 2544 \cdot 2 + 204 \longrightarrow r_2 = 204 = 5292 - 2544 \cdot 2$

$2544 = 204 \cdot 12 + 96 \longrightarrow r_3 = 96 = 2544 - 204 \cdot 12$

$204 = 96 \cdot 2 + \underline{12} \longrightarrow \text{MCD} = r_4 = 12 = 204 - 96 \cdot 2$

Partiamo dall'ultima relazione scritta e sostituiamo in essa il numero esplicitato nell'equazione subito precedente; raccogliamo i fattori comuni e continuiamo a sostituire il resto dell'equazione precedente (procedendo dal basso verso l'alto) fino ad ottenere un'espressione nei numeri a, b. Otteniamo:

$$\begin{aligned} 12 \quad &= 204 - 96 \cdot 2 = 204 - (2544 - 204 \cdot 12) \cdot 2 = \\ &\qquad = 204 - 2544 \cdot 2 - 204 \cdot 24 \\ &= 204 \cdot 25 - 2544 \cdot 2 = (5292 - 2544 \cdot 2) \cdot 25 - 2544 \cdot 2 \\ &= 5292 \cdot 25 - 2544 \cdot 52 = 5292 \cdot 25 - (44880 - 5292 \cdot 8) \cdot 52 \\ &= 5292 \cdot 441 - 44880 \cdot 52 \end{aligned}$$

$$\boxed{12 = 441 \cdot 5292 - 52 \cdot 4480}$$

Quindi abbiamo ottenuto 12 = (-52) · 44880 + 441 · 5292, ovvero $s = -52$ e $t = 441$.

Notiamo che l'espressione del MCD (a, b) fornita dall'identità di Euclide-Bézout non è affatto unica.

Per dimostrare l'esistenza dell'identità di Bezout basta far vedere che tutti i resti delle divisioni successive si possono scrivere come combinazioni di a e b. Infatti osserviamo che, riscrivendo le divisioni operate, troviamo le relazioni:

$r_1 = a - b \cdot q_1$

$r_2 = b - r_1 \cdot q_2$

$r_3 = r_1 - r_2 \cdot q_3$

………

$r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1}$

$d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$

Consideriamo l'ultima equazione, che descrive il massimo comun divisore d, che coincide con l'ultimo resto non nullo r_n, nei termini dei resti precedenti r_{n-2} e r_{n-1}. Sostituiamo il resto r_{n-1} con l'espressione $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1}$ ottenuta dalla penultima equazione. Otteniamo una espressione di d nei termini di r_{n-3} e r_{n-2}.
Continuiamo sostituendo il resto r_{n-2} con l'espressione ottenuta dalla terzultima equazione. Otteniamo una espressione di d nei termini di r_{n-3} e r_{n-4}. Si continua, utilizzando, in ordine inverso, tutte le equazioni.
Al termine, si ottiene una espressione di d = MCD(a,b) della forma cercata.

Esercizi

1) Calcola l'identità di Euclide-Bezout per MCD (1637,31)
2) Calcola l'identità di Euclide-Bezout per MCD (1763,51)
3) Calcola l'identità di Euclide-Bezout per MCD (1547,560)

Numeri reali e numeri razionali

I **numeri reali** possono essere descritti attraverso uno sviluppo decimale finito o infinito (nell'ambito di questo insegnamento non viene fornita una definizione formale di numero reale).
L'insieme dei numeri reali viene indicato con la lettera $\mathbb{R}$ e rappresentati come una linea retta.
I numeri reali possono essere positivi, negativi o nulli e comprendono, come casi particolari, i numeri naturali, interi, razionali, irrazionali.
Un **numero razionale** è un numero reale che può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n non nullo. Un numero x è quindi razionale esattamente quando, addizionandolo con se stesso, si può ottenere un numero intero: x è razionale se esistono numeri interi n e m tali $n\,x = m$.
L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$.
Un numero reale razionale presenta uno sviluppo decimale finito o periodico; ad esempio, $^1/_3$=0,333333……., è razionale.

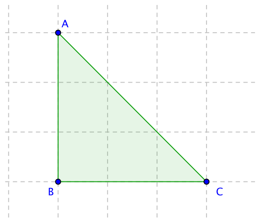
numeri irrazionali
Un **numero irrazionale** è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n diverso da 0.

I numeri irrazionali sono i numeri reali la cui espansione decimale non termina mai e non forma una sequenza periodica. [non dimostrato a lezione]

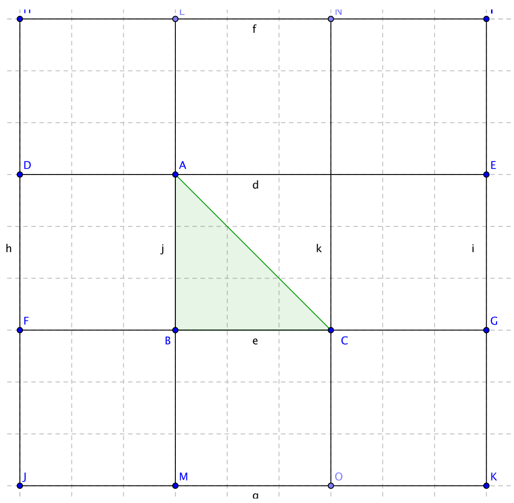
Alcuni dei numeri irrazionali hanno una descrizione geometrica, come $\sqrt{n}$ al variare di n tra i numeri naturali, oppure π.

$\sqrt{2}$ è, per definizione, il numero reale positivo tale che $(\sqrt{2})^2 = 2$.

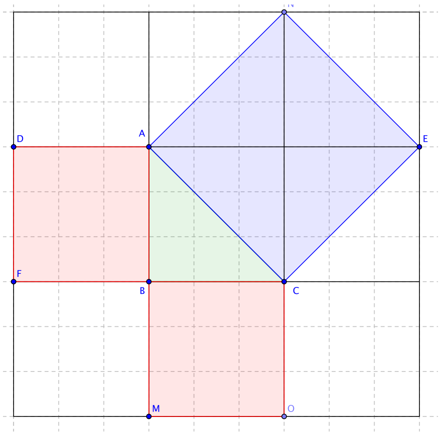
Proposizione: $\sqrt{2}$ *è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1, o, equivalentemente, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza 1.*
Più in generale, è il rapporto tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato di un quadrato.
dimostrazione Questo risultato segue in modo diretto dal Teorema di Pitagora. Assumendo che l'area del quadrato è pari al prodotto della misura del lato per se stesso, una dimostrazione intuitiva è fornita dallo studio delle seguenti figure. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele



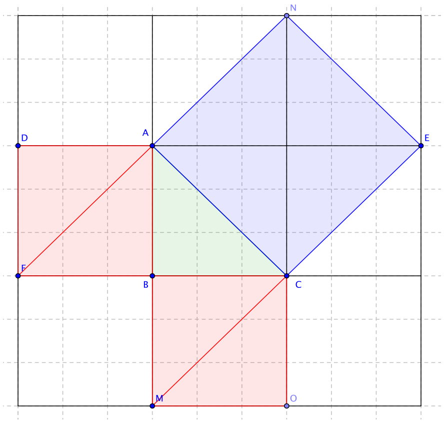
e lo si inserisca in una quadrettatura



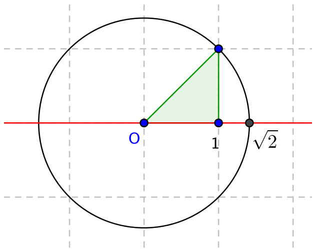
Ora si proceda colorando i quadrati che hanno per lato i lati del triangolo.



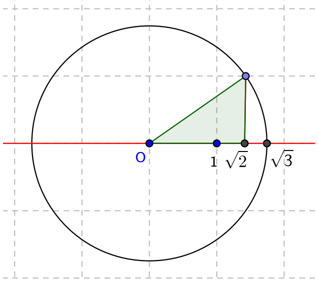
Suddividendo anche i quadrati rossi tramite una diagonale, si osserva che il quadrato blu ha area doppia di ogni quadrato rosso, e quindi la sua area è pari alla somma delle aree dei due quadrati rossi.



Osservazione: Riportando la lunghezza della diagonale con il compasso, è possibile disegnare $\sqrt{2}$ sulla linea dei numeri:



Utilizzando la versione del teorema di Pitagora relativa ad un arbitrario triangolo rettangolo, è possibile vedere che il numero $\sqrt{n+1}$ è la diagonale di un rettangolo i cui cateti hanno lunghezza $\sqrt{n}$ e 1: dunque è possibile disegnare (con riga e compasso) un segmento della lunghezza $\sqrt{n}$ per ogni numero naturale n.



Proposizione: $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale*

Dimostrazione per assurdo

Si supponga per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero che esistano interi *m*, $n \neq 0$ tali che

$$n\sqrt{2} = m$$

Possiamo supporre che $m, n > 0$ e MCD(m,n)=1. Elevando al quadrato, troviamo che $2n^2 = m^2$.

Ne ricaviamo l'informazione che il numero m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero naturale dispari è sempre dispari, deduciamo che anche m è pari, cioè esiste un numero naturale k tale che $m = 2k$.

Sostituiamo questa uguaglianza in $2n^2 = m^2$ e ricaviamo che

$$2 \times n^2 = (2k)^2 = 2 \times 2 \times k^2 .$$

Dividendo per 2 entrambi i membri, osserviamo che

$$n^2 = 2 \times k^2$$

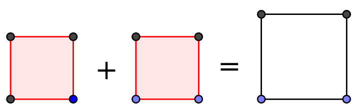
e dunque n^2 è pari. Possiamo ragionare come prima e dedurne che anche n è pari. Sia m che n sono quindi pari, contro l'ipotesi iniziale che MCD(m,n)=1. Concludiamo che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, cioè è irrazionale. ♦

Dimostrazione geometrica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

L'ipotesi assurda dell'esistenza di due numeri interi $m, n > 0$ tali che $n\sqrt{2} = m$, come abbiamo visto, comporta l'uguaglianza $2n^2 = m^2$, cioè l'esistenza di due numeri interi $m, n > 0$ tali che

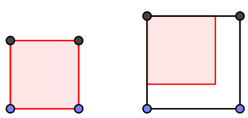
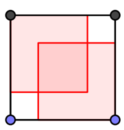
$$n^2 + n^2 = m^2$$

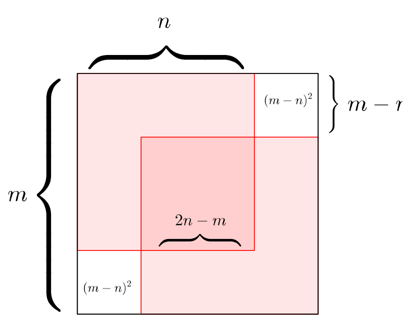
Geometricamente, l'uguaglianza $n^2 + n^2 = m^2$ significa che l'area del quadrato di lato m è equivalente alla somma delle aree di due quadrati uguali di lato n (colorati in rosso in figura).



È perciò possibile trovare un quadrato con lato intero tale che il quadrato che ha il doppio della sua area abbia anch'esso lato intero. Ci si convince facilmente che, se una tale soluzione esiste, ce ne è una sola che ha la caratteristica di essere la più piccola possibile (cioè i due quadrati con lato intero sono i più piccoli con la proprietà che uno ha area doppia dell'altro). Prendiamo quindi questa soluzione minima.

Spostiamo, uno alla volta, i quadrati rossi cercando di coprire il quadrato bianco. Spostiamo il primo quadrato

 , e poi il secondo  .



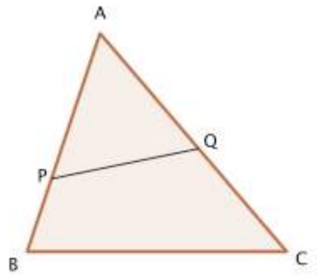
Osservando con attenzione la figura ottenuta, notiamo che l'area dei due quadrati bianchi piccoli deve essere equivalente all'area del quadrato centrale più scuro (che corrisponde alla sovrapposizione tra i due quadrati spostati: tale sovrapposizione deve esistere necessariamente, perché altrimenti i quadrati rossi non coprirebbero il quadrato più grande). Il quadrato scuro centrale ha lato m- 2(m–n), intero e minore di m; i due quadratini bianchi hanno lato m–n, intero.

Dunque, abbiamo trovato un quadrato di lato intero più piccolo di m, che è il doppio di un quadrato di lato intero. Abbiamo una contraddizione, perché avevamo supposto che i quadrati di lato m e n fossero i più piccoli possibile con questa proprietà. Non era quindi possibile che questi quadrati esistessero, e $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Teorema di Talete

Una retta parallela ad un lato di un triangolo taglia gli altri due lati del triangolo in modo proporzionale. Viceversa, se una retta taglia due lati di un triangolo in modo proporzionale, allora è parallela al terzo lato del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC come in figura e tracciamo un segmento PQ che congiunge un punto P sul lato AB con un punto Q sul lato AC.

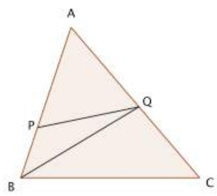


Possiamo riscrivere l'enunciato nella forma

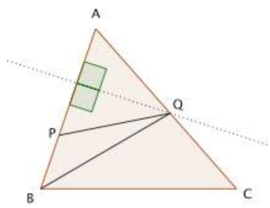
(1) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ se e solo se PQ ǁ BC.

Dimostrazione

Congiungiamo Q con B.



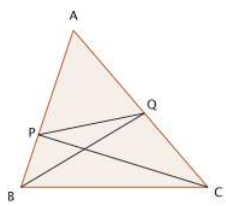
Consideriamo i triangoli APQ e PBQ. L'altezza di APQ rispetto alla base AP è uguale all'altezza di PBQ rispetto alla base PB.



Poichè i triangoli APQ e PBQ hanno la stessa altezza, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi:

(*) $$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PBQ} = \frac{AP}{PB}\ .$$

Ora congiungiamo P con C. Analogamente a prima, i triangoli APQ e PCQ hanno la stessa altezza rispetto alle basi AQ e QC, rispettivamente. Le aree dei triangoli APQ e PCQ sono quindi proporzionali alle rispettive basi:



(**) $$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PCQ} = \frac{AQ}{QC}$$

Sia in (*) che in (**) il rapporto a sinistra studia la relazione tra l'area di APQ e quella di un altro triangolo. Affinché i rapporti in (*) e in (**) siano uguali, occorre e basta che *area* PQB = *area* PCQ. Dunque

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } \textit{area}\text{ PQB} = \textit{area}\text{ PCQ} . \qquad (***)$$

Riguardiamo i triangoli PQB e PQC come triangoli di base PQ: poiché essi hanno la stessa base, la loro area coincide se e solo se hanno altezza uguale, se e solo se la distanza tra B e P coincide con la distanza tra C e Q, cioè se e solo se PQ ll BC.

Abbiamo così concluso la dimostrazione.♣

Corollario Mantenendo le notazioni del teorema,

$$PQ \parallel BC \text{ se e solo se } \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \text{ se e solo se } \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC} \text{ se e solo se } \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ}$$

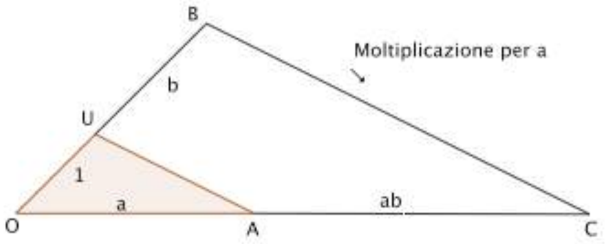
Applicazioni del teorema di Talete

1. Moltiplicazione di segmenti

Nel primo libro degli Elementi, Euclide insegna come sommare e sottrarre tra loro due segmenti. Il Teorema di Talete ci mostra come moltiplicare e dividere tra loro due segmenti. Incominciamo dalla moltiplicazione.

Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU.

Consideriamo ora due segmenti, di lunghezza a e b rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia ab.



Disegniamo un segmento di lunghezza a con primo estremo O e lo chiamiamo OA.

Prolunghiamo OU con un segmento UB tale che la lunghezza di UB sia b.

Tracciamo per B la parallela a UA e chiamiamo C la sua intersezione con il prolungamento di OA.

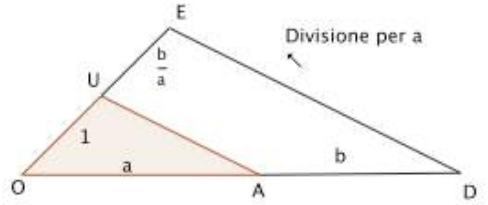
Mostriamo che il segmento AC ha lunghezza ab: infatti, per il teorema di Talete,

$\frac{OA}{OU} = \frac{AC}{UB}$ e dunque $\frac{a}{1} = \frac{AC}{b}$.

2. Divisione di segmenti

Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU.

Consideriamo due segmenti, di lunghezza a e b rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia $\frac{b}{a}$.

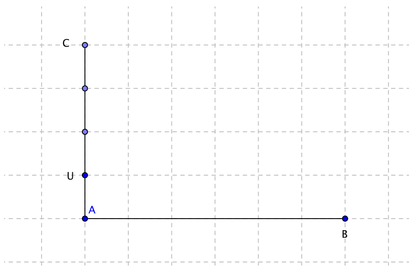


Disegniamo un segmento di lunghezza a con primo estremo O e lo chiamiamo OA.
Prolunghiamo OA con un segmento AD tale che la lunghezza di AB sia b.
Tracciamo per D la parallela a UA e chiamiamo E la sua intersezione con il prolungamento di OU.
Mostriamo che il segmento UE ha lunghezza $\frac{b}{a}$: infatti, per il teorema di Talete,

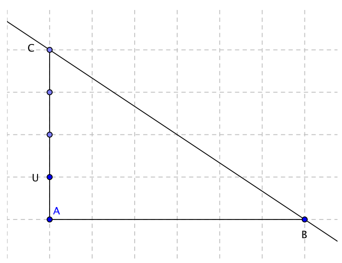
$$\frac{OA}{OU} = \frac{AD}{UE} \quad \text{e} \quad \text{dunque} \quad \frac{a}{1} = \frac{b}{UE}.$$

3. Divisione di un segmento in *n* parti uguali

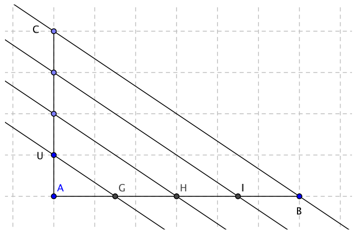
Dato un segmento AB, vogliamo dividerlo in n parti uguali, usando solo riga e compasso (n numero naturale fissato > 0).
Fissiamo una unità di misura di lunghezza 1.
Su un altro segmento uscente da A (disegnato in verticale nella figura), tracciamo n segmenti uguali a 1 (n=4 nella figura): nella figura, AU ha lunghezza 1, come ciascuno degli altri segmenti tra loro adiacenti; viene indicato con C l'ultimo estremo di tali segmenti



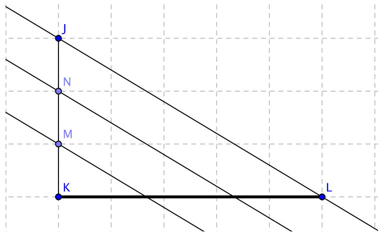
Ora tracciamo la retta per C e B



e poi le parallele a questa retta passanti per ciascuno degli estremi dei segmenti uguali su AC:

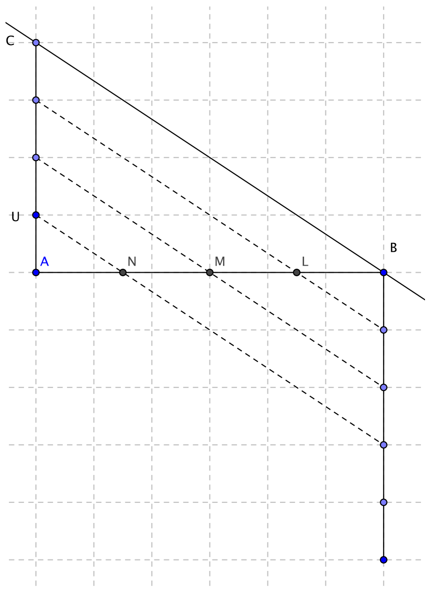


Il segmento AB risulta in questo modo suddiviso in parti uguali (lo stesso numero di parti uguali che erano stati segnati in AC).



Il segmento KL diviso in 3 parti uguali

Un modo comodo per tracciare le rette parallele è di costruire una retta trasversale anche sulla seconda estremità del segmento da suddividere, come in figura:



1. Svolgi il calcolo fino a calcolare due cifre decimali nel risultato, riportando tutti i passaggi svolti ed un eventuale resto ottenuto:
8,672:3,2 =

2. Calcola:

- 3486+1234= 3486 x 1234=
- 2032 – 753= 2032 : 73=
- 25,6 × 5,27= 25,6 - 5,27=
- 34,12+116,7= 24,075: 3,21 =

3. Per ciascuna affermazione, rispondi segnando con una crocetta (V) se è vera, (F) se è falsa.

$(V)\quad (F)\quad (3+5)\times\ 2 = \ 3+5\times 2$

$(V)\quad (F)\quad \frac{18}{14}\ :\ 2 = \frac{18}{28}$

$(V)\quad (F)\quad \frac{4}{9} - \frac{2}{5} = \frac{2}{45}$

$(V)\quad (F)\quad (7-3)\ :\ 2 = \ 14 - 3\times 4$

$(V)\quad (F)\quad \frac{4}{3} < 1{,}3$

$(V)\quad (F)\quad \frac{3}{8}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

4. Valuta le seguenti espressioni:

$\frac{3}{4}+\frac{5}{7} =$

$[2\times (194-\frac{15}{3})] : 3=$

5. Completa i sillogismi, classificali per modo e figura e rappresentali graficamente:

☐I pittori dipingono i quadri.
☐Carlo è un pittore.
☐ ....
Figura: ....
Sillogismo logicamente corretto SI NO

☐ Le arance sono frutti.
☐ Mario ha qualche arancia.
☐.............................
Figura:
Sillogismo logicamente corretto SI NO

☐ Qualche pecora mangia l'erba.
☐ Tutte le pecore sono ammalate.
☐.............................
Figura:
Sillogismo logicamente corretto SI NO

☐ Tutti i corvi gracchiano.
☐ Qualche uccello non gracchia.
☐.............................
Figura:
Sillogismo logicamente corretto SI NO

6. Nega le seguenti frasi

Alcuni piccioni mangiano le briciole.

....

Nessun libro è stato venduto.

....

7. Segna con una crocetta tutte e sole le risposte corrette.

La proposizione *Tutti i giorni Carlo telefona a Mario e discute di calcio*

A. è una proposizione composta
B. non contiene una disgiunzione
C. ha come negazione: *Carlo non telefona mai a Mario*.
D. non ha come negazione: *Carlo non telefona a Mario e non discute di calcio.*
E. implica che *Oggi Carlo discute di calcio*

8. Scrivi la tavola delle veritò di $p \wedge q$ e di $p \vee q$

9. Scrivi se la conclusione è logicamente corretta

Se nevica, indosso gli stivali
Non indosso gli stivali
Non nevica.

Sillogismo corretto SI NO

Se parlo, non sento la radio.
Non parlo
Non sento la radio

Sillogismo corretto SI NO

10. Utilizzando il metodo di Euclide, calcola il massimo comune divisore di 583 e 371 e la relativa identità di Bezout.

11. Applica in ciascuna espressione la proprietà richiesta, poi valuta il risultato:

proprietà commutativa: $45-\frac{21}{2}+\frac{6}{10}=$

proprietà associativa: $(8\times\frac{2}{3}+\frac{5}{9})-24:3=$

proprietà distributiva: $(12+\frac{7}{20})\times 4+\frac{5}{4}=$

12. Utilizzando il metodo di Euclide, calcola il massimo comune divisore di 1482 e 2337.

13. Riordina dal minore al maggiore i seguenti numeri.

$0{,}8$; $\frac{10}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $(2{,}3\times 0{,}4)$; $\frac{15}{17}$; $(0{,}336 : 0{,}21)$; 1

....

14. Completa le premesse dei seguenti sillogismi, in modo che i sillogismi siano logicamente corretti.

I mammiferi dormono spesso.
....
Le mucche dormono spesso.

Se ....
Guido è in treno.
Guido non beve.

Fondamenti della Matematica di base LM 85bis **LUMSA - a. a. 2019 - 2020**

Esercizi di ripasso (relativi al programma e ad alcuni prerequisiti)

1. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 46233 e 5457 e la relativa identità di Euclide-Bézout

2. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 43953 e 5292 e la relativa identità di Bézout

3.a) Completa il sillogismo, classificalo per modo e figura, segnala se è logicamente corretti e forniscine una rappresentazione insiemistica.
Nessun bambino è in giardino.
Mario è in giardino.
....
Figura: .... Modo ……..
Sillogismo logicamente corretto? ……….

3.b) Nega la seguente frase

Carla non dorme e ascolta la musica.

....

....

4.a) Completa il sillogismo, classificalo per modo e figura, segnala se è logicamente corretti e forniscine una rappresentazione insiemistica.
Tutti gli uccelli sul prato mangiano.
Qualche piccione mangia.
....
Figura: .... Modo ……..
Sillogismo logicamente corretto? ……….

4.b) Nega la seguente frase

Giovanni parte subito o non arriva in tempo.

....

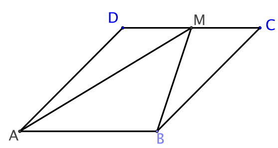
....

5.a) Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 833 e 539.
e la relativa identità di Euclide-Bézout.
5.b) Calcola il massimo comune divisore tra 833^2 e 539^2.

6. Dimostra che, se il numero naturale *n* divide i numeri naturali *a* e *b*, allora *n* divide anche 3*a*-2*b*.

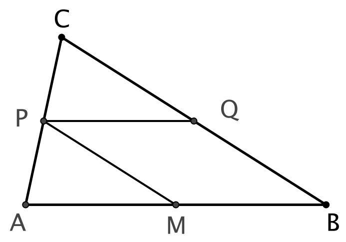
7. Un triangolo $\mathcal{T}$ di vertici A, B, C ha la base AB di 6,4 cm e l'area di 8,96 cm^2.
Sia M il punto medio di A e B. Il triangolo *S* di vertici A, M, C', ha l'altezza rispetto alla base AM doppia dell'altezza del triangolo $\mathcal{T}$ rispetto a AB.
a) Calcola la lunghezza dell'altezza di $\mathcal{T}$ rispetto alla base AB (in cm). **Risposta:** ....
b) Calcola l'area del triangolo *S*. **Risposta**: ....

8. Dimostra quanto richiesto.
Sia $\mathcal{P}$ un parallelogramma di vertici A, B, C, D come in figura. Sia M il punto medio di DC. Calcola il rapporto tra l'area di $\mathcal{P}$ e l'area del triangolo *AMD*.



9. Dimostra quanto richiesto.
Sia $\mathcal{T}$ un triangolo di vertici A, B, C come in figura.
Siano M il punto medio di AB e P il punto medio di AC.

Supponi, inoltre, che Q sia un punto su BC tale che PQ e AB siano paralleli.
a) Dimostra che i triangoli PQC^{Δ} e AMP^{Δ} sono congruenti.
b) Dimostra che i trapezi ABQP e MBCP hanno la stessa area.



10. Enuncia e dimostra il Teorema di Talete

11. Svolgi le operazioni ricopiando in dettaglio la procedura svolta

$\frac{7}{3}+\frac{5}{4}=$ ....

$21{,}3 \times 1{,}37 =$ ....

$\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}=$ ....

$15{,}12 : 6{,}3 =$ ....

12. **Segna con una crocetta V se la risposta è vera, F se è falsa. Poi inserisci la tavola della verità.**

12.a. La proposizione *Tullio colora il disegno e ascolta la radio*

V F è una proposizione composta

V F contiene una disgiunzione

V F ha come negazione: *Tullio non colora il disegno e non ascolta la radio*

V F implica che *Tullio ascolta la radio*

12.b. Scrivi la tavola della verità della proposizione assegnata, in funzione delle proposizioni semplici da cui è composta.

13. Rappresenta attraverso insiemi ogni proposizione nell'elenco a sinistra.
Forma la negazione inserendo nell'elenco a destra esclusivamente le parole: nessuno/a, ogni, qualche, non.
Rappresenta attraverso insiemi le negazioni trovate.

1. Qualche anatra è bianca.

2. Ogni mela è rovinata.

1. .... anatra ....è....... bianca.

2. .... mela ....è rovinata

14.Classifica i sillogismi per modo e figura e scrivi se la conclusione è logicamente corretta

□I corvi hanno una buona vista.
□Qualche animale dello zoo ha una buona vista.
□ Qualche animale dello zoo è un corvo.
Figura:
Sillogismo corretto SI NO

□Qualche pesce è affamato.
□Tutti gli squali non sono affamati.
□Qualche pesce non è uno squalo.
Figura:
Sillogismo corretto SI NO

15. Siano n, a, b numeri naturali. Mostra che, se n è un divisore di a e b, allora è anche un divisore di k a + h b per ogni naturale h e k

16. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 46233 e 5457 e la relativa identità di Euclide-Bézout

Risposta: MCD = ...

Identità di Bézout : ....

17. Svolgi le operazioni ricopiando in dettaglio la procedura svolta

$\frac{5}{2}+\frac{3}{7}=$ .... 31,3 × 2,18 = ...

$\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=$ .... 26,28 : 7,3 = ...

18. Segna con una crocetta V se la risposta è vera, F se è falsa. Poi inserisci la tavola della verità.

18.a. La proposizione *Carlo corre con Mario o gioca con Giulia*

V F è una proposizione composta

V F contiene una disgiunzione

V F ha come negazione: *Carlo non corre con Mario o gioca con Giulia*

V F implica che *Carlo gioca con Giulia*

18.b. Scrivi la tavola della verità della proposizione assegnata, in funzione delle proposizioni semplici da cui è composta.

19. Rappresenta attraverso insiemi ogni proposizione nell'elenco a sinistra.
Forma la negazione inserendo nell'elenco a destra esclusivamente le parole: nessuno/a, ogni, qualche, non.
Rappresenta attraverso insiemi le negazioni trovate.

1. Ciascun bambino gioca a palla. 1. .... bambino ....gioca a palla.
2. Nessun libro è aperto. 2. .... libro ....è apert

20. Scrivi una conclusione (specificando se è logicamente corretta) e classifica i sillogismi per modo e figura

☐ I giaguari sono veloci.
☐ Qualche giaguaro è addormentato.
☐ ....
Figura:
Sillogismo corretto SI NO

☐ Qualche bambino è curioso.
☐ Tutte le persone curiose sono attente.
☐...
Figura:
Sillogismo corretto SI NO

21. Siano n, a, b numeri naturali e supponi che n sia un multiplo di a e b. E' vero che n è multiplo k a + h b per ogni naturale h e k?

22. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 43953 e 5292 e la relativa identità di Bézout

Risposta: MCD = ...

Identità di Bézout : ....

23. Svolgi le operazioni ricopiando in dettaglio la procedura svolta

$\frac{11}{3}+\frac{2}{5}=$ ....

$13{,}2 \times 2{,}17 =$ ....

$\frac{4}{5}\times\frac{7}{3}=$ ....

$15{,}96 : 4{,}2 =$ ....

24. **Segna con una crocetta V se la risposta è vera, F se è falsa. Poi inserisci la tavola della verità.**

25.a. La proposizione *Gli studenti partecipano alle lezioni e studiano il programma.*

V F è una proposizione semplice

V F contiene una implicazione

V F ha come negazione: *Gli studenti non partecipano alle lezioni o non studiano il programma*

V F implica che *Nessuno studente non studia il programma*

25.b. Scrivi la tavola della verità della proposizione assegnata, in funzione delle eventuali proposizioni semplici da cui è composta.

26. Rappresenta attraverso insiemi ogni proposizione nell'elenco a sinistra.
Forma la negazione inserendo nell'elenco a destra esclusivamente le parole: nessuno/a, ogni, qualche, non.
Rappresenta attraverso insiemi le negazioni trovate.

1. Tutte le confezioni contengono un regalo.

2. Alcuni amici sono in ritardo.

1. .... confezione ....contiene....... regalo.

2. .... amico ....è in ritardo

27. Scrivi una conclusione (specificando se è logicamente corretta) e classifica i sillogismi per modo e figura

☐ Ogni patata è stata cotta.

☐ Qualche patata non è buona.

☐ ....

Figura:

Sillogismo corretto SI NO

☐ Tutte le penne hanno inchiostro blu.

☐ Nessuna penna è nel cassetto.

☐.......................................

Figura: Sillogismo corretto SI NO

28. Siano n, a, b numeri naturali. Mostra che, se n è un divisore di MCD(a, b), allora n è anche un divisore di a + b .

29. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 42433 e 5297 e la relativa identità di Euclide-Bézout

Risposta: MCD = ... Identità di Bézout : ....

30. Svolgi le operazioni ricopiando in dettaglio la procedura svolta

$\frac{5}{3}+\frac{7}{4}=$.......... $23{,}1 \times 1{,}73 =$ ....

$\frac{2}{7}\times\frac{5}{9}=$........... $16{,}34 : 3{,}8 =$ ....

31. **Segna con una crocetta V se la risposta è vera, F se è falsa. Poi inserisci la tavola della verità.**

32.a. La proposizione *Giorgia lavora e è sempre puntuale*

V F è una proposizione semplice

V F contiene una disgiunzione

V F ha come negazione: *Giorgia non lavora*

V F implica che *Giorgia non è mai in ritardo*

33.b. Scrivi la tavola della verità della proposizione assegnata, in funzione delle proposizioni semplici da cui è composta.

34. Rappresenta attraverso insiemi ogni proposizione nell'elenco a sinistra. Forma la negazione inserendo nell'elenco a destra esclusivamente le parole: nessuno/a, ogni, qualche, non.
Rappresenta attraverso insiemi le negazioni trovate.

1. Tutte le finestre sono chiuse. 1. .... finestra ....è....... chiusa.
2. Qualche torta si è rovinata. 2. .... torta ....si è rovinata

35.Classifica i sillogismi per modo e figura e scrivi se la conclusione è logicamente corretta

☐ Tutti gli oggetti sul tavolo sono di Piero.

☐ I quaderni sono sul tavolo.

☐ I quaderni sono di Piero.

Figura:

Sillogismo corretto SI NO

☐ Qualche verdura rossa è nutriente.

☐ Qualche cipolla è una verdura rossa.

☐ Qualche cipolla è nutriente.

Figura:

Sillogismo corretto SI NO

36. Siano n, a, b numeri naturali. Mostra che, se n è un divisore di a e (a+b), allora è anche un divisore di h b per ogni naturale h

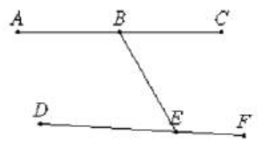
37. Con il metodo di Euclide, calcola il massimo comun divisore di 46233 e 5454 e la relativa identità di Euclide-Bézout

Risposta: MCD = ... Identità di Euclide-Bézout : ....

Lezione n. 20 del 16 febbraio 2021
2.1 Una teoria assiomatica per la geometria piana: Elementi di Euclide - Libro I
(testo di riferimento: L.Russo, G.Pirro, E.Salciccia, Euclide: il I libro degli Elementi, Carocci Editore, collana Frecce)

Il libro I degli Elementi di Euclide costituisce una presentazione assiomatico-deduttiva della geometria del piano (non del tutto completa).
In esso sono presentate 23 definizioni (nelle quali non vengono distinti termini primitivi e definizioni nel senso moderno del termine), alcune regole della logica aristotelica e cinque postulati. A partire da essi, Euclide discute teoremi di geometria piana relativi principalmente ai triangoli. Una osservazione successiva e recente ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi. Inoltre, non è accertato che la versione riportata sia quella autentica di Euclide, o includa revisioni successive e interventi di altri autori. Le parti riportate **contengono variazioni** rispetto alla traduzione del testo originale, nel tentativo di avvicinare la terminologia a quella attualmente in uso, e di segnalare i termini cui ora vengono attribuiti significati differenti.
Definizioni
1) Un ***punto*** è ciò che non ha parti
2) Una ***linea*** è una lunghezza senza larghezza
3) Gli ***estremi di una linea*** sono punti
4) Un ***segmento*** (linea retta) è una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti
5) Una ***superficie*** ha solo lunghezza e larghezza
6) Le estremità di una superficie sono linee
7) Una ***superficie piana*** è una superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette
8) Un ***angolo*** piano è l'inclinazione fra due linee in un piano che si incontrano e non giacciono su uno stesso segmento
9) e quando le linee che si incontrano sono rette l'**angolo** è detto **rettilineo**
10) Quando un segmento, innalzato a partire da un altro segmento, forma due angoli adiacenti uguali, ognuno di quegli angoli è ***retto*** e il segmento che sta sull'altro è detto ***perpendicolare***
11) Un ***angolo ottuso*** è un angolo più grande di un angolo retto
12) Un ***angolo acuto*** è un angolo più piccolo di un angolo retto
13) Un ***contorno*** è l'estremità di qualcosa
14) Una ***figura*** è ciò che è contenuta da un contorno
15) Un ***cerchio*** è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette che vanno su essa da un punto interno alla figura sono uguali tra di loro
16) e il punto è detto ***centro*** del cerchio
17) Un ***diametro*** del cerchio e una linea retta tracciata dal centro e che termina in entrambe le direzioni sulla circonferenza del cerchio, e questa linea retta biseca il cerchio
18) Un ***semicerchio*** è la figura contenuta dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e il centro del semicerchio è lo stesso del centro del cerchio
19) Figure rettilinee sono quelle contenute da linee rette, figure trilaterali (***triangoli***) sono quelle contenute da tre, quadrilaterali da quattro, e multilaterali quelle contenute da più di quattro linee rette
20) Delle figure trilaterali, un ***triangolo equilatero*** è quello che ha tre lati uguali, un triangolo isoscele è quello che ha due lati uguali e un triangolo scaleno è quello che ha i tre lati diseguali
21) inoltre delle figure trilaterali un ***triangolo rettangolo*** è quello che ha un angolo retto, un ***triangolo ottusangolo*** quello che ha un angolo ottuso e un ***triangolo acutangolo*** uno che ha i tre angoli acuti
22) Delle figure quadrilaterali, un ***quadrato*** è quello che ha sia i lati uguali che gli angoli retti, un ***rettangolo*** quello che ha gli angoli retti ma non i lati tutti uguali, un ***rombo*** è quello equilatero ma non con gli angoli retti, un ***trapezio*** quello che ha i lati e gli angoli opposti uguali a due a due ma non è equilatero e non ha angoli retti.
23) linee rette parallele sono linee rette che, essendo nello stesso piano e prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano in nessuna delle due direzioni

Postulati (o assiomi):
1) È possibile disegnare un segmento tra due punti
2) È possibile prolungare un segmento
3) È possibile disegnare una circonferenza con dato raggio e dato centro
4) Tutti gli angoli retti sono uguali
5) Se una linea retta che cade su due linee rette forma angoli interni dalla stessa parte minori di due angoli retti, allora le due rette, se prolungate indefinitamente, si incontreranno dalla parte in cui gli angoli interni sono minori di due angoli retti



Se dunque la somma degli angoli ABE e BED è minore di due angoli retti, le rette AC e DF, prolungate dalla parte di A e D, si incontreranno.

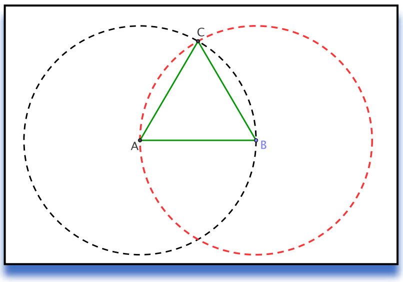
Nozioni comuni (o regole di logica)
1) Cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro
2) Cose uguali sommate a cose uguali danno somme uguali
3) Cose uguali sottratte a cose uguali danno differenze uguali
4) Cose coincidenti sono uguali
5) L'intero è maggiore della sua parte

A partire dalle 23 definizioni, dalle regole della logica aristotelica e dai cinque postulati, Euclide discute alcuni risultati di geometria piana relativi principalmente ai triangoli: ogni proposizione è dimostrata attraverso costruzioni garantite dagli assiomi iniziali, dalle proposizioni precedenti e dalle regole logiche. Una osservazione successiva ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi (alcuni dei quali verranno riportati all'interno della trattazione).

2.2 Le proposizioni del Primo Libro degli Elementi di Euclide
Per facilitare la lettura delle proposizioni, apporteremo alcune variazioni al testo, cercando però di salvarne lo spirito. Queste note vanno intese come tramite verso la lettura del testo euclideo, e non si sostituiscono ad esso.
Si osservi che il postulato 3 fornisce la possibilità di utilizzare il compasso per disegnare una circonferenza, ma la sua formulazione non permette di utilizzarlo per misurare la lunghezza di un segmento: l'assioma non assicura di poter mantenere l'apertura del compasso quando lo si solleva dal foglio. Tale possibilità viene però garantita attraverso le proposizioni 2 e 3

Proposizione I.1
Fissato un segmento, è possibile costruire un triangolo equilatero di cui quel segmento è un lato.

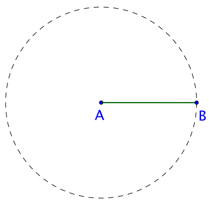
figura iniziale



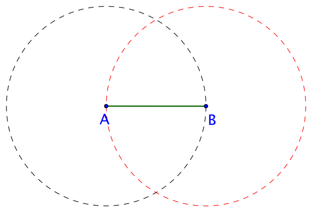
costruzione

Dimostrazione Sia AB il segmento assegnato. Si chiede di costruire un triangolo equilatero sul segmento AB.

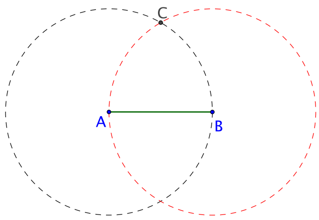
Tracciamo la circonferenza (nera) di centro A e raggio AB [assioma 3].



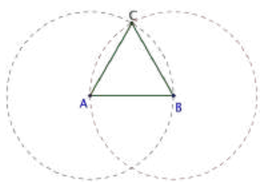
Poi tracciamo la circonferenza di centro B e raggio BA [assioma 3].



Scegliamo un punto C in cui i cerchi si intersecano [*questo passaggio non è lecito senza un ulteriore assioma che Euclide omette di introdurre: è l'assioma 6*]



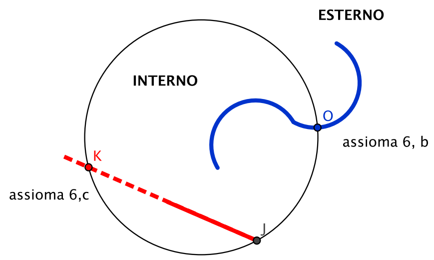
Tracciamo un segmento congiungente A e C e uno congiungente B e C [assioma 1].



Ora poiché B e C appartengono alla stessa circonferenza di centro A, AC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]

Analogamente, poiché A e C appartengono alla stessa circonferenza di centro B, BC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]
Poiché cose che sono uguali alla stessa cosa sono uguali tra di loro, allora AC è anche uguale a BD. [nozioni comuni]
Quindi i tre segmenti AB, AC e BC sono uguali tra loro. Il triangolo ABC è quindi equilatero (avendo i tre lati uguali), ed ha per lato AB. QED

Ecco l'assioma che assicura che le due circonferenze nella dim. della Prop. 1 si intersechino:
Assioma 6: *a) un cerchio (rispettivamente, un triangolo) separa i punti del piano che non sono contenuti in esso in due regioni, che vengono chiamate* ***interno*** *ed* ***esterno****.*
b) Ogni linea tracciata da un punto esterno ad un punto interno interseca il cerchio (risp., il triangolo)
c) Ogni segmento tracciato da un punto sul cerchio (o su un triangolo) ad un punto interno, incontrerà, se prolungato indefinitamente, il cerchio (risp., il triangolo) esattamente in un altro punto



Per comodità di lettura, raccogliamo altri assiomi da aggiungere a quelli iniziali di Euclide. Questi assiomi sono solo una parte di quelli veramente necessari.

Assioma 7
a) Una retta (che si estende in modo indefinito in entrambe le direzioni) separa i punti del piano non appartenenti ad essa in due regioni dette ***semipiani****.*
b) Ogni linea, tracciata da un punto in un semipiano in un punto nell'altro semipiano, incontra la retta.

Assioma 8 LAL *(LAL: Lato-Angolo-Lato) (sostituisce la Proposizione I.4)*
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti.
Assioma 9 *Triangoli congruenti hanno aree uguali.*

Proposizione I.2
Dati un segmento e un punto, costruire un segmento che uguale al segmento assegnato e che abbia per estremo il punto dato.

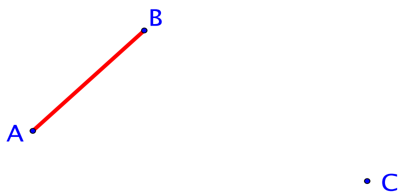
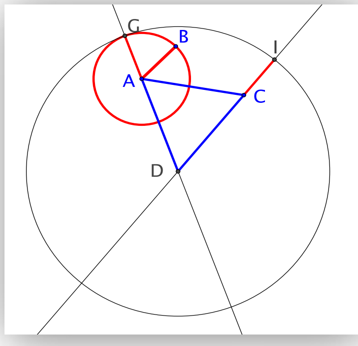


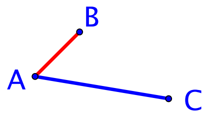
Figura iniziale



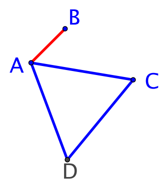
Costruzione

Siano AB il segmento e C il punto assegnati. È richiesto di costruire a partire dal punto C un segmento uguale a AB.

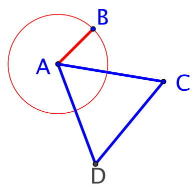
Disegniamo il segmento AC [assioma 1]

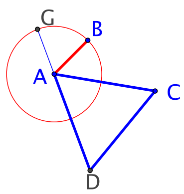


Disegniamo un triangolo equilatero di lato AC [in blu, prop. 1] e chiamiamo D il vertice diverso da A e C.

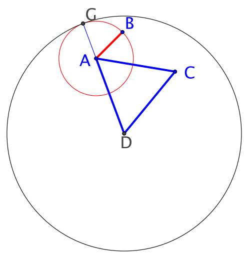


Disegniamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3]



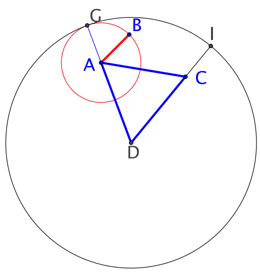


Prolunghiamo DA (a partire da A) [assioma 2] fino ad incontrare in G la circonferenza (rossa) di centro A e raggio AB [assioma 6]
Siccome il punto A è il centro del cerchio, AB è uguale a AG [definizione di cerchio].



Disegniamo la circonferenza di centro D e raggio DG [assioma 3]

Prolunghiamo DC (a partire da C) [assioma 2] fino ad incontrare in I la circonferenza (nera) di centro D e raggio DG [assioma 6]



Siccome D è il centro del cerchio, DG è uguale a DI [definizione di cerchio].
Ma DG = DA+AG e DI = DC+CI, e dunque

DA+AG = DC+CI.

Osserviamo che DA è uguale a DC [perché lati del triangolo ADC che è equilatero per costruzione].
Per le nozioni comuni anche la parte restante AG risulta uguale a CI.
Dunque, CI è uguale a AG, che a sua volta è uguale a AB. Per le nozioni comuni, segue che CI è uguale a AB.

QED

Proposizione I.3

Possiamo togliere da un segmento più lungo un segmento più breve.

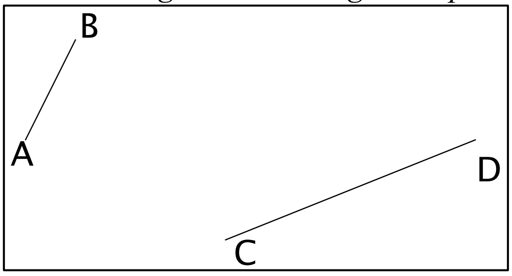
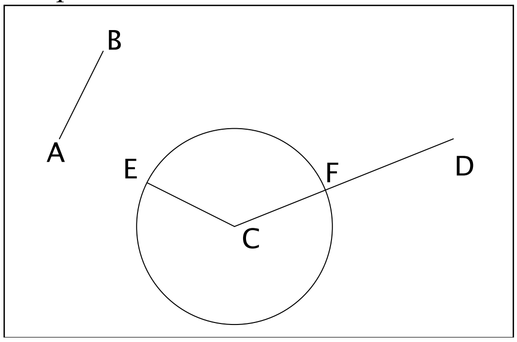


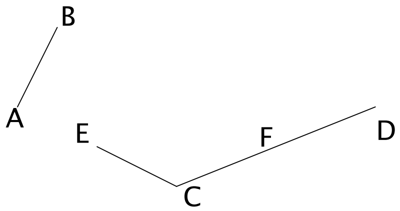
figura iniziale



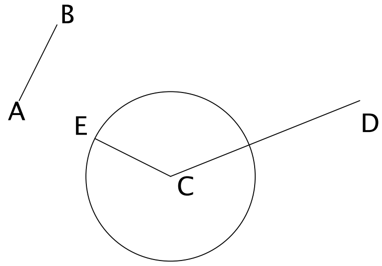
costruzione

Siano AB e CD due segmenti di differente lunghezza, e CD sia il più lungo.
Si chiede di togliere dal segmento più lungo CD un segmento uguale al più piccolo AB.

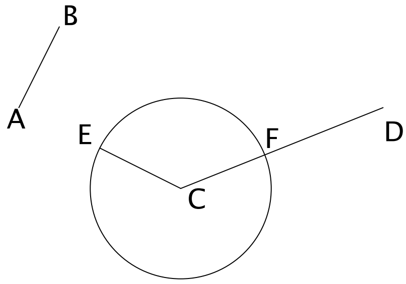
Costruiamo CE a partire da C uguale alla linea retta AB. [prop I.2]



Disegniamo il cerchio con centro C e raggio CE [assioma 3]



Per l'assioma 6 il segmento CD e il cerchio disegnato si intersecano in un punto, che chiamiamo F [assioma 6]

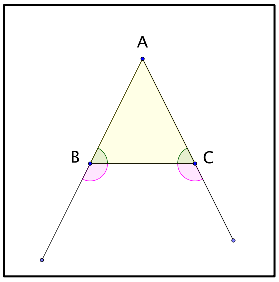


Ora, siccome il punto C è il centro del cerchio EF, CE è uguale a CF. [def. di cerchio]
Ma AB è anche uguale a CE, e dunque CF anche è uguale a AB. [nozioni comuni]
Dunque, dati due segmenti AB < CD, CF uguale ad AB è stata tolto da CD.

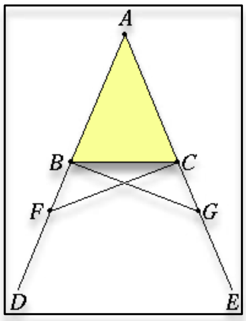
■

Le due proposizioni seguenti mostrano che un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

Proposizione I.5
In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.
Dimostrazione



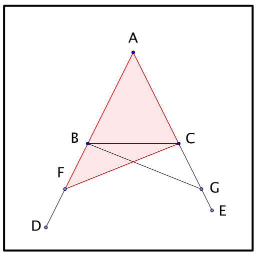
Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC^{Δ} con il lato AB uguale al lato AC.
Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2).
Vogliamo mostrare che gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ (in verde) sono uguali e che anche gli angoli $\widehat{CBD}$ e $\widehat{BCE}$ (in rosa) sono uguali tra loro.

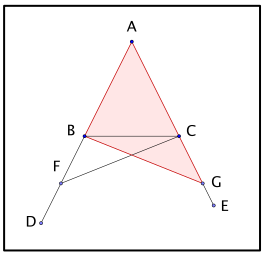


costruzione

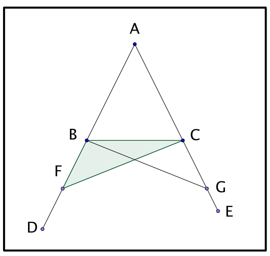
Per ipotesi, i segmenti AB e AC hanno la stessa lunghezza.
Fissiamo un punto F su BD.
Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3].
In questo modo, abbiamo ottenuto segmenti AF e AG della stessa lunghezza, perché AF = AB+BF e AG = AC+CG e gli addendi sono tra loro uguali.

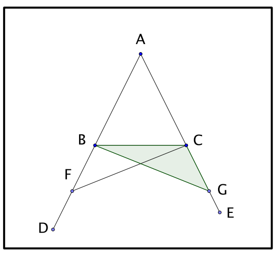
Congiungiamo il punto B con G e il punto C con F (post. I.1)





Consideriamo i triangoli AFC^{Δ} e ABG^{Δ}: essi hanno uguali i lati AF e AG (per quanto visto), come anche i lati AC e AB (per ipotesi). Inoltre, hanno in comune l'angolo $\widehat{FAG}$, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono dunque congruenti per LAL. In particolare, i segmenti FC e BG sono uguali, gli angoli $\widehat{ACF}$ e $\widehat{GBA}$ coincidono e gli angoli $\widehat{AFC}$ e $\widehat{BGA}$ coincidono.





Ora consideriamo i triangoli BFC^{Δ} e BGC^{Δ}.
Poiché il segmento AF è uguale ad AG e il segmento AB è uguale ad AC, per differenza il segmento BF è uguale a CG (NC.3).
Inoltre, i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli $\widehat{BFC}$ e $\widehat{BGC}$ per quanto visto. Dunque, i due triangoli sono congruenti per l'assioma LAL. In particolare, l'angolo $\widehat{CBF}$ ($=CBD^{\Delta}$) è uguale all'angolo $\widehat{BCG}$ ($=BCE^{\Delta}$): era uno dei risultati che volevamo dimostrare.

Abbiamo provato che gli angoli $\widehat{ABG}$ e $\widehat{ACF}$ sono congruenti tra loro e gli angoli $\widehat{CBG}$ e $\widehat{BCF}$ sono congruenti tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo $\widehat{ABC}$ (ottenuto da $\widehat{ABG}$ sottraendo $\widehat{CBG}$) è uguale all'angolo $\widehat{ACB}$ (ottenuto da $\widehat{ACF}$ sottraendo $\widehat{BCF}$) (C.N.3). ■

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

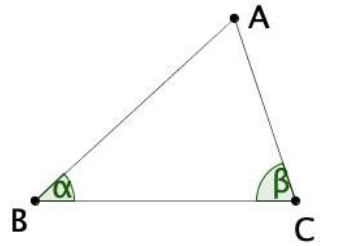
Lezione n. 21 del 18 febbraio 2021

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione

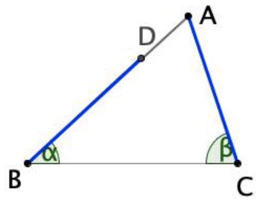
Sia ABC$^{\Delta}$ un triangolo nel quale l'angolo $\alpha = \widehat{ABC}$ è uguale all'angolo $\beta = \widehat{ACB}$. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.



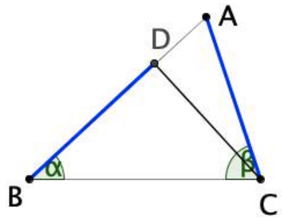
Sappiamo che $\alpha = \beta$

Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.). Dunque, AB è maggiore o minore di AC.
Si osservi che questa deduzione si basa su una legge non elencata nelle nozioni comuni: è detta 'legge di tricotomia' e afferma che ***date due quantità omogenee AB e AC, allora AB>AC, oppure AB=AC oppure AB<AC****.*
Caso 1: Supponiamo che AB sia maggiore di AC (come nella figura)

Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3);



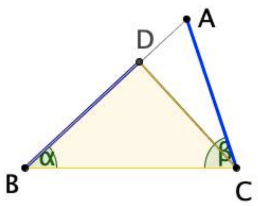
tracciamo il segmento DC (I. Post. I).

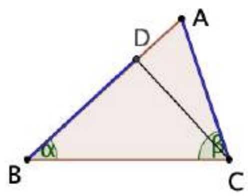


Consideriamo i triangoli DBC$^{\Delta}$ e ABC$^{\Delta}$: essi hanno

1. BD =AC per costruzione,
2. BC in comune,
3. angolo $\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{DBC}$ uguale all'angolo $\beta = \widehat{ACB}$.

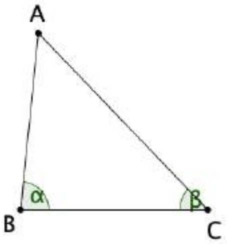
Per l'assioma LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.





Per l'assioma 9, i due triangoli DBC$^{\Delta}$ e ABC$^{\Delta}$ hanno quindi aree uguali. Ma il triangolo DBC$^{\Delta}$ è strettamente contenuto in ABC$^{\Delta}$, e ha dunque un'area strettamente minore.
Assurdo: quindi non è possibile che AB sia maggiore di AC.

Caso 2: Supponiamo che AB sia minore di AC. (*completare per esercizio la dimostrazione)*

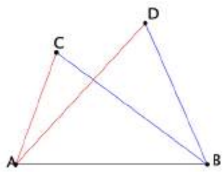


.... ■

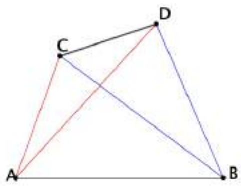
Proposizione I.7(non è richiesta la dimostrazione)
Siano dati due segmenti AC e CB costruiti, rispettivamente, a partire dai due estremi A e B di un segmento AB e che terminano in uno stesso punto C. Se D è un punto tale che

- *AD ha la stessa lunghezza di AC,*
- *BD ha la stessa lunghezza di BC*
- *i segmenti AD, BD, AC, CD stanno nello stesso semipiano rispetto a AB*

allora C=D.



Dimostrazione
Supponiamo per assurdo che esistano segmenti AC, CB, AD e DB come nelle ipotesi e tali che C≠D.
Uniamo C con D [assioma 1]



Caso 1: supponiamo che D sia esterno al ABC^{Δ}, come in figura.
Osserviamo che $\widehat{ACD} > \widehat{BCD}$ (per le nozioni comuni)
Inoltre, il triangolo BCD^{Δ} ha i lati BC e BD uguali, e dunque ha uguali gli angoli alla base $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BDC}$ [prop.5]]

Componendo con la disuguaglianza precedente, troviamo che $\widehat{ACD} > \widehat{BCD} = \widehat{BDC}$.
A sua volta, $\widehat{BDC} > \widehat{ADC}$ per le nozioni comuni, e abbiamo la catena di disuguaglianze

$$\widehat{ACD} > \widehat{BCD} = \widehat{BDC} > \widehat{ADC}$$

Ma anche il triangolo ADC^{Δ} è isoscele perché i lati AC e CD sono uguali per ipotesi. Allora, anche gli angoli alla base $\widehat{ACD}$ e $\widehat{ADC}$ sono uguali [prop.5]]
La catena di disuguaglianze diventa

$$\widehat{ACD} > \widehat{BCD} = \widehat{BDC} > \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$$

Dunque, $\widehat{ACD} > \widehat{ACD}$ per la transitività delle disuguaglianze, e abbiamo trovato un assurdo.
Altri casi: non vengono trattati da Euclide, ma possono essere svolti per esercizio.

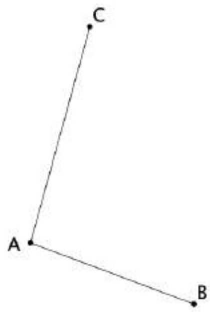
■

Proposizione I.8 (non è richiesta la dimostrazione e viene considerata un assioma, anche se tale assioma è conseguenza di altri)
Assioma LLL: *Se due triangoli abbiano tre lati in corrispondenza uguali, allora i triangoli sono tra loro congruenti.*
Cioè, se nei triangoli ABC^{Δ} *e* $A'B'C'^{\Delta}$ *si ha che AB=A'B', AC=A'C', BC=B'C', allora* $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$, $\hat{C} = \widehat{C'}$ *e i triangoli sono congruenti.*

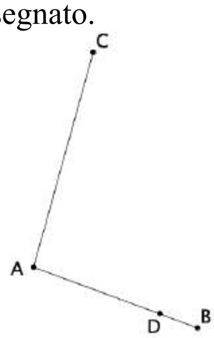
Proposizione I.9
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi angolo (rettilineo) assegnato.

Osservazione: *Diremo che è possibile bisecare l'angolo. Per dividere l'angolo in due parti uguali, tracceremo un segmento uscente da A (o una semiretta), che sara' detto* ***bisettrice****.*

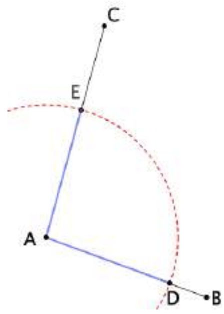
Dimostrazione



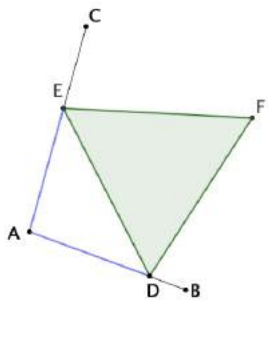
Sia BAC un angolo rettilineo assegnato.



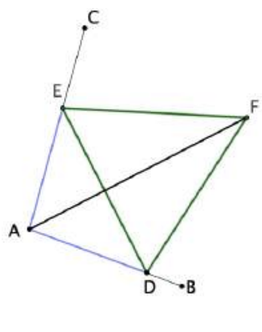
Si fissi un punto D su AB



e un punto E su AC in modo tale che AD=AE [I.3]

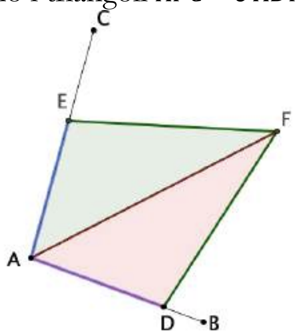


Si congiunga D con E [post. 1] e si costruisca
un triangolo equilatero DEF di lato DE [I.1]



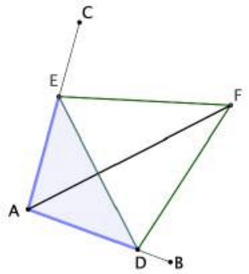
Si congiunga A con F [post . 1]

Dimostriamo ora che AF divide a metà l'angolo $\widehat{BAE}$, cioè $\widehat{BAF} = \widehat{FAE}$.
Primo modo:
Consideriamo i triangoli AFC^{Δ} e ADF^{Δ} e mostriamo che sono congruenti.



Osserviamo che AE = AD per costruzione, AF è in comune, FE = FB perché lati dello stesso triangolo equilatero. Per l'assioma LAL possiamo concludere che i due triangoli AFC^{Δ} e ADF^{Δ} sono congruenti. In particolare, gli angoli corrispondenti sono uguali e concludiamo che $\widehat{BAF} = \widehat{FAE}$, come si voleva.

Secondo modo:
Consideriamo il triangolo AED^{Δ}

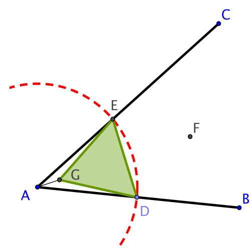


In esso, AE=AD per costruzione. Per la prop. I.5, gli angoli alla base $\widehat{AED}$ e $\widehat{ADE}$ sono uguali. Analogamente, poiché il triangolo DFE^{Δ} è equilatero (e quindi EF=FD), l'angolo $\widehat{EFD}$ è uguale all'angolo $\widehat{FDE}$.
Supponiamo che il triangolo equilatero sia disposto come in figura. Poiché, per le nozioni comuni, sommando cose uguali si ottengono cose uguali tra loro, l'angolo $\widehat{AEF} = \widehat{AED} + \widehat{DEF}$ risulta uguale all'angolo $\widehat{ADF} = \widehat{ADE} + \widehat{EFF}$.

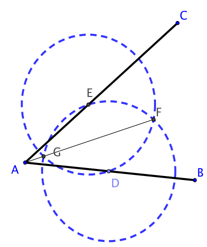
Consideriamo ora i triangoli AFE e ADF. In essi, AE=AD per costruzione, AF è in comune. Inoltre l'angolo $\widehat{AEF}$ compreso tra AE e EF coincide con l'angolo $\widehat{ADF}$ compreso tra AD e DF (come appena dimostrato). Per l'assioma LAL, concludiamo che i triangoli AFE^{Δ} e DFE^{Δ} sono congruenti. In particolare, ricaviamo che l'angolo $\widehat{EAF}$ è uguale all'angolo $\widehat{FAD}$ (come volevamo.
[osserviamo, inoltre, che l'angolo $\widehat{EFA}$ è uguale all'angolo $\widehat{AFD}$: dunque, il segmento AF risulta bisettrice anche dell'angolo $\widehat{EFD}$ del triangolo equilatero.]

Completare nel caso in cui il triangolo equilatero non sia disposto come in figura. ■

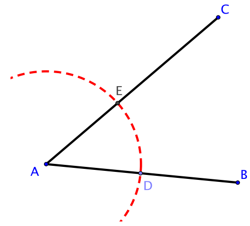
Esercizio 1.
Completa la dimostrazione nel secondo modo, nel caso il triangolo equilatero sia disposto come nella figura.



Esercizio 2.
Dimostra che i punti A, G, F sono allineati, cioè i segmenti AG e AF sono uno contenuto nell'altro.

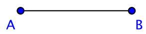


Esercizio 3. Dividi l'angolo in figura in 4 e in 8 parti uguali.



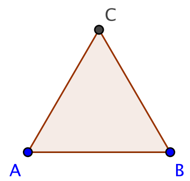
Proposizione I.10
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi segmento assegnato.
Dimostrazione

Sia assegnato un segmento AB.

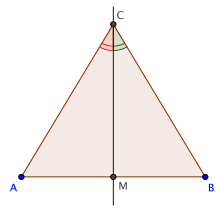


Vogliamo costruire il punto medio M (cioè il punto M appartenente al segmento e tale che AM=MB)

Costruiamo un triangolo equilatero ABC^{Δ} di lato AB (prop. I.1):



e bisechiamo l'angolo in C (prop. I.9). Chiamiamo M il punto di intersezione tra il segmento AB (o un suo prolungamento) e la retta che biseca l'angolo C.

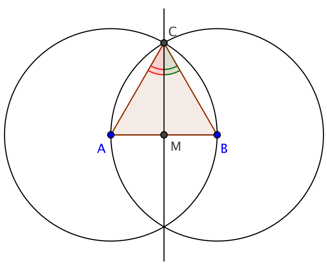


Mostriamo che M divide il segmento AB in due parti uguali: consideriamo i triangoli AMC^{Δ} e MBC^{Δ}; essi hanno il lato MC in comune, gli angoli $\widehat{MCB} = \widehat{MCA}$ congruenti per costruzione della bisettrice, e i lati AC = BC per definizione di triangolo equilatero. Ad essi possiamo quindi applicare il criterio di congruenza LAL, mostrando che AMC^{Δ} e MBC^{Δ} sono triangoli congruenti.
Da tale congruenza segue che:

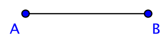
- AM=MB,
- l'angolo in A è uguale all'angolo in B (ma lo sapevamo già per la prop. I.5)
- l'angolo $\widehat{AMC}$ è uguale all'angolo $\widehat{CMB}$.

In particolare, AM = MB e abbiamo diviso AB in due parti uguali. ■

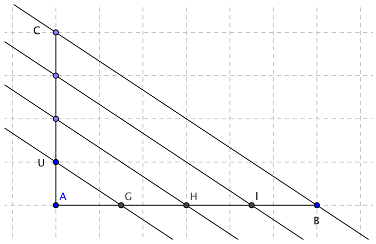
Esercizio 1. Mostra che, per dividere a metà il segmento AB, è sufficiente tracciare due cerchi di raggio AB (uno con centro A e l'altro con centro B) e tracciare la retta che congiunge i punti di intersezione tra questi due cerchi: tale retta divide in due parti uguali il segmento AB.



Esercizio 2. Dividi il segmento AB in 4 e in 8 parti uguali. Osservare che, iterando la procedura, è possibile dividere il segmento AB in 2^k parti uguali, con k naturale positivo arbitrario.



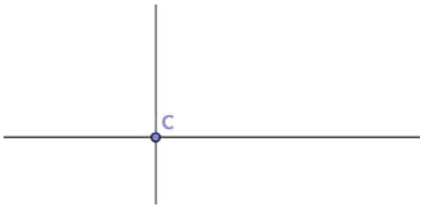
Ricordiamo che il Teorema di Talete ci aveva fornito un'altra soluzione grafica per dividere a metà un segmento, e per dividerlo in n parti uguali (con n naturale arbitrario). Il Teorema di Talete richiede però l'utilizzo anche dell'Assioma 5 delle parallele, che invece non è mai stato utilizzato nelle proposizioni di Euclide sin qui dimostrate.



Lezione 22 del 23 febbraio 2021
Proposizione I.11
Dati una retta e un punto su di essa, tracciare una retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto dato.
Dimostrazione

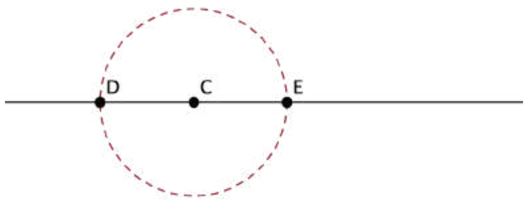
Siano assegnati una retta e un punto C su di essa:

Vogliamo tracciare una retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto C assegnato.

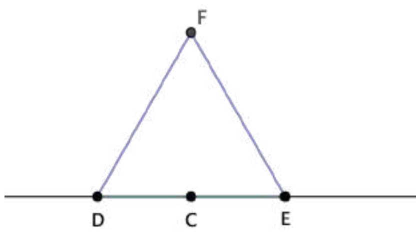


Consideriamo un punto D diverso da C sulla retta:

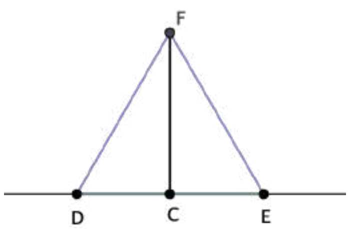
Nella semiretta di origine C non contenente D consideriamo un punto E tale che DC = CE. Osserviamo che C risulta essere il punto medio del segmento DE.



Applicando la prop. 1, costruiamo un triangolo equilatero DEF^{Δ} di lato DE



e congiungiamo F con C [assioma 1]

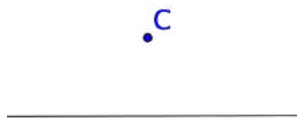


Consideriamo i due triangoli DCF^{Δ} e CEF^{Δ} e mostriamo che sono congruenti: infatti essi hanno uguali i lati FD = FE (perché lati di un triangolo equilatero), DC = CE (per costruzione), e FC = FC in comune. Concludiamo che i due triangoli DCF^{Δ} e CEF^{Δ} sono congruenti per il criterio LLL; in particolare, sono uguali gli angoli corrispondenti $\widehat{DCF} = \widehat{FCE}$, che risultano essere entrambi retti, mostrando che CF è la perpendicolare cercata. Si osservi, inoltre, che CF è bisettrice dell'angolo F. ■

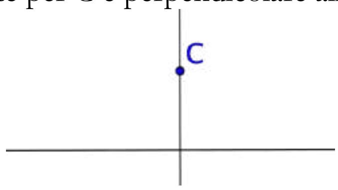
Esercizio: Dimostra la proposizione I.11 dimostrando la congruenza dei triangoli DCF^{Δ} e CEF^{Δ} tramite il criterio LAL.

Proposizione I.12 *Assegnati una retta e un punto esterno a essa, tracciare una retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto dato.*

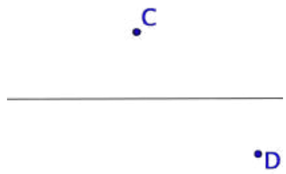
Dimostrazione



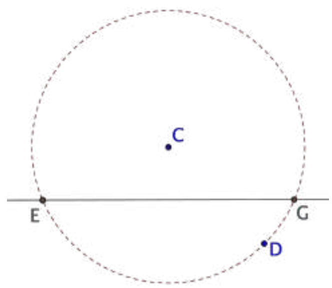
Siano assegnati una retta e un punto C esterno ad essa.
Dobbiamo disegnare una retta passante per C e perpendicolare alla retta data



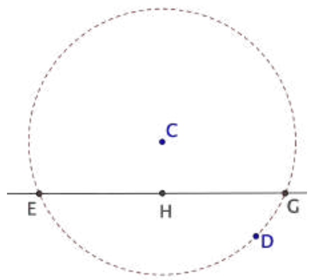
La retta assegnata divide il piano in due semipiani: in uno di essi c'è il punto C. [assioma 7]
Scegliamo un punto D nell'altro semipiano



Tracciamo la circonferenza di centro C e raggio CD [assioma 3] e denotiamo con E, G i punti di intersezione tra la retta e la circonferenza [assioma 6].

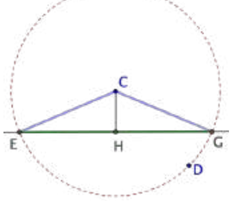


Consideriamo il punto medio H di EG [proposizione I.10]



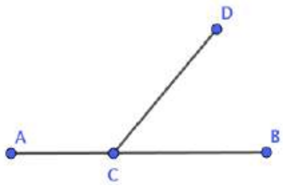
Tracciamo i segmenti CE e CG [assioma 1], osservando che tali segmenti sono uguali tra loro, perché raggi della stessa circonferenza.

Tracciamo inoltre il segmento CH [assioma 1].



Consideriamo i triangoli EHC^{Δ} e CHG^{Δ} : essi sono congruenti per l'assioma LLL, avendo CH in comune, EH = HG per costruzione, CE = CG perché raggi della stessa circonferenza. In particolare, sono uguali gli angoli corrispondenti $\widehat{EHC} = \widehat{CHG}$, che quindi risultano essere retti. Dunque, CH è la perpendicolare cercata. ■

Proposizione I.13
Una semiretta innalzata su un'altra retta forma con essa due angoli retti o angoli la cui somma è pari a due angoli retti



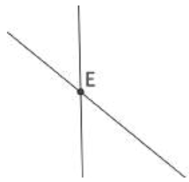
Nel linguaggio moderno, l'angolo formato dalla somma di due angoli adiaceti prende il nome di angolo piatto.

Proposizione I.14
Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto a essa, si tracciano due semirette che formino con la prima agoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, allora le semirette sono tra loro allineate.

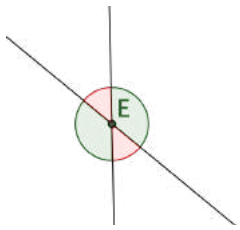
Proposizione I.15
Se due rette si intersecano in un punto, formano angoli opposti al vertice tra loro uguali.

Dimostrazione

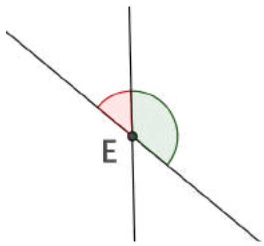
Consideriamo due rette che si intersecano in un punto E.

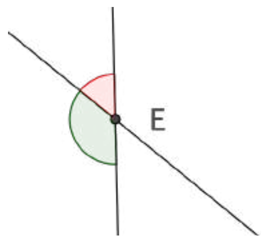


Dobbiamo dimostrare che gli angoli opposti al vertices sono uguali.



Ciò segue prendendo in considerazione un angolo (in rosso nella figura) e considerandone, una alla volta, le rette che ne formano i lati. Applicando la proposizione I.13, sappiamo che, nelle figure a lato, la somma degli angoli adiacenti è pari a due angoli retti.





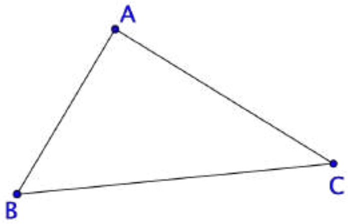
Per differenza [nozioni comuni], i due angoli verdi sono uguali. Analogo ragionamento permette di completare la dimostrazione mostrando che gli angoli opposti al vertice sono uguali. ■
Osserviamo che, in particolare la somma degli angoli formati da due rette che si intersecano è pari a 4 angoli retti. Nel linguaggio moderno, tale angolo prende il nome di angolo giro.

Proposizione I.16

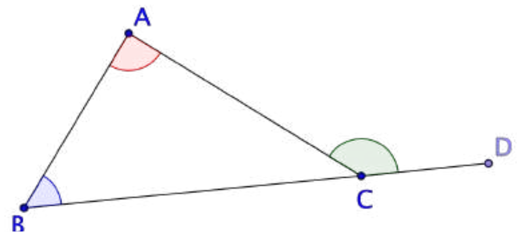
In un qualsiasi triangolo, l'angolo formato esternamente dal prolungamento di un lato è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti.

Dimostrazione

Sia ABC^{Δ} un triangolo. In esso, prolunghiamo il lato BC fino ad un punto D.



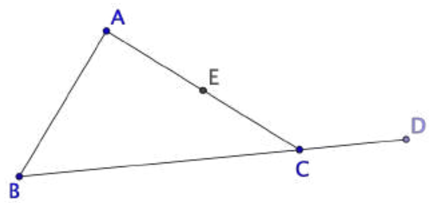
Dobbiamo dimostrare che l'angolo esterno $\widehat{DCA}$ è maggiore sia dell'angolo interno in A che dell'angolo interno in B.



Iniziamo dimostrando che l'angolo esterno $\widehat{DCE}$ è maggiore dell'angolo $\widehat{BAC}$ interno in A.

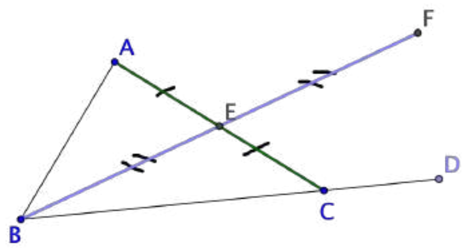
Consideriamo il punto medio E di AC. [proposizione I.10]

AE = EC

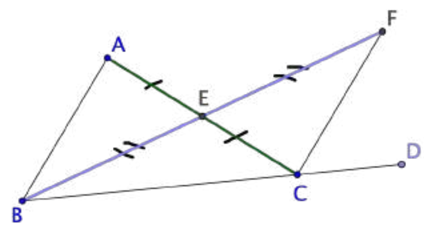


Congiungiamo B con E e prolunghiamo tale segmento fino al punto F tale che

BE = EF.

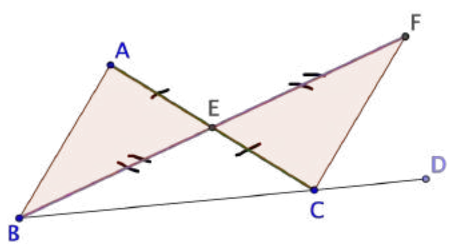


Congiungiamo F con C.



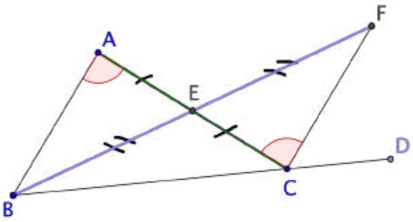
Consideriamo i triangoli ABE^{Δ} e ECF^{Δ}: essi hanno uguali

1. I lati corrispondenti AE = EC per costruzione
2. I lati corrispondenti BE = EF per costruzione
3. Gli angoli compresi $\widehat{BEA} = \widehat{FEC}$, perché opposti al vertice [prop. I.15]



I triangoli ABE^{Δ} e ECF^{Δ} sono quindi congruenti per il criterio LAL. In particolare, sono uguali gli angoli corrispondenti

$$\widehat{EAB} = \widehat{FCE}$$



L'angolo $\widehat{FCE}$ è parte propria dell'angolo esterno $\widehat{FCE}$.
Dunque, $\widehat{FCE} < \widehat{DCE}$.
Concatenando le disuguaglianze, $\widehat{EAB} = \widehat{FCE} < \widehat{DCE}$ e quindi l'angolo esterno in C è maggiore dell'angolo interno in A:

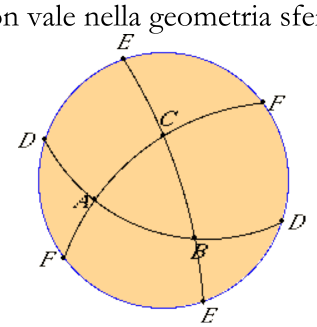
$$\widehat{EAB} < \widehat{DCE}$$

come volevamo.
In modo analogo, si mostra che Per esercizio, dimostrare che l'angolo esterno in C è maggiore dell'angolo interno in B.

■

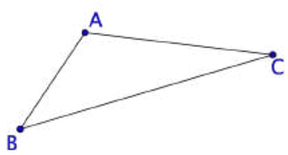
Esercizi:
1. Dimostrare che l'angolo esterno in C è maggiore dell'angolo interno in B.
2. Dimostra che l'angolo esterno non dipende dal prolungamento scelto del lato in uno stesso vertice.

Si osservi che il precedente risultato non vale nella geometria sferica.



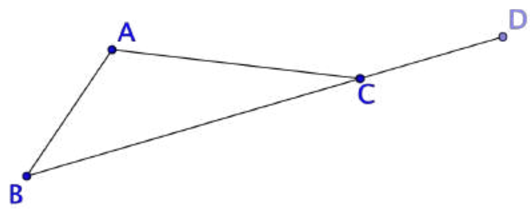
Proposizione I.17
In ogni triangolo, la somma di due angoli è minore di un angolo piatto.

Dimostrazione
Sia ABC^{Δ} un triangolo. Dobbiamo mostrare che la somma di due angoli è sempre minore della somma di due angoli retti.



Iniziamo mostrando che la somma degli angoli interni in A e in C è minore di un angolo piatto.

Prolunghiamo da C il lato AC fino ad un punto D.



Per la proposizione I.16, sappiamo che l'angolo esterno $\widehat{DCA}$ è maggiore dell'angolo interno $\hat{A} = \widehat{BAC}$:

$$\hat{A} < \widehat{DCA}$$

Per le nozioni comuni, sommando a entrambi i termini la stessa quantità $\hat{C} = \widehat{BCA}$, ricaviamo la disuguaglianza cercata

$$\hat{C} + \hat{A} < \hat{C} + \widehat{DCA} = \text{angolo piatto}.$$

Analogamente, è possibile ricavare le disuguaglianze relative alle somme $\hat{C} + \hat{B}, \hat{A} + \hat{B}$.

■

Proposizione I.18
In ogni triangolo, è maggiore l'angolo opposto al lato maggiore.

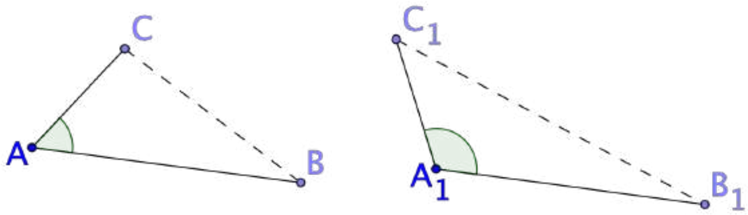
Proposizione I.19
In ogni triangolo, è maggiore il lato opposto all'angolo maggiore.

Proposizione I.20
In ogni triangolo, la somma di due lati, comunque scelti, è maggiore del terzo.

Proposizione I.21: si modifica un triangolo mantenedo fisso un lato e 'avvicinando' il terzo vertice internamente al triangolo iniziale. Si mostra che, 'avvicinando' il vertice, aumenta l'angolo in esso.

Proposizione I.22: Costruzione di un traingolo di lati assegnati (purché la condizione in Prop. I:20 sia soddisfatta)

- Prendiamo due bastoncini articolati a partire da uno stesso vertice: ampliando l'angolo di apertura tra i bastoncini, gli altri estremi si allontanano.



- Viceversa, per avvicinare gli altri estremi dei bastoncini, occorre rimpicciolire l'angolo di apertura. Questa osservazione motiva le due proposizioni seguenti.

Proposizione I.23 *Dati un punto e una semiretta avente il punto dato come vertice, è possibile costruire un angolo rettilineo avente come vertice il punto dato e come lato la semiretta data e che sia uguale a un assegnato angolo rettilineo.*

Proposizione I.24
Supponiamo che due triangoli abbiano due lati in corrispondenza uguali, ma che in un triangolo l'angolo compreso tra i due lati considerati sia maggiore dell'angolo compreso tra i lati corrispondenti nell'altro triangolo. Allora, la base del triangolo con angolo maggiore è maggiore della base del triangolo con angolo minore.

Proposizione I.25
Supponiamo che due triangoli abbiano due lati in corrispondenza uguali, ma che in un triangolo il terzo lato (detto base) sia maggiore di quello dell'altro triangolo. Allora, nel primo triangolo è maggiore anche l'angolo compreso tra i lati in corrispondenza uguali.

Proposizione I.26 La proposizione 26 fornisce due criteri di congruenza: qualora due triangoli verifichino una delle seguenti condizioni:

- ALA: i triangoli hanno uguali due angoli e il lato tra essi compreso
- AAL: i triangoli hanno uguali due angoli e il lato opposto a uno di essi

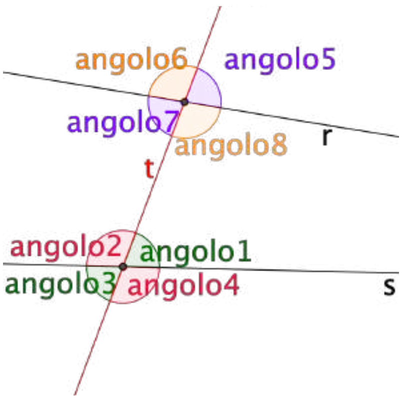
allora i due triangoli sono congruenti

Si passa allo studio del parallelismo. Premettiamo alcune considerazioni sulla mutua posizione tra due rette nel piano.

Rette e angoli

Date due rette *r* e *s*, si consideri una terza retta *t* incidente entrambe, detta *retta trasversale*. Supporremo che *t* intersechi le rette *r* e *s* in punti distinti.

Immaginiamo di camminare lungo la retta trasversale, incontrando, una dopo l'altra, le due rette *r* e *s*: consideriamo gli angoli formati tra la retta trasversale *t* e, rispettivamente, ciascuna delle rette *r* e *s*.



Ricordiamo che, per la Prop. 15, gli angoli opposti al vertice sono uguali. Ricaviamo che:

Angolo 1 = Angolo 3
Angolo 2 = Angolo 4
Angolo 5 = Angolo 7
Angolo 6 = Angolo 8

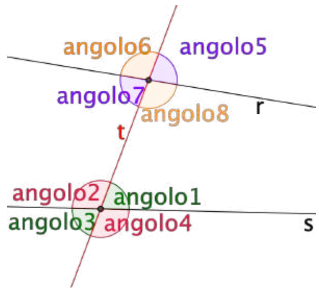
Ricordiamo inoltre, che, per la Prop. 13 e la Prop. 14, due angoli hanno come somma un angolo piatto se e solo se, affiancandoli, hanno i lati non comuni allineati. Ricaviamo che sono uguali all'angolo piatto le seguenti somme:

Angolo 1 + Angolo 4
Angolo 1 + Angolo 2
Angolo 3 + Angolo 4
Angolo 3 + Angolo 2
Angolo 5 + Angolo 8
Angolo 5 + Angolo 6
Angolo 7 + Angolo 8
Angolo 7 + Angolo 6

Ora possiamo confrontare gli angoli formati da t con le due rette. **Le affermazioni seguenti sono tra loro equivalenti, cioè se una di esse è vera, allora sono vere tutte**:

Angolo 1 = Angolo 5	Angolo 1 + Angolo 8 = angolo piatto
Angolo 2 = Angolo 6	Angolo 2 + Angolo 7 = angolo piatto
Angolo 3 = Angolo 7	Angolo 4 + Angolo 5 = angolo piatto
Angolo 1 = Angolo 7	Angolo 3 + Angolo 6 = angolo piatto
Angolo 2 = Angolo 8	Angolo 1 + Angolo 6 = angolo piatto
Angolo 4 = Angolo 8	Angolo 2 + Angolo 5 = angolo piatto
Angolo 4 = Angolo 6	Angolo 3 + Angolo 8 = angolo piatto
Angolo 3 = Angolo 5	Angolo 4 + Angolo 7 = angolo piatto

La dimostrazione dell'equivalenza delle affermazioni si basa sulle osservazioni precedenti. Si discutono alcuni casi; gli altri si dimostrano in modo analogo.

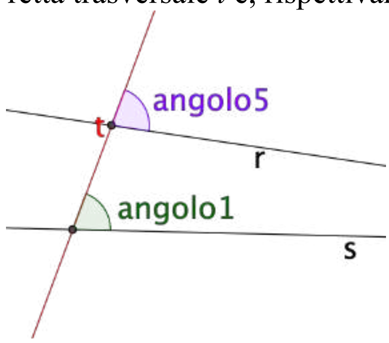


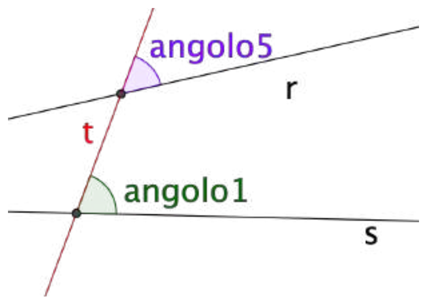
- **Angolo 1 = Angolo 5 ⇔ Angolo 1 = Angolo 7** perché Angolo 5 = Angolo 7, in quanto angoli opposti al vertice
- **Angolo 1 = Angolo 5 ⇔ Angolo 2 = Angolo 6**
  Infatti, sappiamo che
  Angolo 1 + Angolo 2 = angolo piatto
  Angolo 5 + Angolo 6 = angolo piatto
  Poiché la somma è la stessa, se due addendi sono uguali tra loro, anche gli altri devono essere tra loro uguali.
- **Angolo 1 = Angolo 5 ⇔ Angolo 1 + Angolo 8 = angolo piatto**
  Segue dal fatto che
  Angolo 5 + Angolo 8 = angolo piatto

Parallelismo

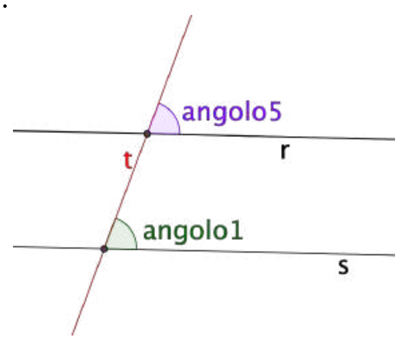
- **Definizione** Due rette nel piano sono dette parallele se coincidono o non hanno punti di intersezione.
- Date due rette *r* e *s*, si consideri una retta trasversale *t* (incidente entrambe).

Immaginiamo di camminare lungo la retta trasversale, incontrando, una dopo l'altra, le due rette *r* e *s:* consideriamo l'angolo formato (nello stesso semipiano individuato da *t*, cioè «dalla stessa parte») tra la retta trasversale *t* e, rispettivamente, ciascuna delle rette *r* e *s.*



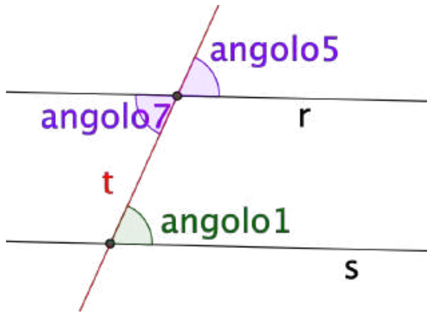


Ci si aspetta che, se le rette *r* e *s*, camminando lungo la trasversale, appaiano nella stessa direzione, formando sempre lo stesso angolo, allora le rette *r* e *s* siano parallele.
Ciò è effettivamente assicurato dalla Proposizione 27 e la Proposizione 28 spiega che questa proprietà caratterizza le coppie di rette parallele.

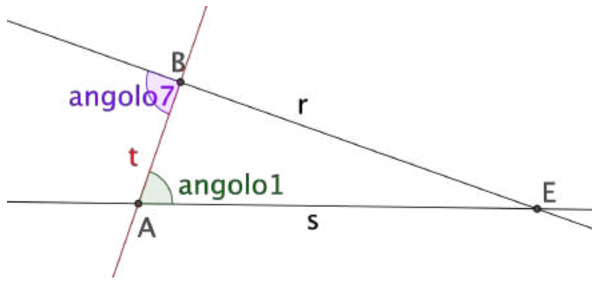


- Per quanto visto, sappiamo che **Angolo 1 = Angolo 5**

⟺
Angolo 1 = Angolo 7
Gli angoli 1 e 7 sono angoli *alterni* (stanno in semipiani diversi rispetto a t) interni (sono nella zona compresa tra *r* e *s*)



Proposizione I.27 *Qualora una retta incidente due rette in punti distinti formi con esse angoli alterni interni uguali tra loro, allora le due rette sono parallele.*
Dimostrazione
Per assurdo, supponiamo che le rette *r* e *s* **non** siano parallele; allora esse devono avere un punto di intersezione E. Il punto di intersezione E **non** appartiene alla retta trasversale *t*, perché abbiamo supposto che i punti di intersezione di *t* con *r* e *s* siano distinti. Il punto E deve appartenere a uno dei semipiani individuati da *t*.



Per ipotesi,

Angolo 1 = Angolo 7

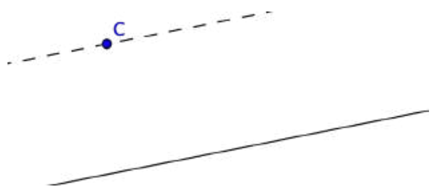
I punti A, E, B individuano un triangolo, di cui Angolo 7 è un angolo esterno e Angolo 1 è un angolo interno non adiacente a Angolo 7.
Per la Prop. 16, l'angolo esterno deve essere maggiore di ogni angolo interno non adiacente.
Abbiamo trovato un assurdo, e il punto di intersezione E non può esistere.
Concludiamo che le rette *r* e *s* sono parallele. Abbiamo trovato un assurdo, e la dimostrazione è terminata.
■

Le osservazioni svolte in precedenza portano rapidamente alla dimostrazione della proposizione seguente:
Proposizione I.28 *La tesi della proposizione 27 vale in tutti i casi in cui gli angoli formati dalla trasversale t con una coppia di rette r e s verificano una qualsiasi delle condizioni equivalenti*

Angolo 1 = Angolo 5	Angolo 1 + Angolo 8 = angolo piatto
Angolo 2 = Angolo 6	Angolo 2 + Angolo 7 = angolo piatto
Angolo 3 = Angolo 7	Angolo 4 + Angolo 5 = angolo piatto
Angolo 1 = Angolo 7	Angolo 3 + Angolo 6 = angolo piatto
Angolo 2 = Angolo 8	Angolo 1 + Angolo 6 = angolo piatto
Angolo 4 = Angolo 8	Angolo 2 + Angolo 5 = angolo piatto
Angolo 4 = Angolo 6	Angolo 3 + Angolo 8 = angolo piatto
Angolo 3 = Angolo 5	Angolo 4 + Angolo 7 = angolo piatto

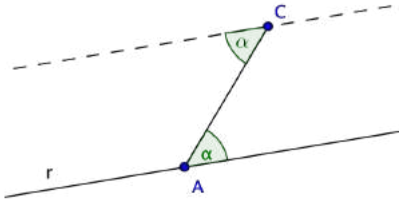
Utilizziamo i criteri forniti dalle Proposizioni 27 e 28 per costruire rette parallele a una retta data.

Proposizione I.31 *Per un punto dato, che non appartiene a una retta assegnata, è possibile tracciare una retta parallela alla retta assegnata.*



Dimostrazione
Sia C il punto non appartenente alla retta assegnata *r*.

Sia *A* un punto sulla retta *r*, scelto a piacere.
Si tracci *AC* (assioma 1) e si costruisca in *C* un angolo α uguale all'angolo α tra r e *AC*, ma nell'altro semipiano rispetto a *t* (Prop. 23).

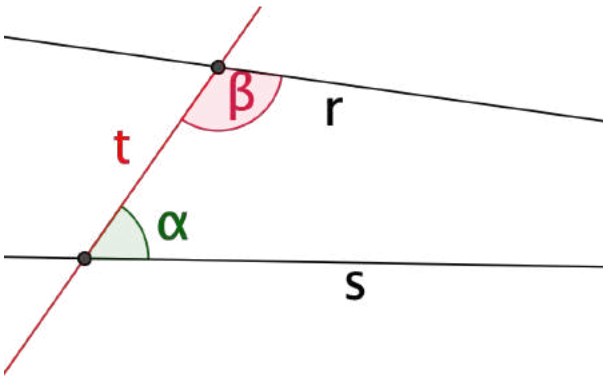


Si prolunghi il lato dell'angolo in C: la retta così tracciata è parallela alla retta r per la Prop. 27. ■

Introduciamo ora l'assioma 5, detto anche *assioma delle parallele*.
L'assioma 5 fornisce, in modo operativo, una condizione che assicura che due rette non siano parallele:
Assioma 5 Se una retta incidente due altre rette forma con esse due angoli interni dalla stessa parte con somma minore di un angolo piatto, allora le due rette si intersecano dalla parte in cui sono stati considerati gli angoli.

Utilizzando l'assioma 5, è possibile dimostrare che i criteri forniti dalle prop. 27 e 28 caratterizzano le rette parallele. Questo porta alla dimostrazione dell'unicità di una parallela a una retta data e passante per un punto dato esterno a essa.

Proposizione I.29 *In un piano, una retta trasversale che interseca una coppia di rette parallele, forma con esse angoli alterni interni uguali.*
Dimostrazione
Siano *r* e *s* le due rette parallele e sia *t* la retta trasversale.
Se gli angoli alterni interni formati da t intersecando *r* e *s* non fossero uguali, allora gli angoli interni formati dalla stessa parte non hanno come somma un angolo piatto: tale somma è quindi superiore all'angolo piatto in un semipiano, e inferiore all'angolo piatto nell'altro semipiano.
Per l'assioma 5, le rette devono quindi intersecarsi nel semipiano in cui la somma degli angoli è minore di un angolo piatto. Ma questo è assurdo.



Deduciamo che gli angoli alterni interni devono essere uguali, e la dimostrazione è terminata. ■

Applicando la proposizione 29, si dimostra la Proposizione 30, che assicura che la relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza.

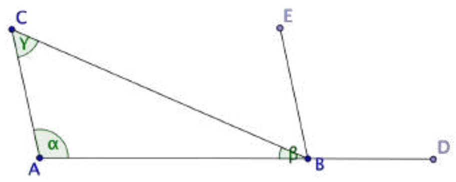
Proposizione I.30 *Rette parallele a una stessa retta sono parallele tra loro.*

Siamo pronti a dimostrare un risultato centrale nella formazione geometrica nella scuola primaria: il teorema che assicura che la somma degli angoli interni di un triangolo è indipendente dal triangolo considerato. Questo risultato è già stato analizzato e studiato nel corso di questo insegnamento attraverso modelli di carta.

Proposizione I.32 *In un qualsiasi triangolo*
- ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti
- la somma degli angoli interni è uguale a un angolo piatto.

Dimostrazione

Nel triangolo *ABC* si prolunghi il lato *AB* fino al punto *D*.
Dimostriamo che l'angolo esterno in *B* è uguale alla somma degli angoli interni in *A* e in *C*. Ne segue, in particolare, che la somma degli angoli del triangolo è uguale a un angolo piatto.
Disegniamo da *B* la parallela *BE* al lato *AC* (Prop. 31).

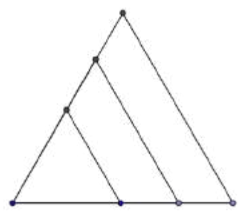


CB risulta trasversale rispetto alle parallele *AC* e *EB*: per la Prop. 29, l'angolo $\gamma = \widehat{ACB}$ coincide con l'angolo alterno interno $\widehat{CBE}$, che è parte dell'angolo esterno in *B*.
Analogamente, anche *AB* è trasversale rispetto alle parallele *AC* e *EB*: per la Prop. 29, l'angolo $\alpha = \widehat{CAB}$ coincide con l'angolo alterno interno $\widehat{EBD}$, che è parte dell'angolo esterno in B.
Poiché $\widehat{CBE} + \widehat{EBD} = \widehat{CBD}$, per le nozioni comuni abbiamo la tesi. ■

Angoli interni e angoli esterni

La Proposizione 32 del primo libro degli elementi di Euclide assicura che la somma degli angoli interni di un triangolo non dipende dal singolo triangolo ma è sempre uguale a un angolo piatto.
Questa proprietà caratterizza i triangoli nel piano, ma non vale, ad esempio, per i triangoli sferici.

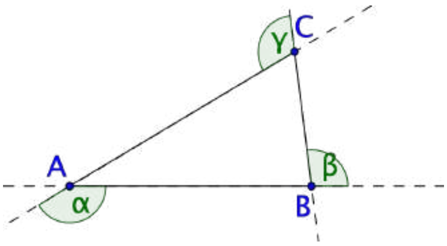
Studiamo, in particolare, un triangolo equilatero (piano): la proposizione 5 assicura che gli angoli interni di un qualsiasi triangolo equilatero sono tra loro uguali. La proposizione 32 comporta che anche gli angoli esterni (che sono uguali al doppio di un angolo interno) sono tra loro uguali. Ma la proposizione 32 comporta un risultato molto più forte: in ogni triangolo equilatero l'ampiezza dell'angolo interno è sempre la stessa (un terzo dell'angolo piatto, cioè 60°) e l'ampiezza dell'angolo esterno è sempre la stessa (due terzi dell'angolo piatto, cioè 120°. Ciò comporta che i triangoli equilateri appaiano tutti della stessa forma, cioè siano simili tra loro.



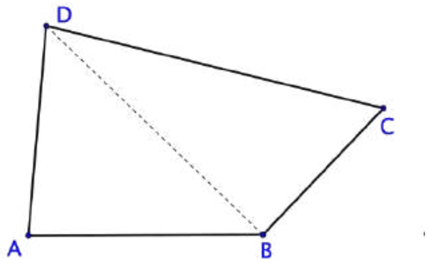
Ricordando che, ogni angolo esterno in un triangolo è uguale alla somma dei due angoli non adiacenti, ricaviamo che la somma degli angoli esterni di un triangolo è pari a un angolo giro.
Immaginando di camminare lungo un lato di un triangolo, l'angolo esterno nel secondo estremo è l'angolo necessario per voltare e iniziare a camminare lungo il lato adiacente. Analogamente, camminando lungo il perimetro di un poligono convesso partendo da un vertice e ritornando allo stesso vertice nella stessa posizione, la somma degli angoli esterni fornisce la somma degli angoli che abbiamo compiuto cambiando direzione nei vertici.

$$\alpha = \hat{B} + \hat{C}$$
$$\beta = \hat{A} + \hat{C}$$
$$\gamma = \hat{A} + \hat{B}$$

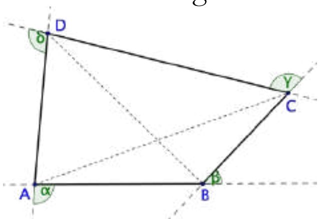
$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdot \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \right) = angolo\ piatto$$



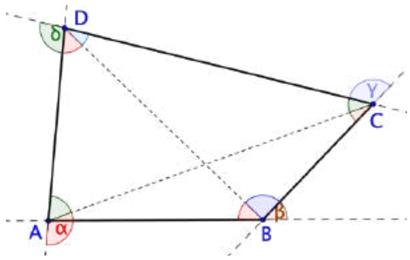
Inoltre, poiché ogni quadrilatero convesso è suddiviso da una sua diagonale in due triangoli non sovrapposti, ricaviamo che la somma degli angoli interni di ogni quadrilatero convesso è pari al doppio della somma degli angoli interni di un triangolo: la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è quindi uguale ad un angolo giro.



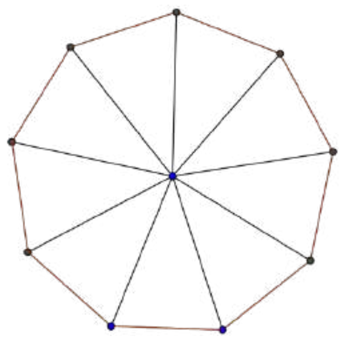
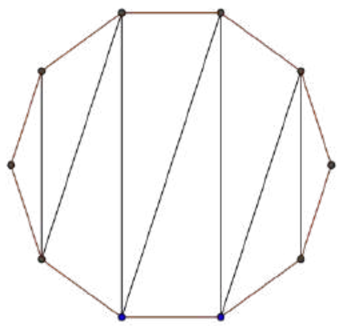
La Proposizione I.46 è in linea con il precedente risultato.
La somma degli angoli degli angoli esterni di un qualsiasi quadrilatero può essere calcolato tracciando entrambe le diagonali del quadrilatero.



$\alpha = \widehat{ABD} + \widehat{ADB}$ guardando ABD^{Δ}
$\beta = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ guardando ABC^{Δ}
$\gamma = \widehat{BDC} + \widehat{DBC}$ guardando CBD^{Δ}
$\delta = \widehat{DAC} + \widehat{ACD}$ guardando ACD^{Δ}
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}\right) = angolo\ piatto$



Analogamente, la somma degli angoli interni di un poligono regolare con n lati è pari a n–2 angoli angoli piatti, mentre la somma degli angoli esterni è sempre un angolo giro

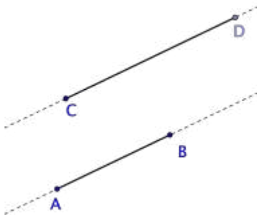



.

Esercizio: Determinare la somma degli angoli interni ed esterni di un esagono regolare.

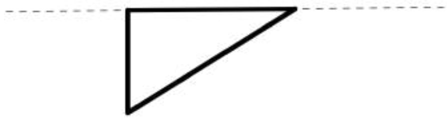
Lezione n. 23 del 25 febbraio 2021
Parallelogrammi e loro proprietà

Due segmenti (che non siano formati da un unico punto) si dicono paralleli se sono parallele le rette che, rispettivamente, li contengono.

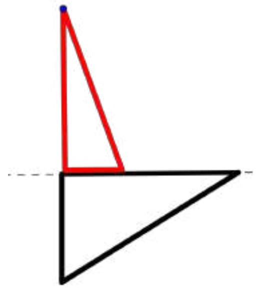


Per disegnare due segmenti paralleli, possiamo utilizzare due squadre per disegnare rette e segmenti tra loro paralleli.

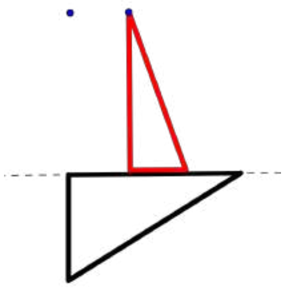
Un cateto di una squadra viene utilizzata come base e il suo profilo descrive uno dei due segmenti.



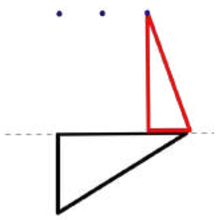
Per disegnare il secondo segmento, appoggiamo la seconda squadra contro la prima, usando come base un cateto.
Segniamo la posizione del vertice della seconda squadra opposto alla base.



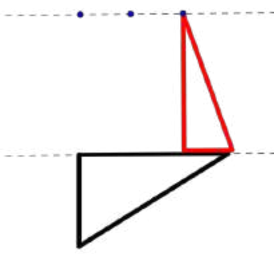
Spostiamo la seconda squadra lungo la prima, e segniamo nuovamente la posizione del vertice. Ripetiamo più volte, e poi uniamo i punti ottenuti con una retta, che risulta parallela alla prima retta disegnata.



Ripetiamo più volte

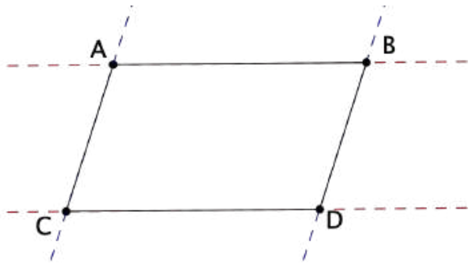


e poi uniamo i punti ottenuti con un segmento, che risulta parallelo al primo segmento disegnato.



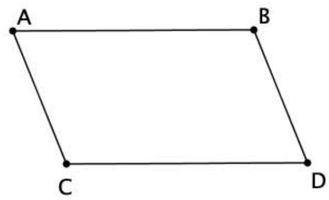
Un **parallelogramma** è un quadrilatero con due coppie di lati opposti paralleli.

Il parallelogramma è quindi intersezione tra due fasce delimitate da coppie di rette parallele.

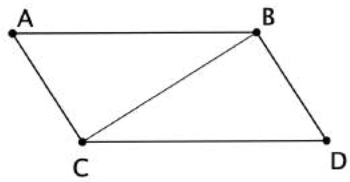


Inizieremo con il rivedere e motivare proprietà note dei parallelogrammi, correntemente utilizzate nella didattica della scuola primaria.
Iniziamo mostrando che il dato di due lati uguali e paralleli individua un parallelogramma: possiamo dire che un *parallelogramma è un quadrilatero con due lati opposti uguali e paralleli.*

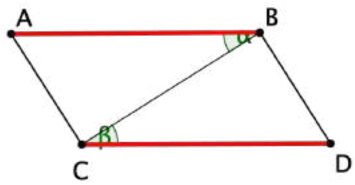
Proposizione I.33
I segmenti che congiungono, dalla stessa parte, gli estremi di due segmenti uguali e paralleli, sono anch'essi uguali e paralleli.
Dimostrazione
Siano assegnati due segmenti AB e CD uguali e paralleli. Si considerino due segmenti AC e BD che congiungono gli estremi di AB e CD, dalla stessa parte, come in figura. Vogliamo dimostrare che i segmenti AC e BD sono tra loro uguali e paralleli.



Congiungiamo B e C (assioma 1).

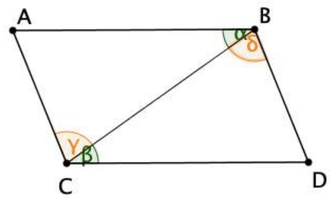


Rispetto alle parallele AB e CD, il segmento CB è una trasversale, e incontra quindi le parallele AB e CD (per la Prop. I.29) con angoli alterni interni $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$ uguali.



I triangoli ACB^{Δ} e CBD^{Δ} sono congruenti per LAL: infatti, essi hanno
i lati AB = CD per ipotesi
il lato CB in comune
gli angoli compresi $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ per quanto visto.

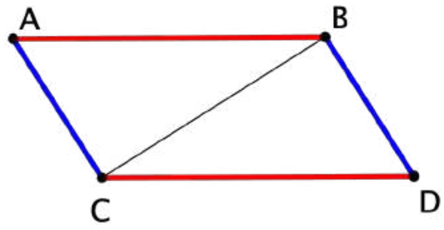
In particolare, risultano uguali i lati
AC = BD (come richiesto nella tesi)
e gli angoli $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$.
Per la Prop. 27, i segmenti AC e BD sono paralleli, poiché la trasversale BC forma con essi angoli alterni interni uguali $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$.



■

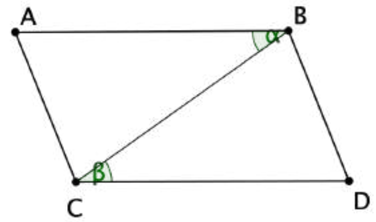
La proposizione successiva analizza la relazione tra un dato parallelogramma e le sue parti: non solo i lati opposti risultano tra loro uguali, ma anche gli angoli opposti hanno la stessa proprietà.
Inoltre, viene messo in evidenza un fatto emerso nella dimostrazione della proposizione 33: il parallelogramma è diviso da una qualsiasi diagonale in due parti congruenti.

Proposizione I.34 *In ciascun parallelogramma:*
- *i lati opposti sono uguali tra loro.*
- *gli angoli opposti sono uguali tra loro*
- *la diagonale taglia a metà il parallelogramma*

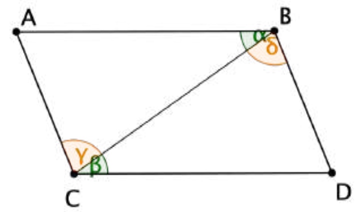


Dimostrazione
Sia *ABCD* un parallelogramma e sia *CB* una sua diagonale.

Poiché i segmenti *AB* e *CD* sono paralleli, la trasversale *BC* forma con essi angoli alterni interni $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$ uguali.



Applicando nuovamente la Proposizione 29, la trasversale BC forma con le parallele *AC* e *BD* angoli alterni interni $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CBD}$ uguali.



I triangoli ABC^{Δ} e CDB^{Δ} sono congruenti per il criterio ALA: infatti, essi hanno
- angoli $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$
- angoli $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$
- il lato *BC* compreso in comune.

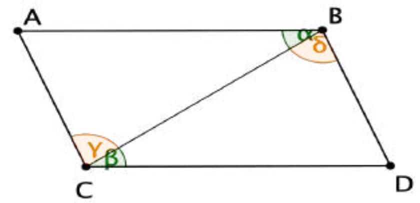
In particolare, i triangoli hanno uguali i lati *AC* = *BD*, *AB*=*CD* (come richiesto dalla tesi).
Inoltre, la diagonale *BC* divide il parallelogramma nei due triangoli congruenti ABC^{Δ} e CDB^{Δ} .
Infine, poiché sommando cose uguali si ottengono cose uguali in base alle nozioni comuni, gli angoli opposti risultabno uguali:

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \widehat{BCD} + \widehat{ACD} = \widehat{ACD}$$

Poiché una dimostrazione analoga può essere svolta per la diagonale *AD*, la dimostrazione è conclusa.

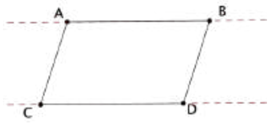
■

Si osservi che, in generale, la diagonale di un parallelogramma **non** divide a metà gli angoli opposti, cioè non biseca gli angoli.
La Proposizione 34 fornisce, inoltre, informazioni preziose per il confronto delle estensioni.

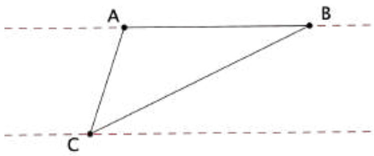


Estensione, area e confronto di parallelogrammi

Diremo che un **parallelogramma è compreso tra due rette parallele** se tali rette contengono una coppia di lati opposti del parallelogramma.



Un **triangolo è compreso tra due parallele** se una delle due rette ne contiene un lato, mentre l'altra retta contiene il vertice opposto.



Se un triangolo o un parallelogramma è compreso tra due parallele, la distanza tra le due parallele coincide con l'**altezza** del poligono rispetto ai lati contenuti nelle parallele.

La nozione di estensione presenta una particolare complessità.
Nelle proposizioni seguenti, Euclide confronta l'estensione di poligoni di forma differente, spesso scomponendoli in parti più piccole che siano congruenti.
Occorre saper confrontare estensioni senza necessariamente misurarle: oltre alla tecnica della scomposizione, nelle dimostrazioni di Euclide si intravvede la possibilità di procedere «muovendo» parti delle figure.

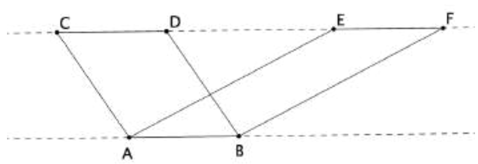
immagine da https://dmsm.github.io/scissors-congruence/

Sappiamo che il movimento costituisce una parte essenziale nell'apprendimento.
Un ulteriore punto di attenzione è costituito dalla relazione tra estensione e area: Euclide non misura le aree e non fornisce formule di calcolo per le aree, ma le sue dimostrazioni motivano la possibilità di confrontare estensioni di poligono differenti e di creare poligoni di forma e estensione assegnata.
L'area è il rapporto tra l'estensione della superficie considerata e l'estensione dell'unità di misura di superficie utilizzata.
Per semplicità, utilizzeremo talora l'espressione «area» invece di «estensione della superficie».
La Proposizione 35 permette di costruire un rettangolo avente la stessa estensione e la stessa base di un parallelogramma assegnato.

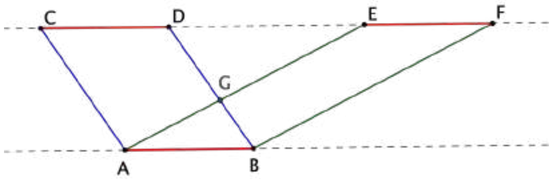
Proposizione I.35 *I parallelogrammi aventi la stessa base e compresi tra le stesse parallele hanno la stessa superficie.*

Dimostrazione

Verrà descritta solo una configurazione possibile.
Siano ABCD e ABFE due parallelogrammi aventi la stessa base AB e compresi tra le stesse parallele AB e CF. Vogliamo dimostrare che i due parallelogrammi hanno la stessa area.

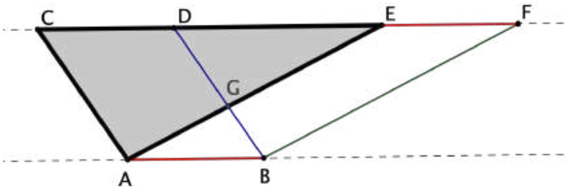


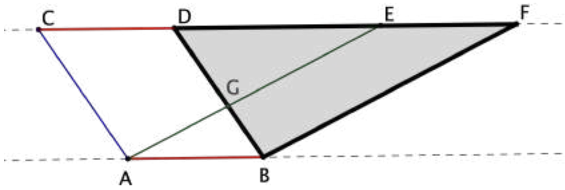
Per la prop. I.34, i lati opposti AB e CD del parallelogramma ABCD sono uguali: AB = CD. Analogamente, i lati opposti AB e EF del parallelogramma ABFE sono uguali: AB = EF . Per le nozioni comuni, si ricava che CD = EF, perchè entrambi i segmenti sono uguali ad AB. Sempre per le nozioni comuni, CE = CD+DE = EF+DE = DF.



Applicando nuovamente la proposizione 34, sappiamo inoltre che
AC = BD (perché lati opposti del parallelogramma ABCD) e
AE = BF (perché lati opposti del parallelogramma ABFE)

Consideriamo ora i triangoli CAE^{Δ} e DBF^{Δ} evidenziati nelle figure:

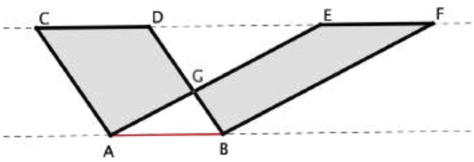




Tali triangoli sono congruenti per l'assioma LAL: infatti

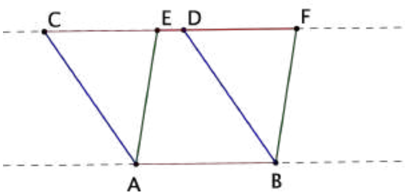
- AC = BD (perché lati opposti del parallelogramma ABCD, prop.34)
- CE = DF (per quanto mostrato)
- $\widehat{\mathrm{ACE}} = \widehat{\mathrm{BDF}}$ (per la Prop. 29, perchè formati dalla trasversale CF con le parallele AC e BD.

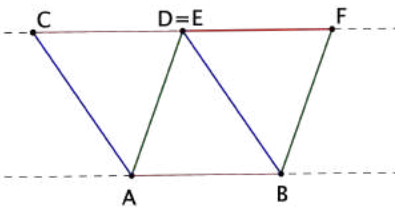
Sottraendo a ciascuno dei triangoli CAE^{Δ} e DBF^{Δ} la parte comune DEG, si ricava l'uguaglianza della superficie dei due trapezi CAGD e BFEG.



Aggiungendo ora a ciascun trapezio il triangolo ABG, si ricava l'uguaglianza cercata tra le superficie dei due parallelogrammi ABCD e ABFE. ■

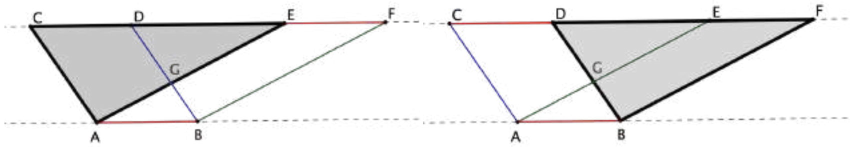
Per esercizio, adattare la dimostrazione alle altre due configurazioni possibili:





Osservazione

Nella dimostrazione della Proposizione 35, il confronto tra i triangoli congruenti CAE^{Δ} e DBF^{Δ} può essere sperimentato tramite materiali:

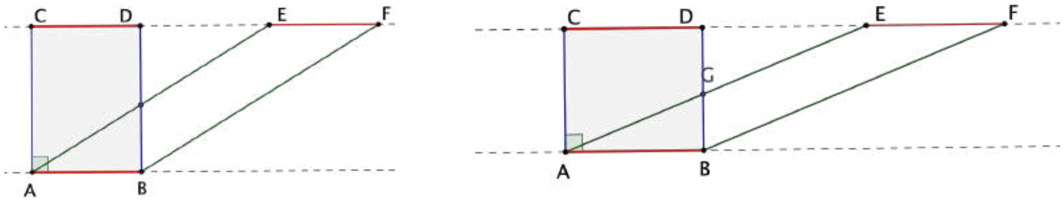


Nella cornice ABFC, il triangolo CAE^{Δ} lascia libera la superficie del parallelogramma ABFE.
«Muovendo» il triangolo CAE^{Δ} nella posizione DBF^{Δ}, la superficie lasciata libera è quella del parallelogramma ABCD.
Si evidenzia che le superfici dei due parallelogrammi devono coincidere.

Nei materiali rigidi, quando una parte viene spostata, mantiene la propria superficie.
Le nozioni comuni che permettono di sommare e sottrarre cose uguali si traducono nel fatto che, quando una parte viene spostata, le parti non coperte (prima e dopo il movimento) devono avere la stessa superficie.

Rettangolo equivalente a un parallelogramma

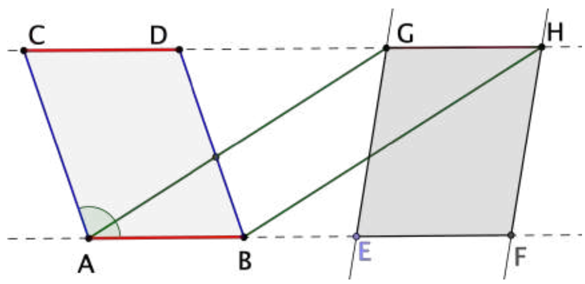
Applicando la Proposizione 35, si dimostra che ogni parallelogramma è equivalente a un rettangolo avente la stessa base (cioè le loro superfici hanno la stessa estensione).
Per ottenere tale rettangolo, è sufficiente considerare il rettangolo avente la stessa base del parallelogramma dato e compreso tra le parallele in cui è compreso il parallelogramma.



Proposizione I.36 *I parallelogrammi aventi basi della stessa lunghezza e che siano compresi tra le stesse parallele hanno la stessa superficie.*

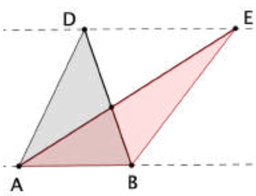
Dimostrazione

La dimostrazione è suggerita dalla figura: il parallelogramma ABCD ha superficie uguale al parallelogramma ABGH, in base alla Prop. 35. Per la stessa proposizione, la superficie di ABGH coincide con la proposizione di EFGH, che sono parallelogrammi con la stessa base. Si conclude per le nozioni comuni.



■

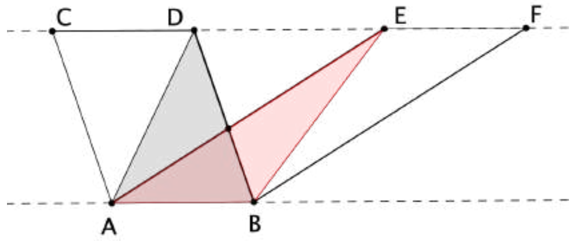
Proposizione I.37 *I triangoli aventi la stessa base e che siano compresi tra le stesse parallele hanno la stessa superficie.*



Dimostrazione

Siano assegnati due triangoli ABD^{Δ} e ABE^{Δ} con la stessa base AE e compresi tra le stesse parallele.

Tracciamo per A la parallela AC a BD e per B la parallela BF a AE, con C e D nella parallela. I parallelogrammi ABCD e ABFG hanno la stessa superficie per la Prop. 35.
Si ricava che anche i triangoli ABD^{Δ} e ABE^{Δ}
Hanno stessa superficie, perché
ABD^{Δ} è metà di ABCD (Prop. 34)
ABE^{Δ} è metà di ABFG (Prop. 34).

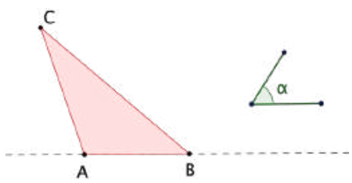


■

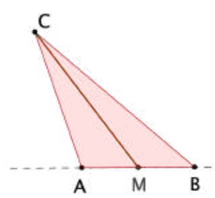
Proposizione I.38 *I triangoli aventi la stessa base e che siano compresi tra le stesse parallele hanno la stessa superficie.*
[Esercizio: dimostrare la Prop. 38]
Proposizione I.39 *Supponiamo che due triangoli abbiano basi della stessa lunghezza e che siano compresi tra le stesse parallele; allora i triangoli hanno la stessa superficie.*
Proposizione I.40 *Supponiamo che due triangoli abbiano la stessa base e la stessa area, e siano disegnati nello stesso semipiano rispetto alla base; allora i triangoli risultano compresi tra le stesse parallele.*
Proposizione I.41 *Supponiamo che un triangolo e un parallelogramma abbiano la stessa base e siano compresi tra le stesse parallele; allora l'area del parallelogramma è doppia rispetto all'area del triangolo.*
La proposizione può essere dimostrata per esercizio.

Per dimostrare la proposizione seguente:
- si costruisce un triangolo avente la metà dell'area del triangolo dato,
- lo si deforma per fargli formare l'angolo assegnato
- si costruisce come di consueto un parallelogramma doppio del triangolo deformato

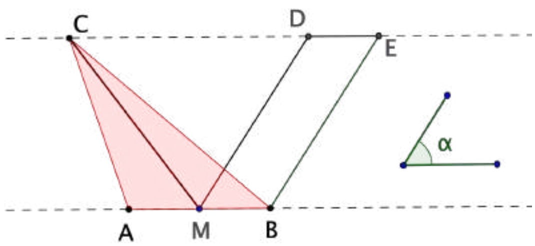
Si osservi che, in particolare, è possibile costruire un rettangolo con la stessa area del triangolo dato.
Proposizione I.42 *Costruire un parallelogramma con angolo alla base assegnato e con la stessa area di un triangolo dato*
Dimostrazione
Sia ABC^{Δ} il triangolo assegnato e sia α l'angolo assegnato.
Dobbiamo costruire un parallelogramma avente α come angolo alla base e con la stessa area di ABC^{Δ} .



Consideriamo il punto medio M del segmento AB (Prop. 10).
Tracciamo il segmento MC (Assioma 1)
Per la Proposizione 38, poiché hanno basi AM e MB della stessa lunghezza, i triangoli AMC^{Δ} e BMC^{Δ} hanno la stessa area.
Il triangolo iniziale ABC^{Δ} ha dunque area doppia di BMC^{Δ}



Disegniamo la retta per C parallela a AB (assioma 1)
Per la prop. 23, costruiamo l'angolo $\widehat{BMD}$
uguale a α ,
di vertice M,
avente *MB* come lato
con D appartenente alla retta per C parallela ad AB
Disegniamo la parallela *BE* a *MD* (prop. 31) e tracciamo DE (assioma 1) .

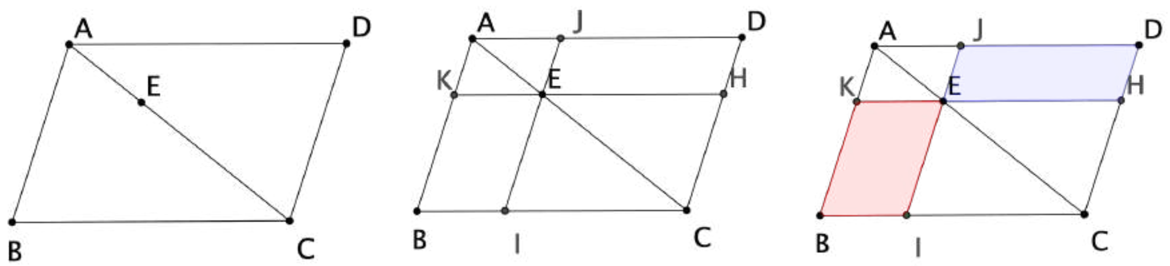


Il quadrilatero MBED è un parallelogramma e, per la Prop. 41, ha area doppia del triangolo BMC^{Δ} (avendo la stessa base e essendo compreso tra le stesse parallele)
Si ricava che il parallelogramma MBED ha la stessa area del triangolo iniziale ABC^{Δ} (perché entrambi doppi dell'area di BMC^{Δ}), come si voleva. ■

Ora Euclide procede dimostrando che è anche possibile costruire un parallelogramma con angolo alla base assegnato e che abbia area uguale ad un parallelogramma dato.
Per arrivare a tale dimostrazione, Euclide premette un risultato importante, grazie al quale è possibile modificare la forma (e in particolare la lunghezza della base) di un parallelogramma, mantenendone l'estensione della superficie.

Complementi di un parallelogramma rispetto alla diagonale

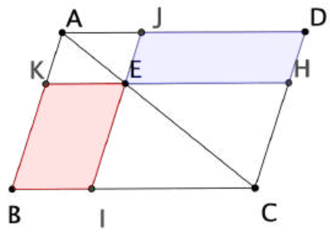
- Dato un parallelogramma *ABCD*, Euclide considera una diagonale *AC* e un punto *E* su di essa.
- Tracciamo per *E* le parallele ai lati del parallelogramma.
- I parallelogrammi *BIEK* e *EHDJ,* come in figura, sono detti *complementari* rispetto alla diagonale del parallelogramma.
- La proposizione 43 assicura che tali complementi hanno sempre superfici tra loro uguali.



Proposizione I.43 *In ogni parallelogramma, i complementi di parallelogrammi intorno alla diagonale hanno uguale superficie*

Dimostrazione

Sia ABCD un parallelogramma e sia AC una sua diagonale.
Siano BIEK e EHDJ, come in figura, complementari rispetto alla diagonale del parallelogramma.



Per la Prop. 34, la diagonale AC divide il parallelogramma ABCD in due triangoli ABC^{Δ} e CDA^{Δ} aventi la stessa superficie.
Analogamente, poiché KEJA è un parallelogramma e AE è una sua diagonale, otteniamo che i triangoli KEA^{Δ} e EJA^{Δ} hanno la stessa superficie.
Allo stesso modo, la diagonale EC divide il parallelogramma ICHE in due triangoli ICE^{Δ} e CHE^{Δ} aventi la stessa superficie.
Ora basta osservare che

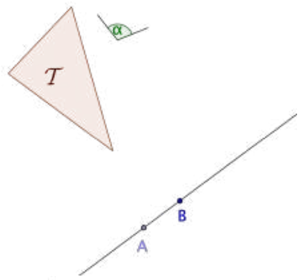
area (BIEK) $=$ area (ABC^{Δ}) – area (KEA^{Δ}) – area (ICE^{Δ})
$=$ area (ACD^{Δ}) – area (EJA^{Δ}) – area (CHE^{Δ})
$=$ area (EHDJ)

come si voleva.

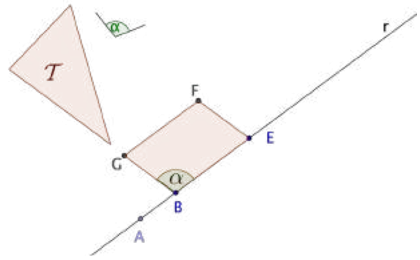
■

Proposizione I.44 *È possibile costruire, con base assegnata e con un angolo alla base assegnato, un parallelogramma la cui superficie è uguale a quella di un triangolo assegnato.*

Dimostrazione

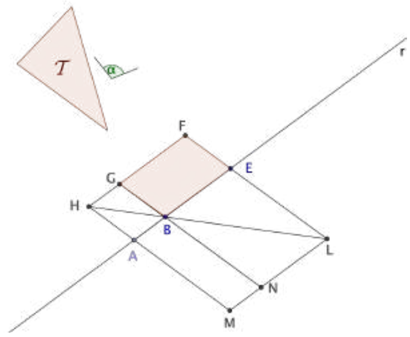


Siano assegnati un triangolo $\mathcal{T}$, un segmento AB, un angolo α. Si vuole costruire un parallelogramma di base AB, angolo alla base α e area uguale all'area di $\mathcal{T}$.



Applicando la proposizione 23, costruiamo l'angolo $\widehat{EBG}$
- con vertice B
- il lato EB allineato con AB,
- uguale all'angolo assegnato α.

Applicando la proposizione I.42, costruiamo il parallelogramma EBGF con angolo alla base α e con area uguale a quella del triangolo $\mathcal{T}$.



Per A e per E tracciamo le parallele a BG (prop. 31).
Prolunghiamo FG fino al punto H di intersezione con la parallela per A a BG (assioma 2).
Congiungiamo H con B (assioma 1) e prolunghiamo fino a intersecare in L la parallela a BG per E (assioma 2).
Intersechiamo la parallela per L a AB con il prolungamento di GB e con la parallela a GB per A, come in figura.

Il parallelogramma AMNB è il parallelogramma cercato: infatti, per la prop. 43 ha la stessa area di GBEF, e quindi di T. Inoltre, ha AB come base e l'angolo $\widehat{ABN}$ è uguale all'angolo opposto al vertice $\widehat{GBE}$ che, a sua volta, è uguale all'angolo assegnato α.

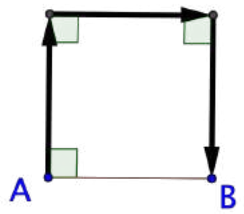
■

Proposizione I.45 *È possibile costruire, su una retta assegnata e con un angolo alla base assegnato, un parallelogramma la cui superficie è uguale a quella di un quadrilatero assegnato.*
Per la dimostrazione, è sufficiente suddividere il quadrilatero in due triangoli, tramite una diagonale, e utilizzare la proposizione 44, creando due parallelogrammi che possono essere affiancati e uniti in un unico parallelogramma. ■

Dimostrando che **per ogni parallelogramma è possibile costruire un quadrato di uguale superficie**, risulta possibile confrontare in modo più efficace la superficie di un qualsiasi quadrilatero con il quadrato scelto come unità di misura per il calcolo dell'area.

Proposizione I.46 *Comunque assegnato un segmento, è possibile costruire un quadrato che ha quel segmento come lato*

La proposizione si dimostra operativamente considerando un segmento AB e 'camminando' perpendicolarmente da A per una lunghezza pari alla lunghezza di AB, poi svoltando perpendicolarmente, entrando nel semipiano contenente B. Si continua con un cammino della lunghezza di AB e ripetendo un'altra volta la svolta perpendicolare (sempre dalla stessa parte) e il percorso rettilineo. Si arriva esattamente in B.



Area di triangoli e quadrilateri

È utile che ognuna delle formule introdotte sia motivata e associata a una immagine che aiuti nel memorizzare la spiegazione stessa. Ciò permette al bambino di ricostruire le formule e padroneggiarle, dandogli sicurezza e fiducia e liberandolo dal timore di non ricordarle correttamente.

Verrà innanzitutto determinata la formula dell'area del rettangolo, grazie alla quale verranno ricostruite tutte le altre formule. L'ordine con cui le altre figure saranno studiate è il seguente: parallelogramma, trapezio, triangolo e rombo (tramite le diagonali). Se si desidera, è possibile parlare dell'area del triangolo prima che dell'area del trapezio. L'ordine scelto segue da una maggiore complessità della presentazione scelta per il triangolo, e una maggiore continuità rispetto allo studio del rombo.

La descrizione di ciascuna formula è preceduta da una riproduzione della figura studiata, sulla quale sono rappresentati tutti gli elementi coinvolti nella formula.

Area del rettangolo

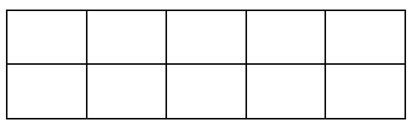
La formula dell'area del rettangolo è alla base della definizione di prodotto.

altezza *h*

base *b*

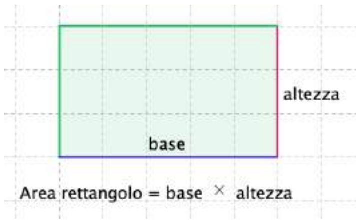
Nel quaderno di geometria disegniamo, per comodità, il rettangolo come in figura; per tradizione si assegnano i nomi di base e altezza ai lati del rettangolo, come in figura: riportiamo la terminologia nel disegno.

Il disegno viene fatto in modo tale che i lati del rettangolo seguano il bordo dei quadretti. Nella Figura, la misura della lunghezza della base è 5 mentre l'altezza è 2.



In questo modo, il rettangolo viene scomposto in quadretti: per contarli, osserviamo che ogni riga contiene tanti quadretti quanti ne servono per formare la base; analogamente, il numero di righe è dato dall'altezza. Quindi il numero di quadretti nel rettangolo è il prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.

Chiamiamo b la lunghezza della base e h la lunghezza dell'altezza; la formula dell'area del rettangolo è :

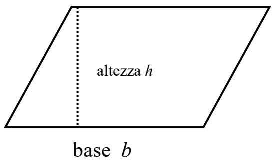


Area rettangolo = $b \times h$.

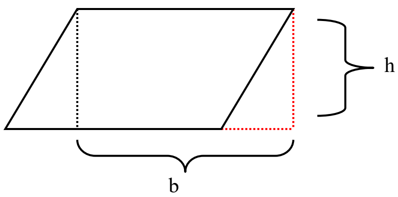
Se si vuole, si può osservare che il numero ottenuto non dipende dalle scelte fatte nell'attribuzione dei nomi "base" e "altezza", per la proprietà commutativa del prodotto.

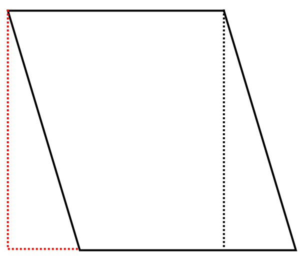
Area del parallelogramma

Su un cartoncino, disegniamo due parallelogrammi uguali e li ritagliamo verificando poi la loro uguaglianza mettendoli uno sull'altro. Ne incolliamo uno sul quaderno come in figura:



Assegniamo un nome ai suoi elementi: chiamiamo "base" uno dei lati e indichiamo con b la sua lunghezza. Indichiamo con h la lunghezza dell'altezza del parallelogramma rispetto al lato scelto come base. Disegniamo in modo analogo l'altezza anche nel secondo parallelogramma: tagliandolo lungo l'altezza disegnata, scomponiamo il parallelogramma in un triangolo rettangolo ed una figura piana. Spostiamo a destra il triangolo ottenuto, facendolo scorrere lungo la base: osserviamo che il lato obliquo del triangolo rettangolo si incolla perfettamente a quello del parallelogramma (in effetti, i lati opposti in un parallelogramma sono uguali). Nella figura vediamo la nuova figura ottenuta: un rettangolo.
La figura trovata è ora un rettangolo che ha la stessa altezza h del parallelogramma, e anche la stessa base b.



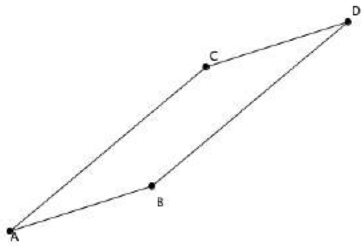


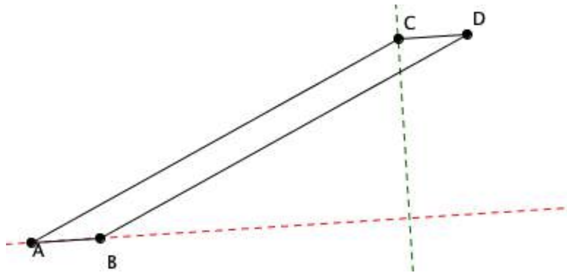
Nel quaderno, incolliamo il parallelogramma ritagliato e trasformato in rettangolo accanto al precedente. Poichè conosciamo la formula dell'area di un rettangolo e l'area non viene cambiata dallo spostamento del piccolo triangolo, ricaviamo che

Area del parallogramma = $b \times h$.

Nel primo parallelogramma, aggiungiamo dei puntini, per segnalare la posizione del triangolo dopo lo spostamento. Questa figura verrà sempre richiamata nel seguito per ricordare che il parallelogramma ha la stessa area (diciamo che è *equiesteso*) di un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza.

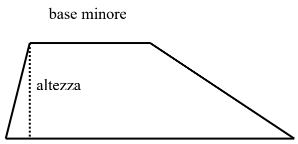
Successivamente, si presentano anche parallelogrammi in cui la motivazione precedentemente illustrata deve essere modificata.



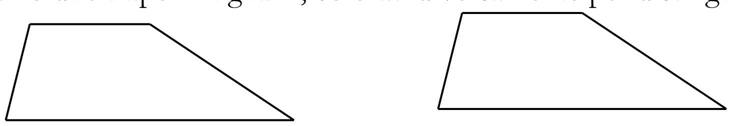


Area del trapezio

Con due cartoncini di colore differente, disegniamo due trapezi uguali e li ritagliamo. Ne incolliamo uno sul quaderno.

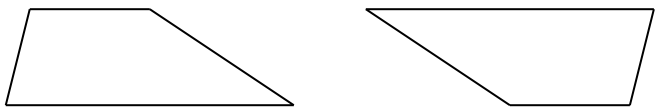


Prendiamo due trapezi “uguali”, colorati diversamente per distinguerli:

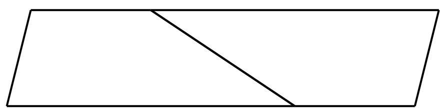


Osserviamo che i due trapezi, essendo uguali, hanno area uguale.

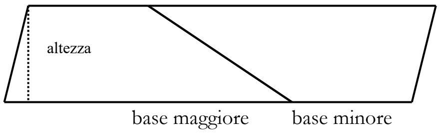
Ruoto di 180 gradi in senso antiorario uno dei due trapezi e lo dispongo in modo che le due basi siano allineate con le basi dell’altro trapezio:



Ora avvicino i due trapezi ottenuti in modo da far combaciare i lati obliqui (senza sovrapposizioni:



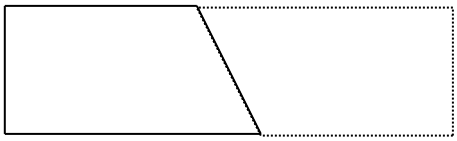
La figura ottenuta è un parallelogramma, la cui area è il doppio dell’area del trapezio (perchè si decompone in due parti, ciascuna delle quali ha area uguale al trapezio iniziale). Notiamo che l’altezza del parallelogramma è esattamente l’altezza *h* del trapezio. Invece, la base del parallelogramma è esattamente la somma di base maggiore e base minore del trapezio.

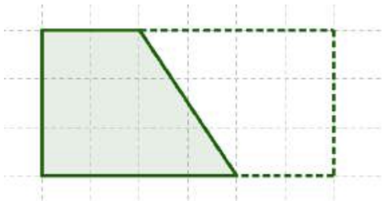


Si scopre, quindi, che la formula dell'area del trapezio è data da

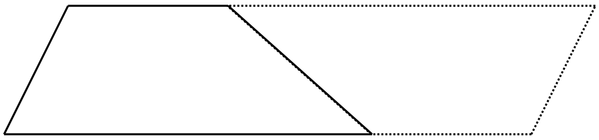
Area trapezio = [(base maggiore + base minore) x altezza]/ 2 .

Se si prova a ripetere il procedimento a partire da un trapezio rettangolo, si trova un rettangolo di area doppia del trapezio iniziale.



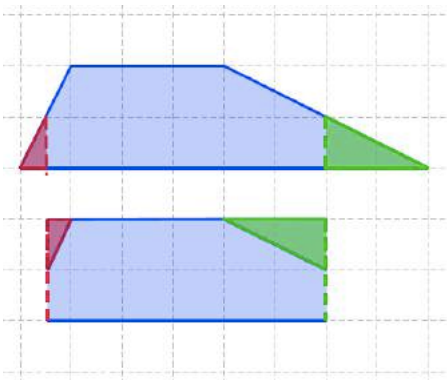


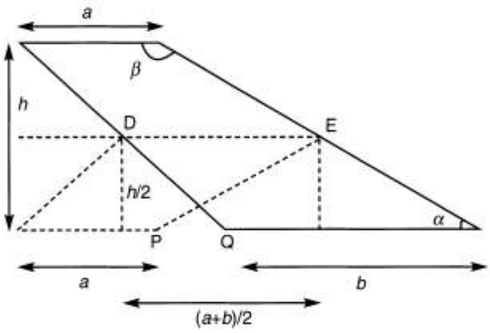
Se invece si parte da un trapezio scaleno, si trova un parallelogramma non rettangolo.

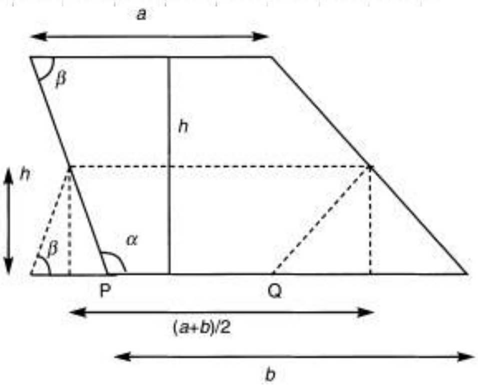


Posso dunque dire che, in ogni caso, questo procedimento mi permette sempre di costruire un parallelogramma di area doppia del trapezio iniziale (e avente, per altezza, la stessa altezza e, per base, la somma di base maggiore e base minore). Resta vera, in ogni caso, la formula trovata dell'area del trapezio.

Piegando modelli di carta:

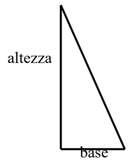




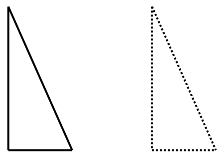


Formula area triangolo

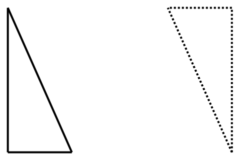
Considero un triangolo rettangolo, per cominciare da un esempio, e lo disegno come segue:



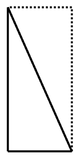
Considero due copie del triangolo:



ruoto di 180 gradi in senso antiorario una delle due figure:

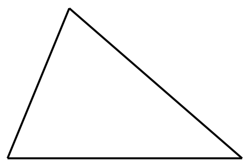


e le unisco lungo i "lati obliqui" (che sono congruenti):

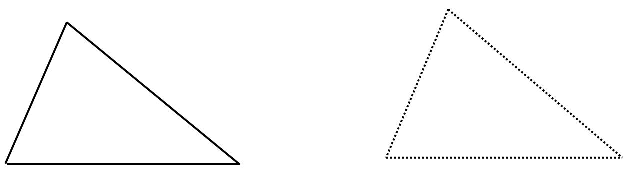


Otteniamo un rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del triangolo iniziale: l'area del triangolo è la metà dell'area di tale rettangolo: dunque la formula dell'area del triangolo rettangolo è (base x altezza)/2 (osservando che i cateti possono svolgere i ruoli di base e altezza).

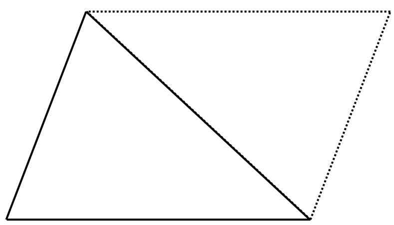
Considero ora un triangolo generico, che disegno per comodità nel modo seguente:



Come prima, faccio due copie del triangolo, e le coloro diversamente per distinguerle:

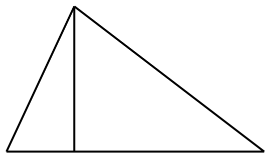


Giro uno dei due triangoli e incollo entrambi lungo uno dei lati corrispondenti

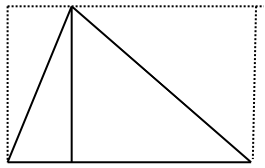


Scopro che l'area del triangolo è pari alla metà dell'area di un parallelogramma, avente la stessa base b e la stessa altezza h.

Ritroviamo la stessa formula anche se ragioniamo sul triangolo generico scomponendolo in triangoli rettangoli tracciando una altezza:



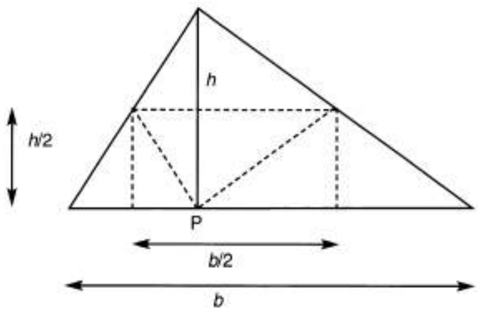
e, per ciascuno dei due triangoli rettangoli ottenuti, creando un rettangolo di area doppia:



(

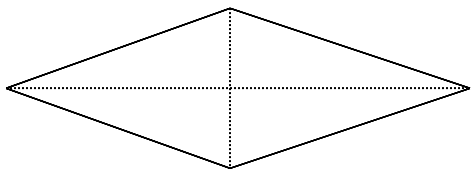
E' bene ripercorrere entrambi i ragionamenti: evidenziando che ogni triangolo è metà di un parallelogramma come nella figura 1, si individua una proprietà diversa, rispetto alla suddivisione proposta nella figura 2: la seconda figura è molto più elaborata, e può essere interpretata anche come introduzione alla formula dell'area del rombo nei termini delle lunghezze delle diagonali.

Piegando modelli di carta:

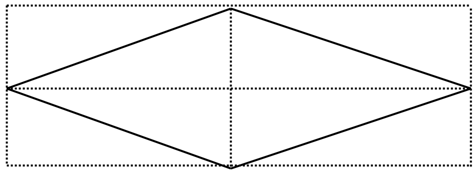


Formula area rombo

L'area del rombo può essere calcolata come l'area di un parallelogramma (ottenendo la formula *Area Rombo = base x altezza*) oppure esprimendola attraverso la lunghezza delle diagonali, ragionando come segue. Disegniamo il rombo come in figura, e tracciamone le diagonali:



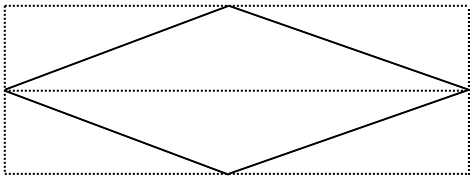
osservando che esse scompongono il rombo in quattro triangoli rettangoli. Per ciascuno di questi quattro triangoli rettangoli costruisco il rettangolo di area doppia rispetto alla procedura precedente. Ottengo:

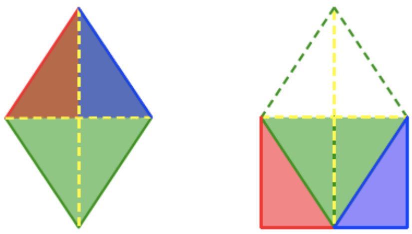


I quattro piccoli rettangoli compongono un rettangolo grande, i cui lati hanno la lunghezza della diagonale maggiore e della diagonale minore, rispettivamente: dunque l'area di questo rettangolo è data dal prodotto: *diagonale maggiore x diagonale minore*. Poiché il rettangolo grande ha area doppia del rombo (perché ogni piccolo rettangolo ha area doppia del triangolo rettangolo in cui il rombo è scomposto), l'area del rombo è data dalla formula:

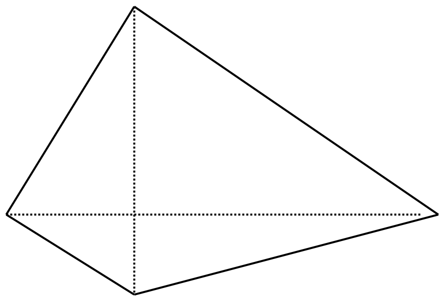
Area rombo = (diagonale maggiore x diagonale minore)/2.

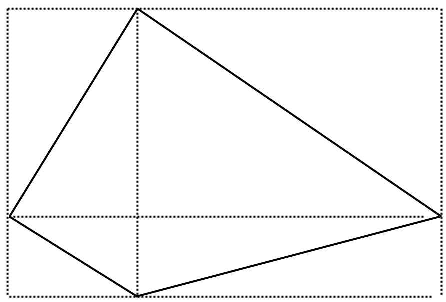
Si osservi che si arriva allo stesso risultato scomponendo il rombo in due triangoli isosceli, tramite una diagonale (e costruendo, come in figura 2, il rettangolo di area doppia):



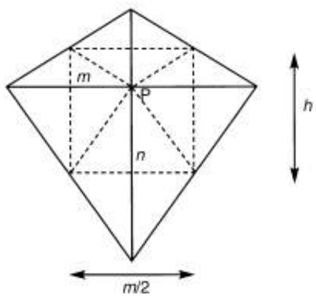


OSSERVAZIONE: la formula appena trovata per l'area del rombo vale anche, più in generale, per i quadrilateri piani che hanno le diagonali perpendicolari.





Piegando modelli di carta



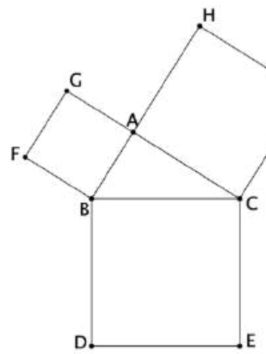
Teorema di Pitagora e teorema inverso

Il primo libro degli elementi di Euclide si conclude con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo teorema inverso.

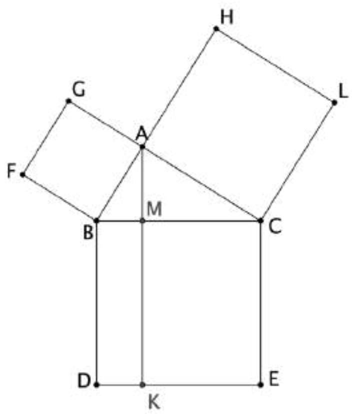
La dimostrazione del Teorema di Pitagora è già stata discussa nel corso dell'insegnamento in casi particolari. Ora viene affrontata nella forma generale. **Si cerca di mettere in evidenza la linea della dimostrazione e si fa riferimento al libro di testo per il dettaglio delle motivazioni dei singoli passaggi.**

Proposizione I.47 Teorema di Pitagora *In un qualsiasi triangolo rettangolo, il quadrato avente per lato l'ipotenusa ha area uguale alla somma delle aree dei quadrati aventi per lato un cateto.*

Dimostrazione
Sia ABC^{Δ} un triangolo rettangolo, con angolo retto in A. (In base alla proposizione 46) si costruiscano i quadrati aventi per lato, rispettivamente, l'ipotenusa e ciascuno dei due cateti.



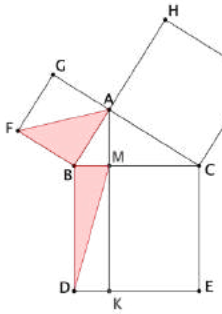
Disegniamo per A la parallela a BD (e quindi anche a CE) e indichiamo con M il suo punto di intersezione con BC e con K il suo punto di intersezione con DE. I quadrilateri DKMB e KECM sono rettangoli e scompongono il quadrato DECB costruito sull'ipotenusa



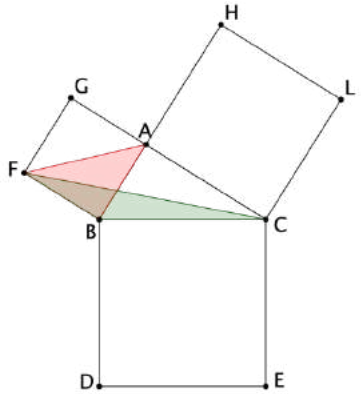
La dimostrazione proposta da Euclide consiste nel dimostrare che il quadrato BAGF costruito sul cateto AB è equivalente (cioè ha la stessa area) al rettangolo DKMB, mentre il quadrato ACLH costruito sul cateto AC è equivalente al rettangolo MKEC.
È sufficiente dimostrare che il quadrato BAGF è equivalente al rettangolo DKMB. In modo analogo, si dimostra l'equivalenza tra il quadrato ACLH e il rettangolo MKEC.

Analizziamo dunque la linea dimostrativa di Euclide per provare che il quadrato BAGF è equivalente al rettangolo DKMB:

- è sufficiente mostrare che metà del quadrato BAGF è equivalente a metà del rettangolo DKMB: ma metà del quadrato BAGF è uguale al triangolo rettangolo FBA^{Δ}, mentre metà del parallelogramma DKMB è uguale al triangolo MBD^{Δ}. Dunque, proveremo che FBA^{Δ} è equivalente a MBD^{Δ}.



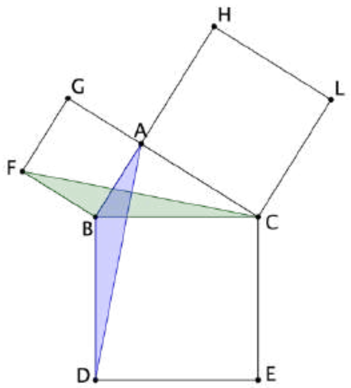
- Iniziamo la dimostrazione; per una maggiore chiarezza delle figure, nella prima fase non terremo conto del segmento AK tracciato per esprimere la tesi.
- Si inizia osservando che i triangoli FBA^{Δ} e FBC^{Δ}, hanno la stessa base e sono compresi tra le stesse parallele: dunque
  - area (FBA^{Δ}) = area (FBC^{Δ})



- Ora mostriamo che i triangoli FBC^{Δ} e ABD^{Δ} sono congruenti per l'assioma LAL (Lato-Angolo-Lato): infatti, i due triangoli hanno
  - i lati FB e AB uguali (perché lati dello stesso quadrato BAGF)
  - i lati BC e BD uguali (perché lati dello stesso quadrato DECB)
  - gli angoli compresi $\widehat{FBC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC}$ e $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$ tra loro uguali per le nozioni comuni, perché l'angolo $\widehat{ABC}$ compare in entrambe le somme e gli angoli $\widehat{FBA}$ e $\widehat{CBD}$ sono retti.

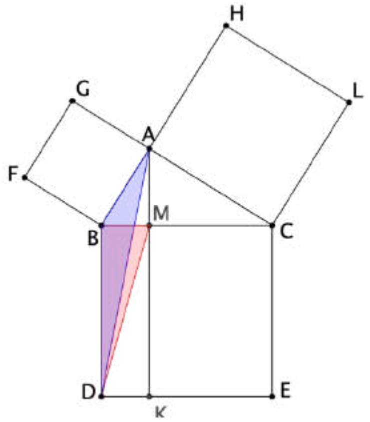
  Dunque:

area (FBC^{Δ}) = area (ABD^{Δ})



Ora prendiamo nuovamente in considerazione il segmento AK per A parallelo a BD. I triangoli ABD^{Δ} e MBD^{Δ} sono congruenti perché hanno la stessa base e sono compresi tra le stesse parallele; dunque

area (FBC^{Δ}) = area (ABD^{Δ})



Componendo le uguaglianze, si ricava l'uguaglianza cercata

area (FBA^{Δ}) = area (BMD^{Δ})

e quindi area (BAGF)= area (DKMB), come si voleva.

Come preannunciato, è possibile ripercorrere il ragionamento svolto per completare la dimostrazione.

Esercizio: Nelle notazioni della dimostrazione della Proposizione 47, mostrare che il parallelogramma DKMB è un rettangolo.

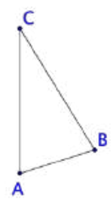
La proposizione I.48 illustra che la relazione tra i lati di un triangolo rettangolo fornita dal teorema di Pitagora caratterizza i triangoli rettangoli:

Proposizione I.48 *In un triangolo, il quadrato costruito su un lato del triangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri lati. Allora il triangolo è rettangolo.*

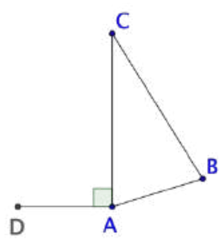
Dimostrazione

Sia ABC^{Δ} un triangolo tale che il quadrato sul lato BC sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AB e AC. Vogliamo mostrare che l'angolo in A è retto.

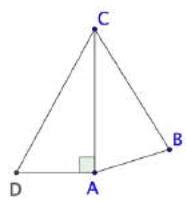
(*) *area quadrato di lato AB + area quadrato di lato AC = area quadrato di lato BC.*



Nel semipiano individuato da AC e non contenente B, tracciamo la perpendicolare AD ad AC nel punto A, prolungata in modo tale che AD = AB.



Congiungiamo D con C.



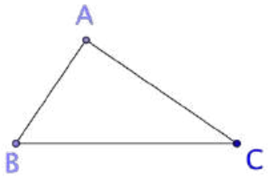
Il triangolo ADC^{Δ} è rettangolo per costruzione, quindi ad esso si applica la proposizione 47. Ricaviamo che

(**) *area quadrato di lato DA + area quadrato di lato AC = area quadrato di lato CD.*

Ricordando che DA=AB per costruzione e ricordando l'ipotesi (*), deduciamo che l'area del quadrato di lato BC coincide con l'area del quadrato di lato CD. Ma allora, BC=AC.
I triangoli ABC^{Δ} e ADC^{Δ} sono dunque congruenti perché hanno i tre lati in corrispondenza uguali.
L'angolo BAC, corrispondente all'angolo retto DAC, è dunque retto, come si voleva.

Applicazioni

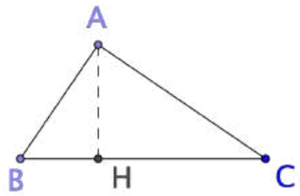
Consideriamo un triangolo rettangolo ABC^{Δ} con angolo retto in A.



Utilizzando la formula dell'area del quadrato, l'enunciato del teorema di Pitagora afferma che

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

Consideriamo l'altezza da A rispetto all'ipotenusa CB: essa è il segmento AH perpendicolare a BC.

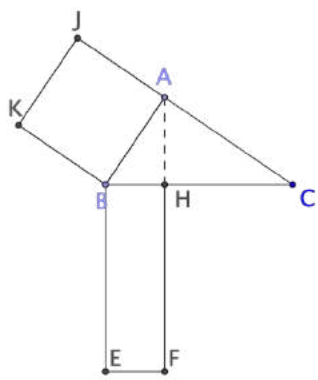


Il segmento BH è detto proiezione del cateto AB sull'ipotenusa BC.

La dimostrazione di Euclide mette in evidenza la relazione

$$(°) \quad AB^2 = BC \cdot BH$$

che viene talora chiamata Primo Teorema di Euclide e descrive l'equivalenza tra il quadrato costruito sul cateto e un rettangolo di lati BH e BC che scompone il quadrato di lato BC. La relazione (°) può essere riscritta nella forma $BC: AB = AB: BH$.



Considerando il cateto AC, si trova una analoga relazione

$$(°°) \quad AC^2 = BC \cdot HC \quad \text{cioè } BC: AC = AC: HC$$

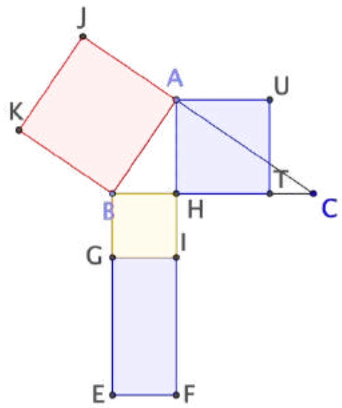
Osserviamo che l'altezza AH scompone il triangolo ABC^{Δ} in due triangoli rettangoli, CHA^{Δ} e HAB^{Δ}. Il primo teorema di Euclide segnala che i tre triangoli rettangoli sono tra loro simili (angoli in corrispondenza uguali e lati corrispondenti con rapporto costante.
Applichiamo il teorema di Pitagora ai tre triangoli rettangoli, esprimendo la relazione tra le aree tramite la formula dell'area di un quadrato:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 \qquad \text{per } ABC^{\Delta}$$
$$AC^2 = CH^2 + AH^2 \qquad \text{per } CHA^{\Delta}$$
$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \qquad \text{per } HAB^{\Delta}$$

In particolare, la relazione $AC^2 = CH^2 + AH^2$ (ottenuta applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHA^{Δ}) chiarisce l'equivalenza tra il quadrato BAJK sul cateto AB e il rettangolo EFHB: il rettangolo EFHB può essere scomposto come unione del quadrato GIHB di lato BH (la proiezione di AB sull'ipotenusa BC) e il rettangolo EFIG equivalente al quadrato HTUA avente per lato l'altezza AH del triangolo ABC^{Δ} rispetto all'ipotenusa BC. In particolare, poiché $GE = HC$, si ottiene l'importante relazione

(§) $$AH^2 = BH \cdot HC$$

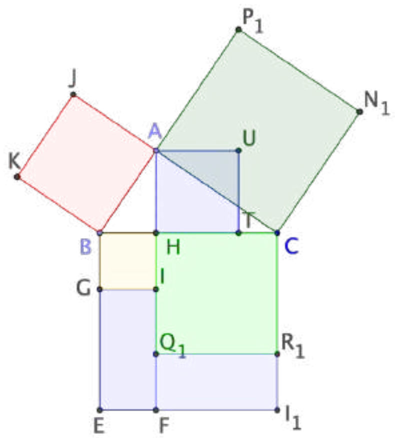
che viene talora ricordata come il secondo teorema di Euclide.

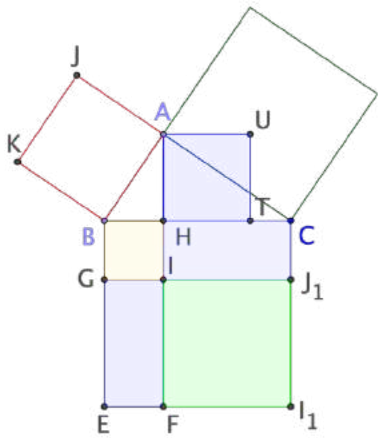


La relazione (§) può essere interpretata come una modalità per trasformare rettangoli in quadrati aventi la stessa area: assegnati i lati di un rettangolo, il lato del quadrato equivalente al rettangolo è uguale all'altezza del triangolo rettangolo avente per ipotenusa la somma dei lati dei rettangoli, e i lati del rettangolo come proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Resta aperta la domanda se sia possibile costruire un triangolo rettangolo in cui siano preassegnate l'ipotenusa e le proiezioni. La risposta (positiva) a questo quesito è fornita dal teorema dell'angolo al centro e alla circonferenza, che verrà descritto nel seguito.

Analizzando analogamente il triangolo HAB^{Δ}, chiarisce l'equivalenza tra il quadrato BAJK sul cateto AB e il rettangolo EFHB: il rettangolo EFHB può essere scomposto come unione di un quadrato di lato HC (la proiezione di AC sull'ipotenusa BC) e un rettangolo equivalente (come in precedenza) al quadrato HTUA avente per lato l'altezza AH del triangolo ABC^{Δ} rispetto all'ipotenusa BC. Le figure illustrano due modi di rappresentare tale scomposizione.





Circonferenza e cerchio

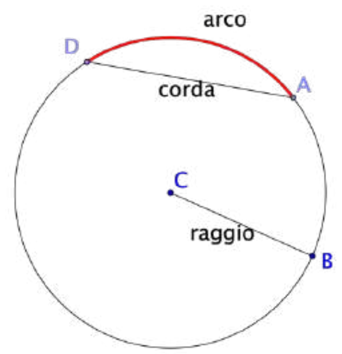
Ricordiamo brevemente alcuni termini relativi alla circonferenza e al cerchio.

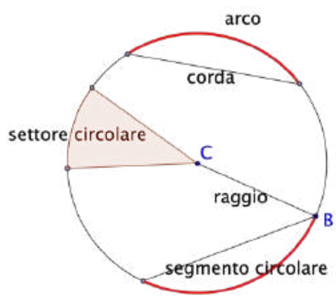
Nel piano, fissati un punto C e un numero reale positivo r, la circonferenza è il luogo di tutti i punti aventi distanza r (detto raggio della circonferenza) da C (detto Centro).

Euclide non utilizza, nel primo libro degli Elementi, la misura dei segmenti, ma unicamente la possibilità di affermare se due segmenti hanno o no la stessa lunghezza. L'assioma 3 assicura l'esistenza di una circonferenza, comunque assegnati un centro e un raggio. Come abbiamo già commentato, l'assioma 3 equivale alla possibilità di avere un compasso di ampiezza arbitraria.

La circonferenza è la linea disegnata dal compasso, mentre il cerchio è l'interno della figura. Il centro è ha un ruolo speciale nel lavoro con il compasso, che mette in evidenza come ogni punto della circonferenza è alla stessa distanza dal centro: il compasso disegna la circonferenza esattamente mantenendo costante questa distanza. La superficie compresa tra due cerchi aventi lo stesso centro e raggi diversi forma una **corona circolare.**

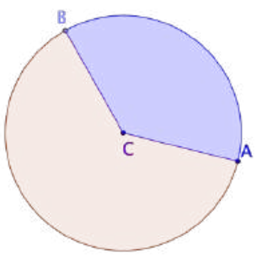
Il termine **raggio** (parola con cui chiamiamo sia un segmento che la sua lunghezza) è la misura di questa distanza o un segmento che congiunge il centro con un punto della circonferenza. Il **diametro** è un segmento che congiunge due punti della circonferenza, passando per il centro: esso è dunque lungo il doppio del raggio; se, più in generale, tracciamo un segmento che congiunge due punti della circonferenza, tracciamo una **corda**. I diametri sono le corde di lunghezza massima.

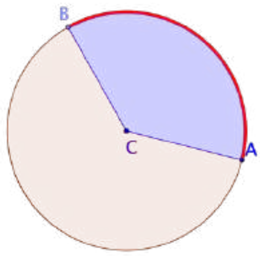




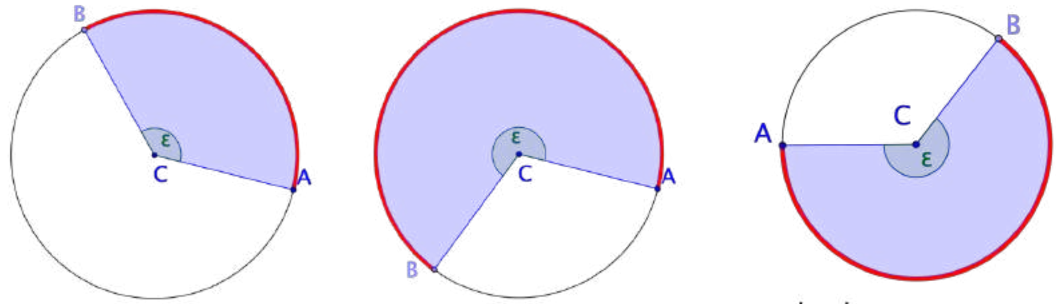
Ogni corda divide il cerchio in due parti: la parte più piccola è detta **segmento circolare**. Quando la corda è un diametro, il segmento circolare prende il nome di **semicerchio**, perché è la metà di un cerchio. Un **arco** è il tratto di circonferenza che congiunge due punti: ogni segmento circolare ha come contorno un arco e una corda che congiungono gli stessi due punti.

Assegnare due punti distinti A e B sulla circonferenza individua due distinti archi. Congiungendo il centro della circonferenza con A e B dividiamo la circonferenza in due settori circolari complementari: la scelta di uno specifico arco seleziona uno specifico settore circolare.



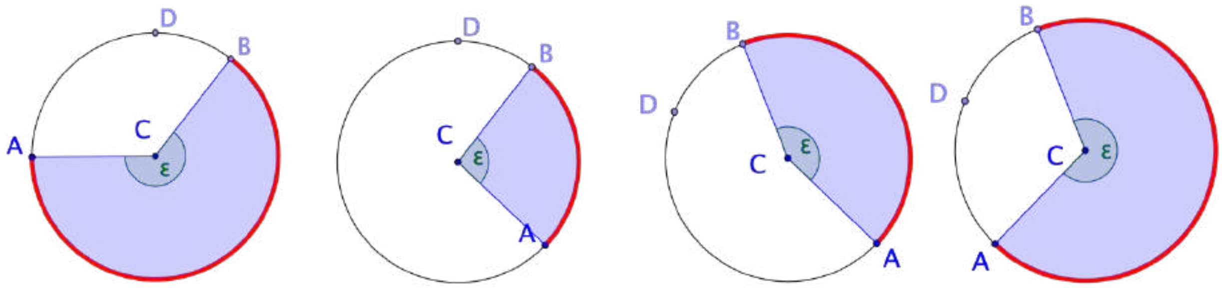


L'angolo ε formato nel centro C dai due raggi che delimitano il settore e contenuto nel settore è detto **angolo al centro sotteso all'arco**.

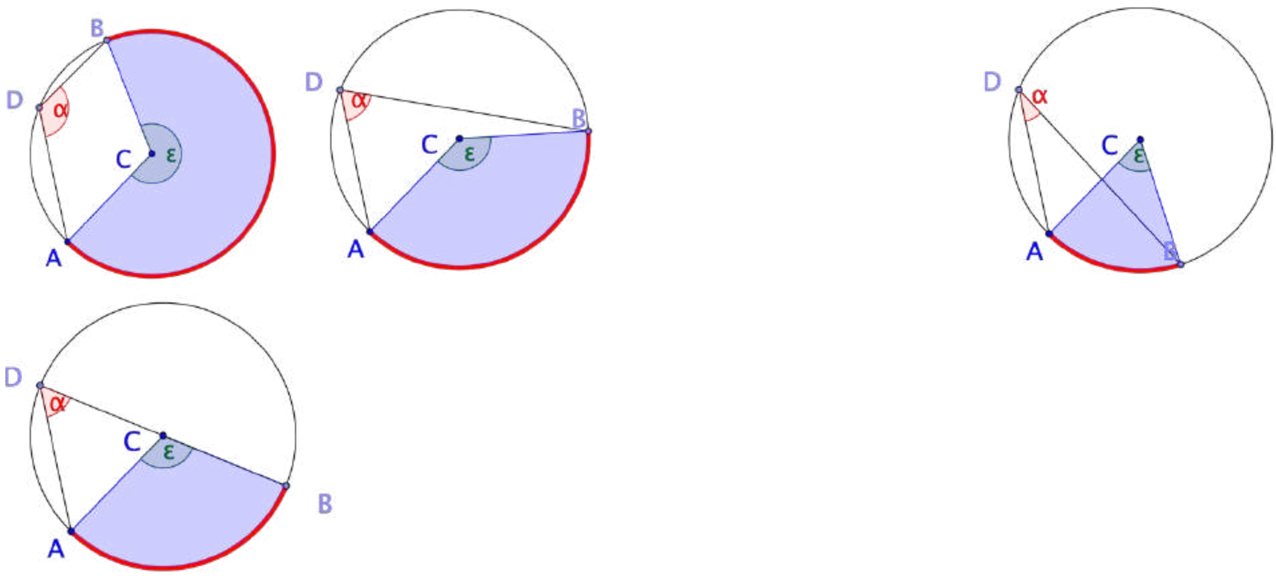


angolo al centro sotteso all'arco angolo al centro sotteso all'arco angolo al centro sotteso all'arco

Sempre assegnati due punti A e B nella circonferenza, un altro modo per individuare un settore circolare è quello di scegliere un ulteriore punto D sulla circonferenza (distinto da A e da B): questa scelta equivale a indicare che l'arco selezionato è l'arco di estremi A e B che NON contiene D:



Ora possiamo congiungere i punti A e B con D, formando un nuovo angolo, $\alpha = \widehat{ADB}$, detto **angolo alla circonferenza che insiste sull'arco**:



Si noti che l'angolo al centro è individuato dalla scelta di A, B e dell'arco, mentre con lo stesso angolo a centro si possono disegnare infiniti angoli alla circonferenza, muovendo la posizione del punto D.
Il teorema seguente illustra che, indipendentemente dalla posizione del punto D, l'angolo al centro è sempre doppio dell'angolo alla circonferenza. In particolare, sono tra loro uguali tutti gli angoli che insistono nello stesso angolo al centro.

Teorema dell'angolo al centro e alla circonferenza *In una circonferenza, dalla posizione del punto D, l'angolo al centro è sempre doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste nel medesimo arco.*

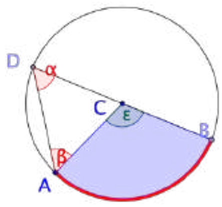
Dimostrazione
Si osservi che AC = AB, perché entrambi sono raggi della stessa circonferenza.

La dimostrazione si articola in quattro casi:

- **caso 1: D è allineato con il centro C e il punto B (oppure, analogamente, il punto A)**

  Il triangolo ACD^{Δ} è isoscele perché AC = AB, come osservato. Per la Proposizione 5, gli angoli alla base DA coincidono: quindi, $\alpha = \beta$. L'angolo ε risulta essere l'angolo esterno relativo al vertice C, e quindi è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti; otteniamo, come si voleva, che

  $$\varepsilon = 2\alpha.$$



- **Caso 2: C è interno al triangolo ABD^{Δ}**

  Tracciamo il diametro DE per D: applicando il caso precedente all'angolo alla circonferenza $\widehat{ADE}$ e al relativo angolo al centro $\widehat{ACE}$, osserviamo che

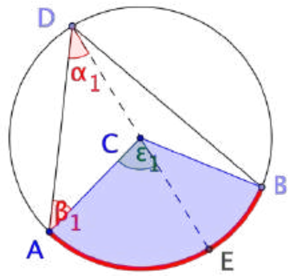
  $$\varepsilon_1 = 2\alpha_1$$

  Procedendo in modo analogo per l'angolo alla circonferenza $\widehat{EDB}$ e al relativo angolo al centro $\widehat{ECB}$, osserviamo che

  $$\widehat{ECB} = 2\widehat{EDB}$$

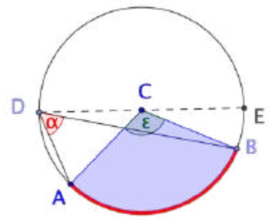
  Ricaviamo, come si voleva, che

  $$\varepsilon = \varepsilon_1 + \widehat{ECB} = 2\alpha_1 + 2\widehat{EDB} = 2\left(\alpha_1 + \widehat{EDB}\right) = 2\alpha$$



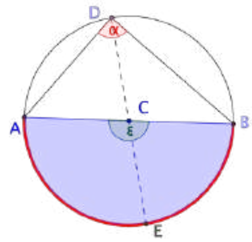
- **Caso 3: C è esterno al triangolo ABD^{Δ}**

  Come nel caso precedente, tracciamo il diametro DE. Si procede per differenza, osservando che $\varepsilon = \widehat{ECA} - \widehat{ECB} = 2\widehat{EDA} - 2\widehat{EDB} = 2\left(\widehat{EDA} - \widehat{EDB}\right) = 2\alpha$, come si voleva.



- **Caso 4: AB è un diametro**

  Tracciando, come di consueto, il diametro DE, si procede esattamente come nel caso in cui C sia interno al triangolo ABD^{Δ}. In questo caso, l'angolo al centro è un angolo piatto, e quindi, indipendentemente dalla posizione di D, l'angolo alla circonferenza è un angolo retto. Il triangolo ABD^{Δ} è quindi rettangolo.



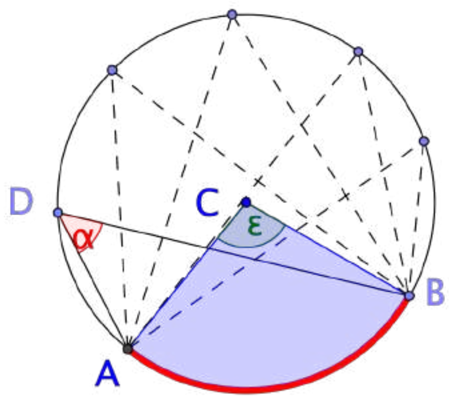
Applicazioni

Il precedente Teorema permette di disegnare triangoli rettangoli con ipotenusa scelta a piacere e, in essa, le proiezioni del vertice con l'angolo retto.

Conseguenze importanti di questo teorema sono

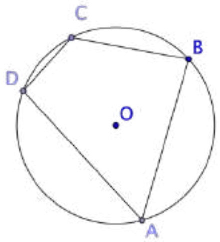
1) Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali dal momento che risultano essere angoli alla circonferenza corrispondenti al medesimo angolo al centro.

2) Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto: infatti esso è corrispondente ad un angolo al centro piatto.



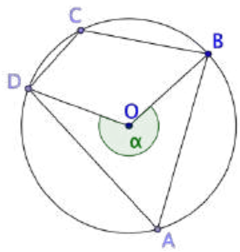
Esercizi

1. *Sia P un quadrilatero i cui vertici A, B, C, D appartengono a una circonferenza di centro O, come in figura.*
   a. *Disegna l'angolo al centro corrispondente all'angolo* DCB^{Δ}
   b. *Dimostra che la somma delle ampiezze degli angoli nei vertici opposti A e C è uguale alla somma per i vertici D e B.*

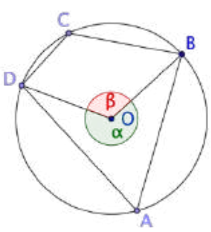


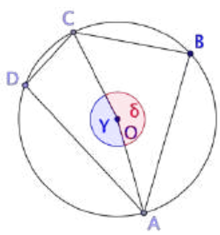
Soluzione:

a. Si disegnano i raggi DO e OB. I punti D e B individuano due archi: l'angolo al centro relativo all'angolo alla circonferenza DCB^{Δ} è dalla parte dell'arco che non contiene C, come in figura

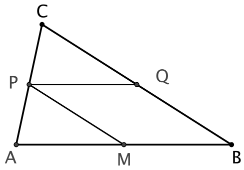


b. Per quanto visto al punto precedente, l'angolo DCB^{Δ} è la metà dell'angolo α in figura. Analogamente, l'angolo opposto DAB^{Δ} è la metà del relativo angolo al centro, indicato con β in figura. La somma degli angoli opposti in C e in A è quindi uguale alla metà della somma $\alpha + \beta$, che è un angolo giro. Dunque, la somma degli angoli nei vertici opposti A e C è uguale a un angolo piatto. In modo analogo, l'angolo al vertice B è la metà dell'angolo indicato con γ in figura, mentre l'angolo al vertice D è la metà dell'angolo indicato con δ. La somma degli angoli opposti in B e in D è nuovamente la metà della somma $\gamma + \delta$, che è un angolo giro. Dunque, la somma degli angoli in due vertici opposti è uguale a un angolo piatto, e in particolare la somma degli angoli in A e C è uguale alla somma degli angoli in B e D.





2. *Sia T un triangolo di vertici A, B, C come in figura. Siano M il punto medio di AB e P il punto medio di AC. Supponi, inoltre, che Q sia un punto su BC tale che PQ e AB siano paralleli*



   a. Dimostra che i triangoli PQC^{Δ} e AMP^{Δ} sono congruenti.
   b. Dimostra che l'area di ABC è quattro volte l'area di PQC^{Δ}.

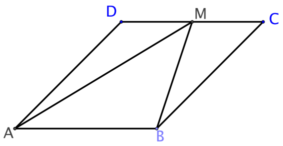
Soluzione:

   a. Per il teorema di Talete, il segmento PM è parallelo a CB, perché divide i lati AC e AB a metà (e dunque in segmenti con le stesse proporzioni). Poiché PM e CB sono paralleli, per la Proposizione 29 gli angoli $\widehat{APM}$ e $\widehat{PCB}$ sono uguali.
   b. Sempre per il Teorema di Talete, il segmento PQ è parallelo a AB, perché divide i lati AC e BC a metà (e dunque in segmenti con le stesse proporzioni). Poiché PQ e AB sono paralleli, per la Proposizione 29 gli angoli $\widehat{CAM}$ e $\widehat{CPQ}$ sono uguali.

I triangoli AMP^{Δ} e PQC^{Δ} sono congruenti per il criterio Angolo-Lato-Angolo, perché hanno uguali
- $\widehat{APM} = \widehat{PCB}$
- AP = PC per definizione di punto medio P
- $\widehat{CAM} = \widehat{CPQ}$

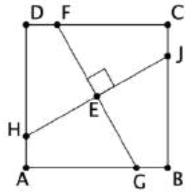
Ricaviamo quindi che area AMP^{Δ} = area PQC^{Δ}, che PM=CQ (=QB perché nel parallelogramma MBQP i lati opposti devono essere uguali), PQ=AM = MB per definizione di punto medio M.
L'area del triangolo T è pari alla somma delle aree dei due triangoli congruenti più l'area del parallelogramma MBQP (che ha base uguale al triangolo AMP^{Δ} e uguale altezza, e quindi ha area doppia di AMP^{Δ}).
Dunque, l'area di ABC è quattro volte l'area di PQC^{Δ}, come si voleva.

3. *Sia P un parallelogramma di vertici A, B, C, D come in figura. Sia M il punto medio di DC. Calcola il rapporto tra l'area di P e l'area del triangolo* AMD^{Δ}.

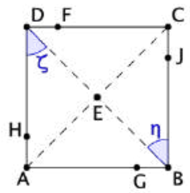


Soluzione:
Il parallelogramma P e il triangolo AMD^{Δ} hanno la stessa base e sono comprese tra le stesse parallele. Per la proposizione 41, il parallelogramma P ha quindi area doppia del triangolo AMB^{Δ}. Per differenza, la somma delle aree dei due triangoli AMD^{Δ} e MBC^{Δ} è pari all'area del triangolo AMD^{Δ} e quindi alla metà dell'area di P. Ma i due triangoli AMD^{Δ} e MBC^{Δ} hanno la stessa area, perché compresi tra le stesse parallele e con basi della stessa lunghezza (DM=MC perché M è punto medio). Concludiamo che l'area di P è quattro volte l'area di AMD^{Δ}, e il rapporto richiesto è 4.

4. *Considera un quadrato di vertici A, B, C, D e il punto E in cui le sue diagonali si intersecano. Dividi il quadrato in due parti, con un segmento che passa per E e interseca due lati opposti nei punti F, G (rispettivamente), come in figura. Ora considera anche un nuovo segmento HJ che passa per E ed è perpendicolare a GF. Dimostra che i quadrilateri AGEH e EJCF sono tra loro congruenti e che, in essi, la somma di due angoli non consecutivi è pari a un angolo piatto.*

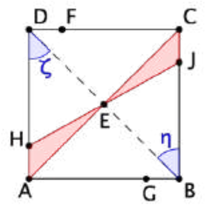


Soluzione:
Tracciamo le diagonali DB e AC.



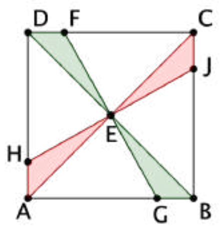
I due triangoli ABD^{Δ} e BCD^{Δ} sono congruenti per l'assioma Lato-Angolo-Lato: infatti, essi sono rettangoli isosceli, con cateti uguali al lato del quadrato.
I due triangoli ABD^{Δ} e ABC^{Δ} sono congruenti per il medesimo motivo. Ricaviamo che, in un quadrato, la diagonale biseca gli angoli al vertice e possiamo concludere che le diagonali dividono il quadrato in 4 triangoli congruenti ABE^{Δ}, BCE^{Δ}, CDE^{Δ}, DAE^{Δ} (hanno un lato uguale al lato del quadrato e i due angoli adiacenti uguali). In particolare, E è punto medio delle diagonali e le altezze da E a un qualsiasi lato del quadrato sono uguali.

Consideriamo ora il segmento HJ.

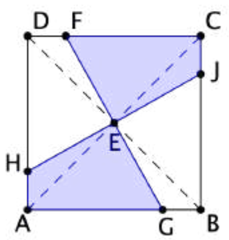


I due triangoli HAE^{Δ} e EJC^{Δ} sono congruenti per il criterio Angolo-Lato-Angolo: infatti, essi hanno
- angolo $\widehat{HAE}$ = angolo $\widehat{JCE}$ perché metà di un angolo retto
- AE = EC per quanto osservato prima
- $\widehat{AEH}$= $\widehat{CEJ}$ perché angoli opposti al vertice.
In particolare, HA=JC e dunque DH =JB (ottenuti per differenza dal lato del quadrato).

Ragioniamo analogamente con il segmento FG, ottenendo la congruenza dei triangoli DEF^{Δ} e EGB^{Δ}.



I quadrilateri AGEH e EJCF sono quindi equivalenti, perché si ottengono dai triangoli congruenti ABE^{Δ} e CDE^{Δ} aggiungendo i triangoli congruenti HAE^{Δ} e EJC^{Δ} e togliendo i triangoli congruenti triangoli EGB^{Δ} e DEF^{Δ}.



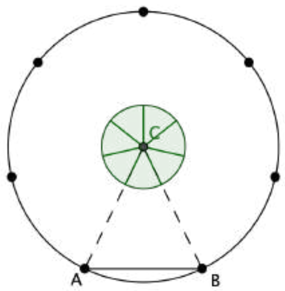
Inoltre, i due quadrilateri sono anche congruenti (perché le parti congruenti sono aggiunte e tolte nello stesso modo). È quindi sufficiente controllare le somme degli angoli opposti nel quadrilatero AGEH. Gli angoli in A e in E sono entrambi retti, e quindi la loro somma è un angolo piatto, come richiesto. Poiché la somma degli angoli interni in ogni quadrilatero convesso è un angolo giro, anche la somme degli angoli nei vertici opposti H e G deve essere uguale a un angolo piatto, come si voleva.

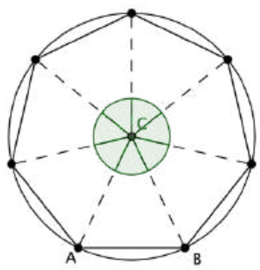
Poligoni regolari e circonferenza circoscritta

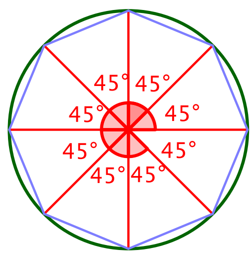
Diciamo che un poligono è inscritto in una circonferenza (o che la circonferenza è circoscritta al poligono) tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza. Un esempio di quadrilatero inscritto in una circonferenza è fornito nel primo esercizio.

Esercizio: Dato un triangolo HAE^{Δ} , mostrare che esiste una circonferenza ad esso circoscritta.

I poligoni regolari sono figure piane in cui tutti gli angoli sono tra loro uguali e tutti i lati sono tra loro uguali. I poligoni regolari sono sempre inscritti in una circonferenza. Per disegnare un poligono regolare di n lati, si disegna una circonferenza e in essa si divide in n parti uguali l'angolo giro nel centro C: considerando ogni tale parte come angolo al centro, si considerano il corrispondente arco e la corda per gli estremi dell'arco:







Ricordando che archi (e corde) sottesi a angoli al centro uguali sono tra loro uguali, si mostra che il poligono così ottenuto è regolare.
Osservando la suddivisione in triangoli isosceli congruenti (i segmenti congiungenti il centro con i vertici sono tutti uguali, perché raggi della stessa circonferenza), si determinano facilmente:

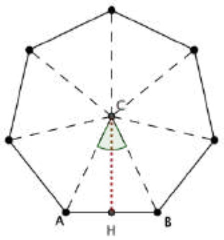
- l'angolo interno del poligono: l'angolo interno del poligono è pari alla somma di due angoli alla base nel triangolo ABC^{Δ}. Ricordiamo che l'angolo di triangolo ABC^{Δ} in C è uguale alla n-ma parte dell'angolo giro, cioè è uguale a $\frac{1}{n}$ 360°. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto, l'angolo interno del poligono regolare di n lati è 180°-$\frac{1}{n}$ 360°. In particolare, tale lampiezza non dipende dalla lunghezza del lato.

Si nota che, quanto più il numero n di lati diventa grande, tanto più l'angolo interno cresce e diminuisce il segmento circolare (la superficie tra la corda e l'arco)

- una formula per calcolare il perimetro: il perimetro del poligono regolare con n lati è uguale a n l ove l sia la lunghezza del lato

$$perimetro = n \cdot l$$

- l'**apotema** e il legame tra le lunghezze dell'apotema e del lato: l'apotema di un poligono regolare è l'altezza di uno qualsiasi dei triangoli isosceli in cui il poligono è suddiviso, quando si tracciano i segmenti dai vertici al centro. L'apotema coincide anche con il raggio della circonferenza inscritta nel poligono. Spesso, il termine apotema è utilizzato anche per indicare la lunghezza di tale segmento.



Indichiamo con a la lunghezza dell'apotema CH e con l la lunghezza del lato AB del poligono. Il rapporto tra l'apotema e la lunghezza del lato non dipende dalla lunghezza del lato, ma solo dal numero n di lati (perché gli angoli del triangolo CHB non dipendono dalla lunghezza del lato): tale rapporto è detto numero fisso, e indicato spesso con f_n

$$a_n = f_n \cdot l_n$$

- Utilizzando la consueta scomposizione in triangoli, una formula per calcolare l'area di un poligono regolare con n lati si ottiene moltiplicando per n l'area del singolo triangolo:

$$n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

che può essere riletta anche nella forma $\frac{perimetro \cdot a}{2}$

Le formule del perimetro e dell'area del cerchio non possono essere dimostrate nella scuola primaria. È però possibile mettere in evidenza l'analogia tra apotema di un poligono e raggio del cerchio come tra numero fisso e il numero π (che è uguale al rapporto tra circonferenza e diametro):
lunghezza di una circonferenza di raggio r = $2\,\pi\, r$
area cerchio di raggio r = $\pi\, r^2$
Si noti come la formula dell'area possa essere riletta come $\frac{perimetro \cdot \pi}{2}$.

Esercizio

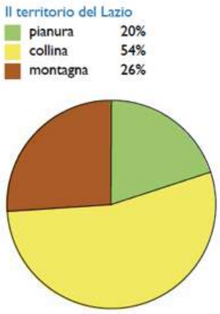
- Nella procedura per disegnare i poligoni regolari, determina l'angolo al centro necessario per disegnare un pentagono e quello per disegnare un esagono.
- In una figura piana, un **asse di simmetria** è una retta che divide la figura in due parti specularmente uguali.
    a. Disegnare gli assi di simmetria di un triangolo equilatero.
    b. Disegnare gli assi di simmetria di un quadrato.
    c. Disegnare gli assi di simmetria di un pentagono regolare e discutere se le diagonali sono assi di simmetria.
    d. Disegnare gli assi di simmetria di un esagono regolare e discutere se le diagonali sono assi di simmetria.

Areogrammi

Con lo metodo analogo a quello utilizzato per disegnare i poligoni regolari, è possibile disegnare un diagramma a torta (detto anche diagramma circolare) nel quale le frequenze (percentuali o relative) sono raffigurate da settori circolari, in modo tale che il rapporto tra le aree dei settori corrisponda al rapporto delle frequenze: per questo motivo, si dice che il diagramma a torta è un areogramma.
Nel caso si conoscano i valori percentuali, occorre associare ai valori percentuali (in centesimi), i gradi del corrispondente angolo (in 360-simi dell'angolo giro).

Raccolti i valori di una indagine relativa a un numero finito di voci e di intervistati, si assegna un colore a ogni voce rilevata. Poi, si rappresenta il totale degli intervistati con un cerchio.
Se si conosce il numero n di intervistati, ogni intervistato corrisponde ad uno settore circolare avente per area la n-ma parte dell'area del cerchio: come sappiamo, un tale settore circolare sottende un angolo al centro uguale alla n-ma parte dell'angolo giro, cioè $\frac{360°}{n}$.
Se i dati sono forniti attraverso percentuali, occorre notare che l'unità percentuale 1% corrisponde ad un settore circolare la cui area sia un centesimo dell'area del cerchio: un tale settore sottende un angolo al centro uguale a un centesimo dell'angolo giro, cioè $\frac{360°}{100} = \frac{36°}{10} = \frac{18°}{5}$.
Una volta individuato l'angolo al centro, si procede nel disegno utilizzando il goniometro.
Esempi:

- se sono state intervistate 120 persone, un gruppo di 45 persone corriponde a un settore circolare con angolo al centro uguale a $45 \cdot \frac{360°}{120}$



- $20\%\ corrisponde\ a\ angolo\ di\ 20 \cdot \frac{360°}{100} = \frac{360°}{5} = 72°$

Esercizio: Calcola gli angoli al centro e disegna il diagramma a torta che rappresenta i dati, nei seguenti esempi:
1. in una regione il territorio è per il 20% pianura, per il 10 % occupato da un lago, per il 30% collina, per il 40% montagna.
2. in una scuola di 240 bambini, 30 bambini hanno i capelli rossi, 80 hanno i capelli biondi e gli altri hanno capelli castani.

Scrittura posizionale decimale

La nozione di numero differisce dalle sue rappresentazioni, che sono molteplici. La rappresentazione tramite simboli grafici può essere fatta in vari modi. Usualmente, in Europa, si utilizza il **sistema di numerazione posizionale decimale**:

- Un **sistema di numerazione** è un modo di rappresentare i numeri attraverso un elenco ordinato di simboli (quali, ad esempio, le cifre)
- Un sistema di numerazione si dice **posizionale** se il valore di una cifra dipende dalla posizione in cui la cifra compare nella rappresentazione: spostando una cifra di una posizione a sinistra, il valore della cifra risulta moltiplicato per una certa quantità (che può dipendere dalla posizione)
- Un sistema di numerazione posizionale si dice **decimale** se il rapporto del valore della cifra spostata di una posizione a sinistra rispetto al valore nella posizione iniziale è sempre uguale a 10:

30= $3 \cdot 10$;   300 = $30 \cdot 10$…..; 3000 = $300 \cdot 10$
Il rapporto 10 è detto **base** della numerazione.
Nel sistema decimale posizionale si utilizzano 10 cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Le differenti posizioni (chiamate anche ordini) assumono nomi differenti: unità, decine, centinaia, migliaia, ….
Il sistema si basa sulla formazione di gruppi da 10 oggetti: un tale gruppo corrisponde alla posizione a sinistra: 10 unità vanno riunite in una decina, 10 decine vanno riunite in un centinaio. quindi, più di

nove gruppi dello stesso ordine vanno scritti con ordini più grandi (utilizzando una rappresentazione materiale, diciamo che non possono rimanere slegati).

La rappresentazione posizionale decimale fornisce per numeri naturali una rappresentazione più veloce e agile della corrispondente scrittura in forma polinomiale in base 10:

$$34071 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

ove $\cdot\ 10^1 = 10,\ \cdot\ 10^0 = 1.$

Per descrivere i numeri reali, occorre introdurre anche le potenze negative di 10:

$$34{,}071 = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

e la corrispondente nomenclatura: $\cdot\, 10^{-1}$ è un decimo, 10^{-2} è un centesimo, 10^{-3} un millesimo.

Il passaggio dal numero alla rappresentazione in forma posizionale decimale prende talora il nome di scomposizione del numero (quante centinaia? quante decine? quante unità?)
Le modalità di confronto tra numeri (chi è maggiore?, quando i numeri sono uguali?) e gli algoritmi di calcolo delle operazioni dipendono dalla scrittura posizionale decimale (e sfruttano le proprietà delle operazioni):

35 + <-----> (30 + 5)+ (20 + 6) = (30+20) + (5+6) =
26 =

^{1}35 + <-----> (30 + 20)+ 11 = (30 + 20)+ 10 + 1 = (30 + 20 + 10)+ 1
26 =
1

^{1}35 + <-----> 60 + 1 = 71
26 =
6 1

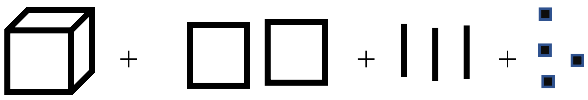
Esercizio: esprimere le modalità di confronto tra numeri scritti in forma posizionale decimale. Descrivere gli algoritmi della sottrazione e della moltiplicazione tra interi in forma posizionale, utilizzando le proprietà delle operazioni.

Rappresentazione dei numeri naturali in base a

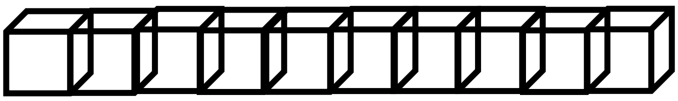
La scrittura dei numeri adottata dagli antichi Romani non aveva il pregio di poter scrivere tutti i numeri naturali tramite una quantità finita di simboli, ma richiedeva di inventare sempre nuovi simboli per rappresentare numeri di volta in volta più grandi.
Abbiamo ricordato che la scelta convenzionale europea normalmente utilizzata è quella di scrivere i numeri tramite il sistema posizionale decimale. È però, in varie situazioni, utilizzare anche una base differente da 10; in particolare, una base frequentemente utilizzata in informatica è la base 2.

Ricordiamo che, in un sistema di numerazione posizionale, fissare la base significa fissare il numero di simboli da utilizzare e fissare il rapporto tra il valore di una cifra in una posizione e il valore nella posizione successiva (cioè subito più a destra).
Ad esempio, se la base di numerazione fissata è 6, i simboli da utilizzare come cifre saranno
0, 1, 2, 3, 4, 5.
La scrittura posizionale si basa sulla possibilità di scrivere i numeri in forma polinomiale. Ad esempio, nella scrittura decimale (cioè in base 10) il numero 1234 corrisponde a
1234 = 1 migliaio + 2 centinaia + 3 decine + 4 unità =
= 1× 1000+ 2 × 100+ 3× 10 + 4
Utilizzando le potenze di 10, posso esprimere il numero 1234 nella seguente forma:
(*) $1234 = 1\times \mathbf{10^3} + 2 \times \mathbf{10^2} + 3\times \mathbf{10} + 4 \times \mathbf{10^0}$

che prende il nome di scrittura in *forma polinomiale in base 10*; le cifre 1, 2, 3, 4 sono i *coefficienti* della forma polinomiale; in particolare, 1 è il coefficiente di 10^3, 2 di 10^2, 3 di $10 = 10^1$, 4 il termine delle unità ($10^0=1$). La scrittura 1234 va considerata come la forma abbreviata della scrittura in forma polinomiale; tenendo memoria precisa dell'ordine in cui compaiono i coefficienti, possiamo evitare di riportare tutte le potenze di 10 e scrivere semplicemente la successione ordinata dei coefficienti: la rappresentazione 1234 è più semplice e immediata. Le cifre dei coefficienti vengono rigorosamente elencate a partire dal coefficiente della potenza maggiore (e inserendo 0 ove il coefficiente sia nullo).
Osserviamo che la scrittura polinomiale (*) può essere interpretata pensando che il numero 1234 è stato espresso come un cubo di lato 10 , più 2 quadrati di lato 10 , più 3 decine, più 4 unità.



Ogni ordine corrisponde a una figura geometrica differente e il relativo coefficiente illustra quanti pezzi di ciascuna figura vanno presi. Poiché i coefficienti sono sempre più piccoli di 10, 10 pezzi uguali vanno sempre 'incollati' a formare il pezzo di ordine più grande: 10 unità formno una decina, 10 decine formano un quadrato (cioè un centinaio), 10 quadrati formano un cubo. Poi si prosegue allineando 10 cubi in una 'decina di cubi', e formando quadrati di cubi e cubi di cubi.



una decina di cubi, corrispondente a 10^4

In modo analogo, scegliamo 6 come base. In tal caso, le cifre da utilizzare sono tutte le cifre tra 0 e 5.
La forma polinomiale in base 6

$$4 \times \mathbf{6^5} + 2 \times \mathbf{6^4} + 5 \times \mathbf{6^3} + 3 \times \mathbf{6^2} + 0 \times \mathbf{6} + 1 \times \mathbf{6^0}$$

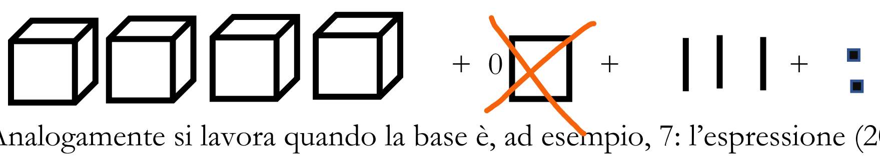
viene denotata con la scrittura

$$\mathbf{(425301)_6} \quad ;$$

le cifre dei coefficienti vengono rigorosamente elencate a partire dal coefficiente della potenza maggiore (e inserendo 0 ove il coefficiente sia nullo). La successione di numeri così trovata viene chiusa tra parentesi, e la base della numerazione viene indicata come pedice. Dunque, l'espressione $(4302)_6$ rappresenta il numero:

$$(4032)_6 = 4 \times 6^3 + 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 2 \times 6^0$$

Per capire di quale numero si parla, è sufficiente valutare l'espressione polinomiale, ottenendo il numero che in base 10 si scrive come 882: tale numero corrisponde a 4 cubi di lato 6 + nessun quadrato + 3 'sestine' + 2 unità



Analogamente si lavora quando la base è, ad esempio, 7: l'espressione $(2035612)_7$ rappresenta il numero:

$$(2035612)_7 = 2 \times 7^6 + 0 \times 7^5 + 3 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 1 \times 7 + 2 \times 7^0$$

Per essere precisi, il numero 1234 utilizzato nell'esempio iniziale avrebbe dovuto essere scritto come $(1234)_{10}$; ma, per semplicità, se la base non è esplicitamente indicata si intenderà sempre la base 10.
Esercizio: Verifica che $1234 = (3412)_7$, cioè che

$$1234 = 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 1 \times 7 + 2 \times 7^0 \ .$$

In modo analogo si lavora con le altre basi: comunque fissati un numero naturale e una base, è possibile scrivere il numero scelto come forma polinomiale nella base fissata (in cui i coefficienti devono essere cifre tra 0 e a-1, estremi inclusi) e poi nella forma compatta che utilizza la scrittura posizionale. Spesso si indica con a la base scelta.
In generale, *riducendo la base, la scrittura del numero richiede un maggior numero di termini.*

Esercizio 1. Controlla che $1234 = 1 \times 5^4 + 4 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4 \times 5^0$ e determina la scrittura in base 5 di 1234.

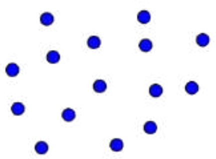
Esercizio 2. Determina la scrittura in base 5 (rispettivamente, in base 10) del numero
$4 \times 5^8 + 3 \times 5^7 + 3 \times 5^5 + 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$

Passare da una base *a* a base 10 e viceversa

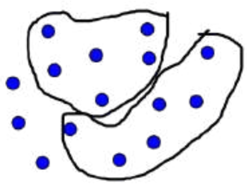
1. Per individuare la scrittura decimale di un numero di cui conosciamo la scrittura in una data base:
   - a partire dalla scrittura nella base assegnata, formiamo la scrittura in forma polinomiale
   - valutiamo la forma polinomiale svolgendo esplicitamente i calcoli.

Esempi:
$(10111)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 16+4+2+1 = 23.$
$(22314)_5 = 2\times 5^4 + 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4 = 1580.$

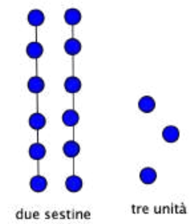
2.Viceversa, per individuare la scrittura in una data base di un numero *n* di cui conosciamo la scrittura decimale, occorre procedere formando gruppi da n oggetti, cioè svolgendo una serie di divisioni.
Iniziamo con fare alcuni esempi.
Rappresentiamo il numero assegnato tramite il materiale



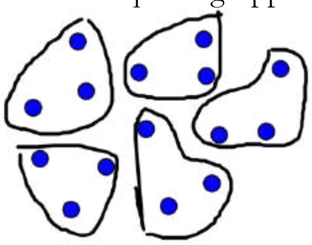
Per determinare la scrittura in base 6 di tale numero, iniziamo a formare gruppi da 6.



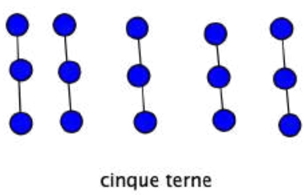
cioè



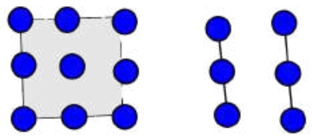
Abbiamo formato 2 gruppi da 6 e sono rimaste 3 unità, ricavando la forma polinomiale $2 \times 6 + 3$.
La scrittura in base 6 del numero assegnato sarà perciò $(23)_6$ (2 sestine e 3 unità).
Ora riprendiamo lo stesso numero rappresentato con il materiale, e cerchiamo di scriverlo in base 3.
Formiamo quindi gruppi da 3.



Abbiamo formato 5 gruppi da 3, cioè 5 terne. Leghiamo tra loro i tre punti di ciascuna terna



Ora suddividiamo in gruppi da 3 le terne: otteniamo un gruppo da tre terne e rimangono due terne libere (si usa anche il termine 'sciolte' perché non vengono legate tra loro). Leghiamo tra loro le tre terne del gruppo, formando un quadrato di lato tre



ottenendo una configurazione che corrisponde alla scrittura in forma polinomiale $1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 0$ e alla rappresentazione in base 3, che è $(120)_3$.
Ora descriviamo la procedura in generale. Chiamiamo *a* la base utilizzata per illustrare la procedura e chiamiamo *a*-upla un sottoinsieme di *a* oggetti.

- a partire dalla scrittura decimale, dividiamo *n* per *a* calcolando il risultato q_0 e il resto r_0:

$n = q_0 a + r_0$
il numero n è stato diviso in q_0 *a*-uple, con resto r_0; il resto r_0 è la cifra delle unità nella rappresentazione di n in base *a*.

- il risultato q_0 della prima divisione va nuovamente diviso per n

$q_0 = q_1 a + r_1$

Le q_0 *a*-uple possono essere organizzate in q_1 quadrati di lato *a*, con l'avanzo di r_1 *a*-uple

- procediamo continuando, ad ogni passo, a dividere per *a* il risultato della divisione precedente.
- interrompiamo quando il **risultato** è 0.
- Per ottenere la scrittura in base *a* di *n*, ricopiamo da sinistra a destra tutti i resti ottenuti, dall'ultimo al primo.

Esempio: Vogliamo scrivere 346 in base 5. Eseguo le divisioni:
346 : 5 = 69 con resto di **1**
69 : 5 = 13 con resto di **4**
13 : 5 = 2 con resto di **3**
2:5 = **0** con resto di **2**. Concludo che $346 = (2341)_5$
Infatti: 346 : 5 = 69 con resto di **1** **significa che** **346 = 5 × 69 +1**
69 : 5 = 13 con resto di **4** **significa che** **69 = 5 × 13 +4**
13 : 5 = 2 con resto di **3** **significa che** **13 = 5 × 2 +3**
2 : 5 = **0** con resto di **2**.
Cominciamo dalla prima delle uguaglianze sulla destra; sostituiamo a una a una le altre (una sostituzione per ogni cambio di riga) e poi riordiniamo:

$346 = 5 \times 69 + \mathbf{1} = 346 =$
$5 \times (5 \times 13 + \mathbf{4}) + \mathbf{1} = 5 \times 5 \times 13 + 5 \times \mathbf{4} + \mathbf{1} = 5^2 \times 13 + 5 \times \mathbf{4} + 1 =$
$5^2 \times (5 \times 2 + \mathbf{3}) + 5 \times \mathbf{4} + \mathbf{1} = 5^2 \times 5 \times 2 + 5^2 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{4} + \mathbf{1} = 5^3 \times 2 + 5^2 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{4} + \mathbf{1}$

La procedura utilizzata per ottenere calcolare le cifre della scrittura in base *a* illustra perchè tale scrittura esiste sempre.

Esercizi:
1.Calcola la scrittura di 4517 in base 5 e, rispettivamente, in base 9.
2.Dimostra che il numero $(4310)_5$ è divisibile per 5.
3. Utilizzando il materiale multibase in base 4, componi il numero $(213)_4$.

Somma di due numeri in base arbitraria

Poichè la scrittura in base arbitraria è posizionale, per calcolare la somma è possibile utilizzare il consueto metodo (o algoritmo) di calcolo. L'unica differenza da tenere a memoria è che il "riporto" viene utilizzato non appena si ottiene una cifra maggiore o uguale alla base utilizzata.

Esempio: $(23)_5+(11)_5 = (34)_5$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & + \\ 1 & 1 & = \\ \hline 3 & 4 & \end{array}$$

Esempio: $(23)_5+(34)_5 = (112)_5$ (i riporti vengono segnalati nella prima riga)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ & 2 & 3 & + \\ & 3 & 4 & = \\ \hline 1 & 1 & 2 & \end{array}$$

Esercizio: Calcola la somma $(123)_7+(155)_7$ [il risultato è $(311)_7$]

Sottrazione tra due numeri in base arbitraria

Analogamente all'addizione, per calcolare la differenza è possibile utilizzare il consueto metodo (o algoritmo) di calcolo. Come prima, occorre sempre ricordarsi quale è la base utilizzata.

Esempio: $(23)_5 - (11)_5 = (34)_5$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & - \\ 1 & 1 & = \\ \hline 1 & 2 & \end{array}$$

Esempio: $(23)_5 - (14)_5 = (4)_5$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & - \\ 1 & 4 & = \\ \hline & 4 & \end{array}$$

Esempio: $(423)_7 - (154)_7 = (236)_7$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 3 & - \\ 1 & 5 & 4 & = \\ \hline 2 & 3 & 6 & \end{array}$$

Esercizi:
- Ricontrollare le operazioni precedenti trasformando i numeri in scrittura decimale.
- calcolare $(243)_5 - (34)_5$

Numeri primi

I numeri primi sono stati introdotti e studiati dagli antichi Greci; Euclide li ha descritti negli "Elementi", dimostrando che sono infiniti. La nozione di numero primo si estende in ambito più generale, ma noi la studieremo solo per i numeri naturali.

Definizione Un numero naturale è detto *numero primo* se è maggiore di 1 e ha come divisori **solo** 1 e sé stesso.

Un numero primo ha quindi esattamente 2 divisori.
Un numero maggiore di 1 che non è primo, ha più di due divisori ed è detto *composto*. Ogni numero naturale diverso da 0 o 1 è primo o composto.

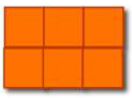
Rappresentiamo ogni numero naturale attraverso un insieme di quadratini:


Il numero 18

Un numero è primo quando posso formare con esso solo un rettangolo (identificando tra loro i rettangoli che hanno lati uguali); per questo motivo, Euclide chiamava *numeri lineari* i numeri primi. Possiamo studiare a mano i numeri più piccoli, concludendo che 2, 3 e 5 sono numeri primi.

5 

Un numero è composto quando posso formare più di un rettangolo. Per ogni divisore, si può formare un rettangolo che ha un lato uguale al divisore: a mano possiamo controllare che 4, 6, 9 sono numeri composti. E' più efficace pensare che un numero è composto se può essere diviso (con resto zero) da un numero più piccolo di lui e diverso da 1.

3×2 

Numeri primi minori di 100: il setaccio (o crivello) di Eratostene

E' possibile trovare tutti i numeri primi? Questo è un problema che ha appassionato i matematici per moltissimi secoli. Una soluzione operativa a questo problema è stata trovata da Eratostene.
Il metodo di Eratostene non permette di elencare tutti i numeri primi, ma di elencare tutti i numeri primi che siano minori di un prefissato numero.
Eratostene (Cirene, 276a.C. - Alessandria d'Egitto, 194 a.C.) è stato uno studioso della Grecia antica, esperto in molti settori differenti: matematica, astronomia, geografia e poesia. Bibliotecario della Biblioteca di Alessandria in Egitto, ha misurato per primo e con notevole precisione le dimensioni della Terra e disegnato delle accuratissime carte geografiche del Mediterraneo. A lui si deve l'usanza di datare gli eventi a partire dalla prima Olimpiade.

Il metodo proposto da Eratostene per individuare l'elenco dei numeri primi più piccoli è utilizzato anche attualmente, e si basa sulla seguente osservazione: ***Se un numero è primo, tutti i suoi multipli (diversi da lui) non possono essere primi.***
Il metodo procede come segue: partiamo dalla tabella con i numeri da 1 a 100. Procedendo analogamente, è possibile determinare l'elenco dei numeri primi minori di un qualsiasi prefissato numero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La tabella va letta partendo da in alto a sinistra, seguendo l'ordine crescente dei naturali.
L'elenco dei numeri primi si ottiene cancellando dall'elenco i numeri che non sono primi.
Cancelliamo 1 che non è un numero primo. Contorniamo con un cerchietto il numero 2 (ad esempio con il rosso) e cancelliamo tutti i suoi multipli (in figura, per cancellare coloriamo il quadretto).

[redacted]	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ora riprendiamo la tabella dall'inizio: il numero più piccolo che non è nè cerchiato nè cancellato è il 3; questo numero deve necessariamente essere primo (perché non c'è nessun numero più piccolo di lui che lo può dividere): lo si cerchia e si cancellano i suoi multipli maggiori di 3, osservando che alcuni multipli sono già stati cancellati, perché erano anche multipli di 2:

[redacted]	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ora il numero più piccolo che non è stato né cancella to né cerchiato è 5 (che non può essere composto, perché se avesse un divisore minore di lui e diverso da 5 sarebbe stato già cancellato).
Cerchiamo 5 e cancelliamo tutti i multipli maggiori di 5
Proseguiamo cerchiando il numero più piccolo che non è stato nè cerchiato nè cancellato, e cancellando i suoi multipli maggiori di lui.
Alla fine del lavoro, i numeri cerchiati sono i numeri primi entro il 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

I numeri primi sono infiniti
Questo risultato è stato dimostrato da Euclide [IX libro degli *Elementi*, proposizione 20]
Premettiamo una proposizione che riflette in modo più preciso sulla nozione di numero composto e sul ruolo dei numeri primi.
Proposizione: *ogni numero naturale diverso da 1 è divisibile per (almeno) un numero primo.*
dimostrazione: Il numero 0 è divisibile per ogni numero naturale, e quindi anche per un numero primo. Sia ora n un numero diverso da 0 e da 1. Se n è un primo, è divisibile per se stesso. Se, invece, n è composto, può essere scritto come prodotto
$n = h\ \ k$
ove h e k siano due numeri minori di n. Se h è un numero primo, abbiamo concluso la dimostrazione; se, invece, h non è un numero primo, allora h è un numero composto, e a sua volta è prodotto di due numeri più piccoli di lui:
$h = h_1\ k_1$ e quindi $n = h\ \ k = (\ h_1\ k_1\ )\ k = \ h_1\ (k_1\ \ k\ )$
e $h_1 < h < n$.
Se h_1 è un numero primo, abbiamo concluso la dimostrazione. Se h_1 è un numero composto, è possibile scomporlo ulteriormente come prodotto di fattori più piccoli di h_1 .
Il ragionamento può essere ripetuto, e, a ogni passo, i fattori diventano più piccoli: poiché ciascuno dei fattori coinvolti deve essere maggiore di 1, è possibile ripetere il ragionamneto solo un numero finito di volte, e dunque, ad un certo punto, si trova un divisore di n che sia un numero primo. ♦
Corollario: *ogni numero naturale diverso da 1 è prodotto di numeri primi, cioè*
(*) $$n = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \ldots\ldots \times q_t$$
per opportuni numeri primi q_1 , q_2 , q_3 , , … , q_t).

Una espressione della forma (*) è detta *fattorizzazione di n in fattori primi (o scomposizione in fattori primi)*. In *(*) non necessariamente i fattori primi sono diversi tra loro; è possibile che compaia solo un fattore primo, cioè che* $t=1$. Si osservi che *n è un numero primo se e solo se in (*) si ha* $t=1$.

Teorema (Euclide) *I numeri primi sono infiniti.*
dimostrazione La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi e scriviamone l'elenco completo: $p_1, p_2, ..., p_n$ (in questo elenco, ogni numero primo viene scritto una volta sola).:
Numeri primi = $\{ p_1, p_2, ..., p_n \}$
Definiamo ora un numero, che chiamiamo M, ottenuto sommando 1 al prodotto di tutti i numeri primi:
$M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$
Il numero M è maggiore di 1 (perché c'è almeno un numero primo) e diverso da tutti i numeri primi p_i (perchè maggiore di ciascun p_i : al prodotto dei numeri primi viene sommato 1).
Vi sono due possibilità per M: può essere primo o composto. Se M fosse primo avremmo una contraddizione: infatti abbiamo già osservato che M è diverso da ciascun p_i e quindi non può appartenere all'insieme dei numeri primi.
Allora M deve essere composto: ma allora dovrebbe avere un fattore primo d, che deve essere uno dei numeri primi p_i. Ma allora d divide sia M che il prodotto $p_1p_2 \cdots p_n$ (essendo uno dei numeri primi), e quindi deve dividere la loro differenza $M - p_1p_2 \cdots p_n = 1$, il che è impossibile. Quindi M non può essere né primo né composto: ma questo è assurdo.
Concludiamo che i numeri primi sono infiniti. ♦

Proposizione: *se un numero primo divide il prodotto di due numeri naturali, allora il numero primo divide almeno uno dei due fattori.*
In simboli: se n= ab con n, a, b numeri naturali e
p primo tale che $p \mid n= a\,b \Rightarrow p|a$ oppure $p|b$.
dimostrazione Sia p un fattore primo di ab . Se p è un divisore di a, la dimostrazione è completa.
Supponiamo che p non sia un divisore di a. Allora esiste un numero naturale k tale che $ab = k\,p$. Dal momento che p è primo e non è un divisore di a, sappiamo che a e p sono coprimi, cioè $MCD(a,p)=1$.
L'identità di Bézout assicura l'esistenza di due interi s e t tali che
$1 = s\,a + t\,p$.
Moltiplichiamo per b entrambi i membri, ottenendo
$b = b\,s\,a + b\,t\,p = (a\,b)\,s + b\,t\,p$
Ricordando che $ab = k\,p$, segue:
$b = (a\,b)\,s + b\,t\,p = k\,p\,s + b\,t\,p = p\,(k\,s + b\,t)$
Di conseguenza, p è un divisore di b.
Quindi p divide necessariamente a oppure b (o entrambi). ♦

Teorema fondamentale dell'aritmetica *Ogni numero naturale maggiore di 1 ammette una fattorizzazione come prodotto di fattori primi come in (*). Tale rappresentazione è unica, se non si prende in considerazione l'ordine in cui compaiono i fattori.*
L'enunciato del teorema asserisce l'esistenza di una fattorizzazione in numeri primi per ogni numero naturale, e successivamente la sua unicità.
L'esistenza è stata dimostrata in precedenza (una dimostrazione più precisa richiede il principio di induzione). La dimostrazione dell'unicità è facoltativa.

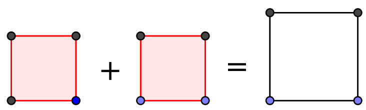
Numeri razionale e irrazionali

Riprendiamo ora lo studio degli insiemi numerici. Abbiamo già introdotto la nozione di numero razionale e di numero irrazionale:
Un **numero razionale** è un numero reale che può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n non nullo. Un numero x è quindi razionale esattamente quando, addizionandolo con se stesso un

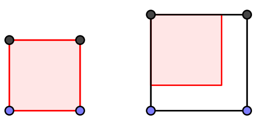
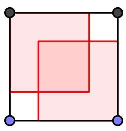
certo numero di volte, si può ottenere un numero intero: x è razionale se esistono numeri interi n e m (con n non nullo) tali $n\,x = m$.
L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$.
Un **numero irrazionale** è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n diverso da 0.
Il numero irrazionale che abbiamo già studiato con particolare attenzione è $\sqrt{2}$, che per il Teorema di Pitagora misura la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.
Mostriamo che $\sqrt{2}$ è effettivamente un numero irrazionale.

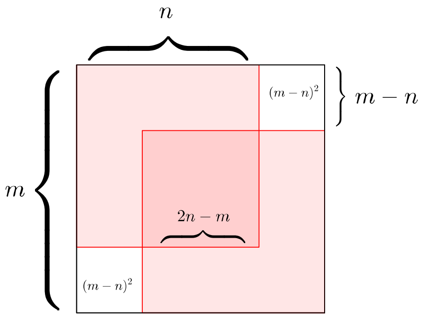
Proposizione: $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale*
Dimostrazione per assurdo
Si supponga per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero che esistano interi m, $n \neq 0$ tali che
$n\sqrt{2} = m$
Possiamo supporre che $m, n > 0$ e MCD(m,n)=1. Elevando al quadrato, troviamo che $2\,n^2 = m^2$.
Ne ricaviamo l'informazione che il numero m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero naturale dispari è sempre dispari, deduciamo che anche m è pari, cioè esiste un numero naturale k tale che $m = 2\,k$.
Sostituiamo questa uguaglianza in $2\,n^2 = m^2$ e ricaviamo che
$2\times n^2 = (2\,k)^2 = 2\times 2\times k^2$.
Dividendo per 2 entrambi i membri, osserviamo che
$n^2 = 2\times k^2$
e dunque n^2 è pari. Possiamo ragionare come prima e dedurne che anche n è pari. Sia m che n sono quindi pari, contro l'ipotesi iniziale che MCD(m,n)=1. Concludiamo che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, cioè è irrazionale. ♦

Dimostrazione geometrica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.
L'ipotesi assurda dell'esistenza di due numeri interi $m, n > 0$ tali che $n\sqrt{2} = m$, come abbiamo visto, comporta l'uguaglianza $2\,n^2 = m^2$, cioè l'esistenza di due numeri interi $m, n > 0$ tali che
$n^2 + n^2 = m^2$
Geometricamente, l'uguaglianza $n^2 + n^2 = m^2$ significa che l'area del quadrato di lato m è equivalente alla somma delle aree di due quadrati uguali di lato n (colorati in rosso in figura).



È perciò possibile trovare un quadrato con lato intero tale che il quadrato che ha il doppio della sua area abbia anch'esso lato intero. Ci si convince facilmente che, se una tale soluzione esiste, ce ne è una sola che ha la caratteristica di essere la più piccola possibile (cioè i due quadrati con lato intero sono i più piccoli con la proprietà che uno ha area doppia dell'altro). Prendiamo quindi questa soluzione minima.
Spostiamo, uno alla volta, i quadrati rossi cercando di coprire il quadrato bianco. Spostiamo il primo quadrato

 , e poi il secondo  .



Osservando con attenzione la figura ottenuta, notiamo che l'area dei due quadrati bianchi piccoli deve essere equivalente all'area del quadrato centrale più scuro (che corrisponde alla sovrapposizione tra i due quadrati spostati: tale sovrapposizione deve esistere necessariamente, perché altrimenti i quadrati rossi non coprirebbero il quadrato più grande). Il quadrato scuro centrale ha lato *m*- 2(*m*–*n*), intero e minore di *m*; i due quadratini bianchi hanno lato *m*–*n,* intero.
Dunque, abbiamo trovato un quadrato di lato intero più piccolo di *m*, che è il doppio di un quadrato di lato intero. Abbiamo una contraddizione, perché avevamo supposto che i quadrati di lato *m* e *n* fossero i più piccoli possibile con questa proprietà. Non era quindi possibile che questi quadrati esistessero, e $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Scrittura dei numeri razionale e irrazionali in forma decimale
Ricordiamo la definizione di numero razionale e di numero irrazionale:
Un ***numero razionale*** *è un numero reale che può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n non nullo.*
Un numero reale x è razionale se esistono numeri interi n e m (con n non nullo) tali $n\,x = m$. L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$. Esistono infiniti modi per rappresentare uno stesso numero razionale in forma di frazione; infatti $\frac{a}{b} = \frac{ha}{hb}$ per ogni numero intero non nullo h.
Un ***numero irrazionale*** *è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n diverso da 0.*

1 Rappresentazione decimale dei numeri reali
Siamo interessati alla rappresentazione in forma decimale dei numeri reali.
Ad esempio, sappiamo che

- $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0 + 5$ decimi $= 0 + 5\,\frac{1}{10}$; infatti, $2 \cdot 0{,}5 = 1$
- $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0 + 2$ decimi $+ 5$ centesimi $= 0 + 5\,\frac{1}{10} + 5\,\frac{1}{10^2}$; infatti, $4 \cdot 0{,}25 = 1$

Fissato un numero reale x, una sua **rappresentazione decimale** è una identità della forma
(*) $$x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \ldots..$$
ove

- a_0 è un numero intero
- $0 \le a_i \le 9$ per ogni naturale $i > 0$
- la notazione introdotta simboleggia una somma infinita

$$a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \ldots. = a_0 + a_1 \frac{1}{10} + a_2 \frac{1}{10^2} + a_3 \frac{1}{10^3} + a_4 \frac{1}{10^4} + a_5 \frac{1}{10^5} + a_6 \frac{1}{10^6} + \ldots$$

in cui è possibile che vari addendi siano nulli.
Il coefficiente a_0 è detto **parte intera**, mentre la sequenza $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \ldots$ è detta **parte decimale**. Quando la parte intera è nullo, si ha $0 \le x < 1$.
Il coefficiente a_1 è la cifra dei decimi, a_2 la cifra dei centesimi, a_3 la cifra dei millesimi.

Quando nella scrittura (*) compaiono solo un numero finito di addendi (cioè, da un certo indice in poi, tutti i coefficienti sono nulli), diciamo che la rappresentazione decimale è **limitata**. Altrimenti, la rappresentazione decimale è detta **illimitata**.
Esempio: $23{,}571 = 23 + 5\frac{1}{10} + 7\frac{1}{10^2} + 1\frac{1}{10^3}$
Esercizio: dimostra che

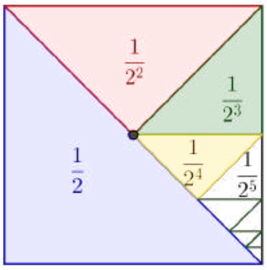
- $10x = (10\,a_0 + a_1), a_2 a_3 \ldots.$
- $100x = (100\,a_0 + 10\,a_1 + a_2), a_3 \ldots.$

$$a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \ldots. = a_0 + a_1 \frac{1}{10} + a_2 \frac{1}{10^2} + a_3 \frac{1}{10^3} + a_4 \frac{1}{10^4} + a_5 \frac{1}{10^5} + a_6 \frac{1}{10^6} + \ldots$$

Domande:

- quale è il significato della somma con infiniti termini?
- quali numeri hanno una rappresentazione limitata?
- è vero che ogni numero razionale può essere scritto in forma decimale?

Per quanto riguarda la somma di infiniti addendi, ripiegando un quadrato di carta abbiamo già visto nel primo semestre un esempio di somma con infiniti addendi, il cui valore complessivo sia 1.



$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$

Dedichiamoci ora allo studio della rappresentazione in forma decimale dei numeri razionali. Lo strumento essenziale per (mostrare l'esistenza e) determinare la rappresentazione decimale di un numero decimale $\frac{a}{b}$ è essenzialmente dato dallo svolgimento della divisione $a: b$; più precisamente, si tratta esattamente di dimostrare che tale divisione può essere operata con il consueto algoritmo.

Sicuramente non è necessario studiare i numeri interi, che coincidono con la propria parte intera. L'osservazione successiva illustra che è sufficiente studiare i numeri razionali tra 0 e 1.

Osservazione: Sia assegnata una frazione $\frac{a}{b}$ con a intero, b naturale non nullo.
- per studiare le rappresentazioni in forma decimale, possiamo supporre che MCD $(a, b) = 1$. Diremo che la frazione è **ridotta ai minimi termini**.
- se $a > 0$ e $a \geq b$, allora è possibile scrivere la frazione nella forma $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a'}{b'}$ con a_0, a', b' naturali tra loro coprimi e $a' < b'$
- se $a < 0$, allora $\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$; sommando ad essa un numero naturale sufficientemente grande, otteniamo una frazione con valore positivo. Possiamo quindi scrivere la frazione nella forma $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a'}{b'}$ con a_0 intero, a', b' naturali tra loro coprimi e $a' < b'$

Possiamo quindi limitarci a studiare la rappresentazione decimale di frazioni
(**) $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ **con** $\boldsymbol{0 < a < b}$ **e** $\boldsymbol{MCD(a, b) = 1}$ **.**

Tali frazioni rappresentano numeri $x = \frac{a}{b}$ con $0 < x < 1$.

Esercizio: Scrivere le seguenti frazioni nella forma $a_0 + \frac{a'}{b'}$ con a_0 intero, a', b' naturali e $a' < b'$

$\frac{9}{7}$; $-\frac{9}{7}$; $\frac{37}{12}$; $\frac{-25}{9}$

2 Frazioni decimali e rappresentazioni decimali limitate

Il seguente teorema mostra che solo alcuni particolari numeri razionali ammettono una rappresentazione in forma decimale limitata.
Ogni numero intero ammette una rappresentazione in forma decimale limitata.

Definizione Una frazione decimale è una frazione della forma $\frac{c}{10^k}$, con c intero, k naturale.

Esempi di frazioni decimali: $\frac{3}{10}, \frac{-4}{100}, \frac{3589}{1000}$

Osservazione: Una frazione $\frac{a}{b}$ con $0 < a < b$ e $MCD(a, b) = 1$ è equivalente a una frazione decimale se e solo se b è un divisore di 10^k per un opportuno numero naturale $k > 0$. Ciò accade se e solo se la fattorizzazione in primi del numero naturale b coinvolge unicamente i fattori 2 e 5, cioè $b = 2^s 5^t$ per opportuni numeri naturali $s, t \geq 0$.

Infatti, $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^k}$ se e solo se $10^k\, a = cb$. Poiché a e b sono coprimi, b deve dividere 10^k. In particolare, **se la fattorizzazione in primi di b coinvolge (con esponente non nullo) un fattore primo $p \neq 2, 5$, allora $\frac{a}{b}$ non è equivalente a una frazione decimale.**

Esempi di frazioni equivalenti a frazioni decimali: $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{6}{10}$, $\frac{7}{20} = \frac{7}{10\cdot 2} = \frac{7\cdot 5}{10\cdot 2\cdot 5} = \frac{35}{10^2}$

Esempi di frazioni non equivalenti a frazioni decimali: $\frac{3}{35} = \frac{3}{5\cdot 7}$; $\frac{5}{6} = \frac{5}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3}$

Esercizio: Stabilire quale, tra le seguenti frazioni, è equivalente a una frazione decimale e, quando esiste, ricavare una tale espressione: $\frac{1}{50}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{9}$

Sommando frazioni in forma decimale, si ottengono frazioni che possono essere espresse in forma decimale:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} = \frac{10\cdot 3 + 7}{10^2}$$

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + a_3\frac{1}{10^3} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} = \frac{a_0.10^3 + a_1.10^2 + a_2.10^1 + a_3.}{10^3}$$

Teorema Sia $x = \frac{a}{b}$ con $0 < a < b$ e $MCD(a, b) = 1$ un numero razionale. Il numero x ammette una rappresentazione decimale limitata se e solo se la frazione $\frac{a}{b}$ è equivalente a una frazione decimale, cioè se e solo se b è un divisore di 10^k per un opportuno numero naturale $k > 0$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare due implicazioni.

- Iniziamo supponendo che numero x ammette una rappresentazione decimale limitata; vogliamo mostrare che la frazione $\frac{a}{b}$ è equivalente a una frazione decimale.
  Per ipotesi, posso scrivere la frazione nella forma
  $$\frac{a}{b} = 0, a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_n = a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + a_3\frac{1}{10^3} + \cdots + a_n\frac{1}{10^n}$$
  Svolgendo la somma, si ottiene la tesi
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \ldots\ldots + 10\, a_{n-1}. + a_n}{10^n}$$
- Ora supponiamo che la frazione $\frac{a}{b}$ sia equivalente a una frazione decimale. Vogliamo dimostrare che il numero $x = \frac{a}{b}$ ammette una rappresentazione decimale limitata.
  Per ipotesi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^k}$ con c, k naturali. Esprimiamo il numeratore c in forma polinomiale decimale (in modo da ottenerne la scrittura in forma decimale come numero naturale):
  $$c = c_n.10^n + c_{n-1}.10^{n-1} + c_{n-2}.10^{n-2} + \ldots\ldots + 10\, c_1. + c_0$$
  e inseriamo l'espressione ottenuta nella frazione
  $$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^k} = \frac{c_n.10^n + c_{n-1}.10^{n-1} + c_{n-2}.10^{n-2} + \ldots\ldots + 10\, c_1. + c_0}{10^k} =$$
  $$= \frac{c_n.10^n}{10^k} + \frac{c_{n-1}.10^{n-1}}{10^k} + \frac{c_{n-2}.10^{n-2}}{10^k} + \cdots + \frac{10\, c_1.}{10^k} + \frac{c_0}{10^k} =$$
  $$= \frac{c_n.}{10^{k-n}} + \frac{c_{n-1}.}{10^{k-n+1}} + \frac{c_{n-2}.}{10^{k-n+2}} + \cdots + \frac{c_1.}{10^{k-1}} + \frac{c_0}{10^k}$$
  Poiché $\frac{a}{b} < 1$, si ha $n < k$ e l'espressione trovata fornisce una rappresentazione decimale, come si voleva.

Esercizi: Determinare una rappresentazione decimale limitata per ciascuno dei seguenti numeri:

$\frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}$, $\frac{3}{10} + \frac{53}{10^2}$, $\frac{3}{10} + \frac{57}{10^3} + \frac{11}{10^6}$

Determinare una frazione decimale equivalente per ciascuno dei seguenti numeri:

347,652 12,6457 0,70034

3 Scrittura in forma decimale di un numero razionale non esprimibile come frazione decimale

La **lunghezza** di una sequenza di cifre è il numero di cifre che in essa compaiono (contando più volte la stessa cifra, se essa compare più volte)
Esempio: la sequenza 87994322 ha lunghezza 8

Talora, la forma decimale $a_0, a_1a_2a_3a_4a_5$ .... di un numero è composta, a partire da un certo indice, da una sequenza di lunghezza finita e non nulla di cifre che si ripete infinite volte. Una tale sequenza di lunghezza minima è detto **periodo**, mentre l'espressione prende il nome di **rappresentazione decimale (illimitata e) periodica**. Per semplificare la lettura della forma decimale, si scrive il periodo soprassegnato da una linea: con ciò si intende che il periodo va ripetuto infinite volte.
In una rappresentazione decimale periodica, la parte decimale può

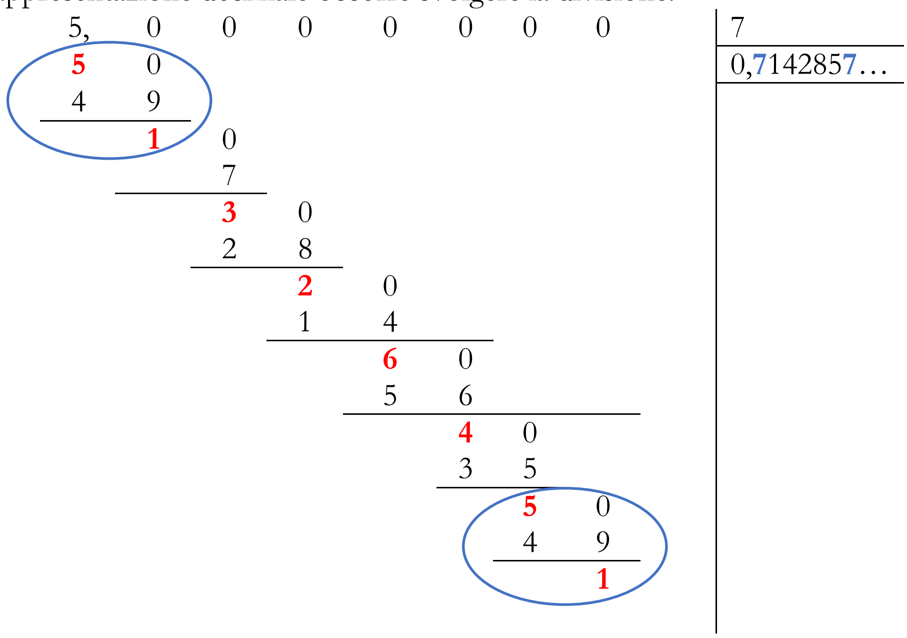
- essere interamente descritta dal ripetersi del periodo (e in tal caso la rappresentazione è detta **semplice**), oppure
- comprendere alcune cifre più a sinistra della parte descritta dal ripetersi del periodo (in tale caso, la rappresentazione è detta **mista** e la sequenza di cifre compresa tra la virgola e il primo comparire del periodo è detta **antiperiodo**)

Ad esempio:
$0,\overline{6} = 0{,}666666666666\ldots$ .... periodica semplice, periodo 6 di lunghezza 1
$45779{,}24\overline{3058} = 45779{,}243058305830583058\ldots$ periodica mista, periodo 3058 di lunghezza 4, antiperiodo 24

Come determinare una rappresentazione decimale?
Iniziamo studiando un esempio. Consideriamo la frazione $\frac{5}{7}$ e proviamo a determinarne una rappresentazione decimale. Vogliamo quindi trovare una espressione della forma

$$\frac{5}{7} = a_0, a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

Ricordiamo che la frazione indica un rapporto, cioè il risultato di una divisione. Per determinare i coefficienti della rappresentazione decimale occorre svolgere la divisione:



Il dividendo 5 va scritto nella forma 5, 0000…. ; le cifre 0 nella parte decimale vengono coinvolte una alla volta, per svolgere le divisioni parziali (che sono divisioni euclidee) tramite le quali si determinano, una alla volta, le cifre decimali del risultato: ogni volta che 'si abbassa uno 0' per continuare la divisione, si ottiene l'effetto di moltiplicare per 10 il resto della divisione parziale precedente. Nella rappresentazione materiale della divisione, ciò corrisponde al fatto che il resto parziale viene 'scambiato' suddividendolo in parti: una decina viene scambiata con 10 centesimi, un centesimo viene scambiato con 10 millesimi, …

Nella divisione, sono colorati di rosso i resti parziali e sono cerchiati in blu due divisioni parziali che risultano uguali perché operate a partire dallo stesso resto parziale 5: il quoziente parziale è 7 in entrambi i casi, e il resto parziale è 1 in entrambi i casi: è inutile proseguire ulteriormente la divisione, perché d'ora il poi si ripeteranno in ciclo le divisioni parziali operate dalla prima divisione cerchiata. Possiamo quindi concludere che $\frac{5}{7}$ ammette una rappresentazione decimale periodica semplice, e tale rappresentazione decimale è

$$\frac{5}{7} = 0,\overline{\overline{714285}}$$

Riflettiamo sulle difficoltà incontrate nell'operare la divisione 5:7

- non è inizialmente chiaro quante divisioni parziali sono necessarie (a priori, potrebbero servire infinite divisioni);
- è complesso seguire l'allineamento delle divisioni parziali.

Cerchiamo quindi un metodo per gestire in modo più ordinato le divisioni parziali e cercare di prevederne il numero.

Invece di scrivere in colonna la divisione 5:7, scriviamo la lista delle divisioni parziali operate, con il relativo quoziente: le cifre della rappresentazione decimale di $\frac{5}{7}$ si ottengono leggendo dall'alto al basso la colonna dei quozienti.
Per facilitare la generalizzazione della procedura, riportiamo nell'ultima colonna una espressione letterale che illustra le divisioni parziali operate

5:7	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**	**espressione letterale**
	$5 = 0 \cdot 7 + 5$	0	$a = q_0 \cdot b + r_0$
	$50 = 7 \cdot 7 + 1$	7	$10 \cdot r_0 = q_1 \cdot b + r_1$
	$10 = 1 \cdot 7 + 3$	1	$10 \cdot r_1 = q_2 \cdot b + r_2$
	$30 = 4 \cdot 7 + 2$	4	$10 \cdot r_2 = q_3 \cdot b + r_3$
	$20 = 2 \cdot 7 + 6$	2	$10 \cdot r_3 = q_4 \cdot b + r_4$
	$60 = 8 \cdot 7 + 4$	8	$10 \cdot r_4 = q_5 \cdot b + r_5$
	$40 = 5 \cdot 7 + 5$	5	$10 \cdot r_5 = q_6 \cdot b + r_6$

Osserviamo che, ad ogni passo,

- il divisore è sempre b
- il dividendo è il resto della divisione precedente, moltiplicato per 10
- il quoziente ottenuto è un coefficiente della rappresentazione decimale

La tabella può quindi essere riempita ricorsivamente: ad ogni passo la divisione parziale da svolgere svolta dipende solo dal resto della divisione precedente. Ma i resti possibili sono solo le cifre 0, 1, 2, …, $b - 1 = 6$, e il resto 0 non si può ottenere, perché altrimenti $\frac{5}{7}$ ammetterebbe una rappresentazione decimale limitata.
Dunque, dopo al più $b - 1 = 6$ divisioni devo ritrovare un resto che avevo già trovato. Da quel passo in poi, le divisioni si ripetono formando un ciclo (e i relativi quozienti formano le cifre di un periodo).
La procedura si può generalizzare a ogni frazione non equivalente a una frazione decimale. Il teorema seguente illustra il caso delle frazioni comprese tra 0 e 1, ma la dimostrazione vale nel caso generale.

Teorema Sia $\frac{a}{b}$ con $0 < a < b$, un numero razionale non equivalente ad una frazione decimale.
Il numero razionale $\frac{a}{b}$ ha una rappresentazione decimale illimitata e periodica, con periodo di lunghezza al più $b-1$.

Dimostrazione. Sia $\frac{a}{b}$ con $0 < a < b$, un numero razionale non equivalente ad una frazione decimale. Mostriamo che esso ammette una rappresentazione decimale periodica, con periodo di lunghezza ≤ $b-1$. Consideriamo la successione di divisioni (parziali) euclidee (con resto minore del divisore).

$$a = q_0 \cdot b + r_0$$
$$10 \cdot r_0 = q_1 \cdot b + r_1$$
$$10 \cdot r_1 = q_2 \cdot b + r_2$$
$$10 \cdot r_2 = q_3 \cdot b + r_3$$
$$10 \cdot r_3 = q_4 \cdot b + r_4$$
…….
$$10 \cdot r_{h-1} = q_h \cdot b + r_h$$
$$10 \cdot r_h = q_{h+1} \cdot b + r_{h+1}$$
……

Si ha
$$\frac{a}{b} = q_0, q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_h \ldots\ldots$$
In tali divisioni, il resto non è mai nullo (altrimenti la frazione avrebbe una rappresentazione decimale limitata). I resti possibili per le divisioni parziali sono solo le cifre 1, 2, ..., $b-1$.
Dunque, dopo al più $b-1$ divisioni parziali, si ritrova un resto già ottenuto come resto in una precedente divisione parziale. Da quel passo in poi, le divisioni si ripetono formando un ciclo (e i relativi quozienti formano le cifre di un periodo, avente lunghezza massima $b-1$).

Esempio: Verificare che

- $\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$

4:3	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$4 = 1 \cdot 3 + \mathbf{1}$	1
	$10 = 3 \cdot 3 + \mathbf{1}$	3

- $\frac{4}{9} = 0,\overline{4}$

4:9	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$5 = 0 \cdot 9 + \mathbf{4}$	0
	$40 = 4 \cdot 7 + \mathbf{4}$	4

- $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$

4:7	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$4 = 0 \cdot 7 + \mathbf{4}$	0
	$40 = 5 \cdot 7 + 5$	**5**
	$50 = 7 \cdot 7 + 1$	**7**

	$10 = 1 \cdot 7 + 3$	**1**
	$30 = 4 \cdot 7 + 2$	**4**
	$20 = 2 \cdot 7 + 6$	**2**
	$60 = 8 \cdot 7 + 4$	**8**

Riassumendo: ogni numero razionale $x = \frac{a}{b}$ ammette una rappresentazione decimale

- che coincide con la parte intera se x è un numero intero
- limitata se $\frac{a}{b}$ è equivalente a una frazione decimale
- illimitata e periodica nei casi rimanenti

Per deteminare i coefficienti della rappresentazione decimale, si opera la divisione $a{:}\,b$.
Se nell'algoritmo di calcolo, una divisione parziale presenta un resto 0, allora $x = \frac{a}{b}$ è intero oppure ha una rappresentazione decimale limitata e può essere rappresentato da una frazione decimale.
Altrimenti, dopo al più $b-1$ divisioni parziali, si trova un resto parziale già ricavato come resto in una precedente divisione parziale, e si ricava il periodo.

Ulteriore riflessione sulla procedura per la determinazione della rappresentazione decimale di un numero razionale

Riprendiamo l'esempio dello studio della rappresentazione decimale di $x = \frac{5}{7}$, sempre affiancando una descrizione letterale allo svolgimento numerico. Ricordiamo che stiamo cercando i coefficienti che verificano una identità della forma

(■) $$\frac{5}{7} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{a_5}{10^5} + \frac{a_6}{10^6} + \ldots$$

Riprendiamo la tavola delle divisioni euclidee parziali, e procediamo dividendo per b ambo i membri; a partire dalla seconda divisione parziale dividiamo anche per 10:

5:7	espressione numerica delle divisioni parziali	si divide per b e, dalla seconda divisione, anche per 10	espressione letterale	si divide per b e, dalla seconda divisione, anche per 10
(§)	$5 = 0 \cdot 7 + 5$	$\frac{5}{7} = \mathbf{0} + \frac{5}{7}$	$a = q_0 \cdot b + r_0$	$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$
	$50 = 7 \cdot 7 + 1$	$\frac{5}{7} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{7}$	$r_0 = q_1 \cdot b + r_1$	$\frac{r_0}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{b}$
	$10 = 1 \cdot 7 + 3$	$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7}$	$10 \cdot r_1 = q_2 \cdot b + r_2$	$\frac{r_1}{b} = \frac{q_2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_2}{b}$
	$30 = 4 \cdot 7 + 2$	$\frac{3}{7} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7}$	$10 \cdot r_2 = q_3 \cdot b + r_3$	$\frac{r_2}{b} = \frac{q_3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_3}{b}$
	$20 = 2 \cdot 7 + 6$	$\frac{2}{7} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{7}$	$10 \cdot r_3 = q_4 \cdot b + r_4$	$\frac{r_3}{b} = \frac{q_4}{10} + \frac{r_4}{b}$
	$60 = 8 \cdot 7 + 4$	$\frac{6}{7} = \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{7}$	$10 \cdot r_4 = q_5 \cdot b + r_5$	$\frac{r_4}{b} = \frac{q_5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_5}{b}$

	$40 = 5 \cdot 7 + 5$	$\frac{4}{7} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$	$10 \cdot r_5 = q_6 \cdot b + r_6$	$\frac{r_5}{b} = \frac{q_6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_6}{b}$

Ora partiamo dalla prima equazione della terza colonna (l'ultima colonna per l'espressione letterale), sostituiamo uno alla volta i contenuti delle righe successive e poi applicando la proprietà distributiva. Uno alla volta, compaiono gli addendi della rappresentazione decimale, che sono evidenziati con il colore giallo.

$\frac{5}{7}$	$=$	$0 + \frac{5}{7}$	$\frac{a}{b}$	$=$	$q_0 + \frac{r_0}{b}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{7}$		$=$	$0 + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{7}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot (\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7}) =$ $= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{3}{7} =$		$=$	$q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{r_2}{b}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot (\frac{4}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7}) =$ $= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3} \cdot \frac{2}{7}$		$=$	$q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{1}{10^3} \cdot \frac{r_3}{b}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3} \cdot \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{7}\right) =$ $= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{6}{7}$		$=$	$q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{q_4}{10^4} + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{r_4}{b}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^4} \cdot \left(\frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{7}\right)$ $= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{1}{10^5} \cdot \frac{4}{7}$		$=$	$q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{q_4}{10^4} + \frac{q_5}{10^5} + \frac{1}{10^5} \cdot \frac{r_5}{b}$
	$=$	$0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{1}{10^5} \cdot (\frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7})$ $= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{1}{10^6} \cdot \frac{5}{7}$		$=$	$q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{q_4}{10^4} + \frac{q_5}{10^5} + \frac{q_6}{10^6} + \frac{1}{10^6} \cdot \frac{r_6}{b}$

4 Frazioni generatrici e rappresentazioni decimali periodiche

Viceversa, **ogni numero che può essere rappresentato in forma decimale periodica è un numero razionale.**

La dimostrazione di tale risultato viene svolta identificando esplicitamente una frazione equivalente al numero assegnato; tale frazione prende il nome di **frazione generatrice**.

Sia $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots a_h \overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$ un numero che può essere rappresentato in forma decimale periodica, con periodo di lunghezza k. A sua volta, la parte intera a_0 può essere scritto in forma decimale evidenziandone le cifre decimali $a_0 = i_1 i_2 i_3 \dots \dots i_n$ con $0 \leq i_j \leq 9$; si è indicato con n la lunghezza della rappresentazione decimale di a_0 . Ricaviamo l'espressione completa della rappresentazione decimale di x

$$x = i_1i_2i_3 \ldots\ldots i_n, a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_h\overline{p_1p_2 \ldots . p_k} \quad \text{in cui}$$

- $a_0 = i_1i_2i_3 \ldots\ldots i_n$ la parte intera di lunghezza n e $0 \le i_j \le 9$
- $a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_h$ l'antiperiodo di lunghezza h , con $h = 0$ se la rappresentazione è semplice, e $0 \le a_j \le 9$
- $p_1p_2 \ldots . p_k$ il periodo di lunghezza k e $0 \le p_j \le 9$

Con le notazioni precedenti, la **frazione generatrice** del numero x è la frazione che ha

- per numeratore la differenza tra il numero naturale composto da tutte le cifre (con il periodo scritto una volta sola) e il numero naturale composto da tutte le cifre a sinistra del periodo
- come denominatore un numero composto da k(=lunghezza del periodo) cifre uguali a 9 e h(=lunghezza dell'antiperiodo) cifre uguali a 0 (nessuna cifra 0 nel caso periodico semplice)

$$\frac{i_1i_2i_3 \ldots\ldots i_n\ a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_hp_1p_1p_2 \ldots . p_k - i_1i_2i_3 \ldots\ldots i_n\ a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_h}{\underbrace{999 \ldots .99}_{\boxed{k \text{ cifre } 9}}\underbrace{00..00}_{\boxed{h \text{ cifre } 0}}}$$

Dimostreremo che la frazione generatrice rappresenta il numero x, che risulta dunque essere razionale. I numeri irrazionali (per i quali omettiamo la dimostrazione dell'esistenza di una rappresentazione decimale) sono quindi caratterizzati dall'avere una rappresentazione decimale illimitata e non periodica.

Non si richiede di imparare a memoria l'espressione della frazione generatrice, ma di saper operativamente determinare una frazione equivalente ad una rappresentazione decimale posizionale assegnata.

Per questo motivo, per meglio esemplificare la procedura. Discuteremo separatamente il caso periodico semplice e quello misto, e per ciascuno di essi saranno presentati sottocasi in ordine di complessità:

- caso periodico semplice
    a. il caso periodico semplice con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1
    b. il caso periodico semplice con periodo di lunghezza 1
    c. il caso periodico semplice con parte intera nulla e periodo di lunghezza k
    d. il caso periodico semplice con periodo di lunghezza k
- caso periodico misto
    e. il caso periodico misto con parte intera nulla e antiperiodo di lunghezza
    f. il caso periodico misto con antiperiodo di lunghezza h

Sarebbe stato sufficiente trattare direttamente il caso generale: si sottolinea che la casistica utilizzata va intesa non come una casistica da memorizzare, ma come una esemplificazione e una introduzione da esempi più semplici a esempi più articolati.

- **Frazione generatrice nel caso periodico semplice**

a. caso periodico semplice con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1

$$y = 0,\overline{p_1}$$

Svolgiamo un esempio numerico parallelamente all'espressione letterale

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1	$y = 0,\overline{4}$	$y = 0,\overline{p_1}$
moltiplico per 10 entrambi i membri	$10y = 4,\overline{4}$ $= 4 + 0,\overline{4}$ $= 4 + y$	$10y = p_1,\overline{p_1} = p_1 + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10y = 4 + y$	$10y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$9y = 4$	$9y = p_1$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{4}{9}$	$y = \frac{p_1}{9}$

=

b. caso periodico semplice con periodo di lunghezza 1

$$x = a_0,\overline{p_1}$$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con periodo di lunghezza 1	$x = 321,\overline{4}$	$x = a_0,\overline{p_1}$
sottraggo a x la parte intera per ottenere un numero periodico semplice con periodo di lunghezza 1 e parte intera nulla (come ne caso già trattato) **Per completezza, riportiamo i passi che già sappiamo fare**	$y = x - 321$ $= 0,\overline{4}$	$y = x - a_0$ $= 0,\overline{p_1}$
moltiplico per 10 entrambi i membri che esprimono y	$10y = 4,\overline{4}$ $= 4 + 0,\overline{4}$ $= 4 + y$	$10y = p_1,\overline{p_1} = p_1 + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10y = 4 + y$	$10y = p_1 + y$

identico al caso precedente: li posso omettere se passo direttamente al risultato

raccolgo al primo membro i termini in y	$9y = 4$	$9y = p_1$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{4}{9}$	$y = \frac{p_1}{9}$
sostituisco l'espressione di y nei termini di x	$x - 321 = \frac{4}{9}$	$x - a_0 = \frac{p_1}{9}$
metto in evidenza x e trovo una sua espressione in forma di frazione	$x = 321 + \frac{4}{9} = \frac{321 \cdot 9 + 4}{9}$ $\frac{321 \cdot (10-1) + 4}{9} = \frac{3214 - 321}{9}$	$x = a_0 + \frac{p_1}{9} = \frac{9 \cdot a_0 + p_1}{9}$

c. caso periodico semplice con parte intera nulla, con periodo di lunghezza *k*

$$y = 0,\overline{p_1 p_2 \ldots . p_k}$$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1	$y = 0,\overline{456}$	$y = 0,\overline{p_1 p_2 \ldots . p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	$10^3 y = 456,\overline{456}$ $= 456 + 0,\overline{456}$ $= 456 + y$	$10^k y$ $= p_1 p_2 \ldots . p_k,\overline{p_1 p_2 \ldots . p_k}$ $= p_1 p_2 \ldots . p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^3 y = 456 + y$	$10^k y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^3 - 1)y = 456$	$(10^k - 1)y = p_1 p_2 \ldots . p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{456}{(10^3 - 1)}$	$y = \frac{p_1 p_2 \ldots . p_k}{(10^k - 1)}$

d. caso periodico semplice con periodo di lunghezza *k*

$$x = a_0,\overline{p_1 p_2 \ldots . p_k}$$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con periodo di lunghezza k	$x = 3012,\overline{456}$	$x = a_0,\overline{p_1 p_2 \ldots . p_k}$

sottraggo a x la parte intera per ottenere un numero periodico semplice con periodo di lunghezza k e parte intera nulla (come ne caso già trattato) **Per completezza, riportiamo i passi che già sappiamo fare**	$y = x - 3012$ $= 0,\overline{456}$	$y = x - a_0$ $= 0,\overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	$10^3 y = 456,\overline{456}$ $= 456 + 0,\overline{456}$ $= 456 + y$	$10^k y$ $= p_1 p_2 \dots . p_k,\overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$ $= p_1 p_2 \dots . p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^3 y = 456 + y$	$10^k y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^3 - 1)y = 456$	$(10^k - 1)y = p_1 p_2 \dots . p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$y = \dfrac{p_1 p_1 p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$
sostituisco l'espressione di y nei termini di x	$x - 3012 = \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$x - a_0 = \dfrac{p_1 p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$
metto in evidenza x e trovo una sua espressione in forma di frazione	$x = 3012 + \frac{456}{(10^3-1)} = = \frac{3012 \cdot (10^3-1)+456}{999}$ $= \frac{3012000 \cdot -3012+456}{999}$ $= \frac{3012456-3012}{999}$	$x = a_0 + \frac{p_1 p_2 \dots p_k}{(10^k-1)} = \frac{10^k a_0 + p_1 p_2 \dots p_k - a_0}{(10^k-1)}$

- ## Frazione generatrice nel caso periodico misto

   e. **caso periodico misto con parte intera nulla, con antiperiodo di lunghezza *h* e periodo di lunghezza *k***

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots . a_h \overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1	$z = 0,89\overline{456}$	$z = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots . a_h \overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$
moltiplico per 10^h entrambi i membri, e ottengo y	$x = 10^2 \cdot z$ $= 89,\overline{456}$	$y = 10^h \cdot z = a_1 a_2 a_3 \dots \dots . a_h, \overline{p_1 p_2 \dots . p_k}$

periodico semplice (che so trattare) **Per completezza, riportiamo i passi**		
sottraggo a x la parte intera (che è l'antiperiodo di z) per ottenere un numero y periodico semplice con periodo di lunghezza k e parte intera nulla	$y = x - 89$ $= 0,\overline{456}$	$y = x - a_1a_2a_3 \dots\dots a_h = 0,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	10^3y $= 456,\overline{456}$ $= 456 + 0,\overline{456}$ $= 456 + y$	$10^k y = p_1p_2 \dots . p_k,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$ $= p_1p_2 \dots . p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^3y = 456 + y$	$10^k y = p_1p_2 \dots . p_k + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^3 - 1)y$ $= 456$	$(10^k - 1)y = p_1p_2 \dots . p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$y = \dfrac{p_1p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$
ritrovo x sommando a y l'antiperiodo	x $= 89$ $+ \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$x = a_1a_2a_3 \dots\dots a_h + \dfrac{p_1p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$
ricavo il valore di z dividendo y per 10^h : ora z è espresso tramite una frazione	$z = \dfrac{x}{10^2}$ $= \dfrac{89}{10^2} + \dfrac{456}{10^2(10^3 - 1)}$ $= \dfrac{(10^3 - 1)\cdot 89 + 456}{10^2(10^3 - 1)}$ $= \dfrac{10^3 \cdot 89 - 89 + 456}{10^2(10^3 - 1)}$ $= \dfrac{89000 - 89 + 456}{10^2(10^3 - 1)}$ $= \dfrac{89456 - 89}{10^2(10^3 - 1)}$	$z = \dfrac{x}{10^h}$ $= \dfrac{a_1a_2a_3 \dots\dots a_h}{10^h} + \dfrac{p_1p_1p_2 \dots . p_k}{10^h \cdot (10^k - 1)}$ $= \dfrac{(a_1a_2a_3 \dots\dots a_h) \cdot (10^k - 1) + p_1p_1p_2 \dots . p_k}{10^h \cdot (10^k - 1)}$ $= \dfrac{(a_1a_2a_3 \dots\dots a_h) \cdot 10^k - (a_1a_2a_3 \dots\dots a_h) + p_1p_1p_2 \dots . p_k}{10^h \cdot (10^k - 1)}$
$10^k - 1 = 99..99$ con k cifre uguali a 9, mentre $10^h \cdot (10^k - 1)$ $= 999..9900..00$ ha k cifre uguali a 9 e h cifre uguali a 0	$z = \dfrac{89456 - 89}{99900}$	

f. il caso periodico misto con antiperiodo di lunghezza *h* e periodo di lunghezza *k*

$$w = a_0, a_1a_2a_3 \dots\dots a_h\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con periodo di lunghezza 1	$w = 1237,89\overline{456}$	$x = a_0, a_1a_2a_3 \dots\dots a_h\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$

sottraggo a w la parte intera per ottenere un numero z periodico misto con parte intera nulla (come nel caso già trattato) **Per completezza, riportiamo i passi in dettaglio**	$z = w - 1237$ $= 0,89\overline{456}$	$z = w - a_0$ $= 0,a_1a_2a_3 \dots\dots a_h\overline{p_1p_2 \dots p_k}$
moltiplico per 10^h entrambi i membri, per ottenere un numero x periodico semplice	$x = 10^2 \cdot z = 89,\overline{456}$	$x = 10^h \cdot z$ $= a_1a_2a_3 \dots\dots a_h,\overline{p_1p_2 \dots p_k}$
sottraggo a x la parte intera (che è l'antiperiodo di z) per ottenere un numero y periodico semplice con parte intera nulla	$y = x - 89$ $= 0,\overline{456}$	$y = x - a_1a_2a_3 \dots\dots a_h$ $= 0,\overline{p_1p_2 \dots p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	$10^3y = 456,\overline{456}$ $= 456 + 0,\overline{456}$ $= 456 + y$	$10^ky = p_1p_2 \dots p_k,\overline{p_1p_2 \dots p_k}$ $= p_1p_2 \dots p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^3y = 456 + y$	$10^ky = p_1p_2 \dots p_k + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^3 - 1)y = 456$	$(10^k - 1)y = p_1p_2 \dots p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$y = \dfrac{p_1p_2 \dots p_k}{(10^k - 1)}$
ritrovo x sommando a y l'antiperiodo	$x = 89 + \dfrac{456}{(10^3 - 1)}$	$x = a_1a_2a_3 \dots\dots a_h + \dfrac{p_1p_2 \dots p_k}{(10^k - 1)}$
ricavo il valore di z dividendo y per 10^h . Ora z è espresso tramite una frazione	$z = \dfrac{x}{10^2} =$ $= \dfrac{89}{10^2} + \dfrac{456}{10^2(10^3 - 1)}$	$z = \dfrac{x}{10^h} =$ $= \dfrac{a_1a_2a_3 \dots\dots a_h}{10^h} + \dfrac{p_1p_2 \dots p_k}{10^h(10^k - 1)}$
Ricordo la relazione $z = w - a_0$; sommando a z la parte intera di w , posso riottenere w Trovo una sua espressione in forma di frazione	$w = 1237 + \dfrac{89}{10^2} + \dfrac{456}{10^2(10^3 - 1)}$ $= \dfrac{(10^5 - 10^2)1237}{10^2(10^3 - 1)} + \dfrac{(10^3 - 1)89}{10^2}$ $+ \dfrac{456}{10^2(10^3 - 1)} =$ $\dfrac{(123700000 - 123700 + 89000 - 89 + 456}{(10^5 - 10^2)}$ $= \dfrac{123789456 - 123789}{99900}$	$w = a_0 + \dfrac{a_1a_2a_3 \dots\dots a_h}{10^h} + \dfrac{p_1p_2 \dots p_k}{10^h(10^k - 1)}$

Esercizi relativi alla scrittura dei numeri razionali in forma decimale

1) Per ciascuna delle seguenti frazioni, discutere se la relativa rappresentazione decimale è limitata o illimitata e poi determinare esplicitamente la rappresentazione decimale

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{11}{25}$ c) $\frac{287}{40}$ d) $\frac{347}{12}$ e) $\frac{542}{13}$

Cenni di soluzione

a. $\frac{7}{3}$ è ridotta ai minimi termini e ha denominatore 3 che non è un divisore di una potenza di 10, e dunque tale frazione ha rappresentazione illimitata periodica, con parte intera non nulla perché $\frac{7}{3} > 1$. Per determinare tale rappresentazione, opero la divisione 7:3 fino a ritrovare un resto già ottenuto in precedenza (mi aspetto al più 6 divisioni)

7:3	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$7 = 2 \cdot 3 + \mathbf{1}$	2
	$10 = 3 \cdot 3 + \mathbf{1}$	**3**

Considerando i quozienti parziali ottenuti, ricavo la rappresentazione decimale cercata:[1]

$$\frac{7}{3} = 2,\bar{3}$$

b. $\frac{11}{25}$ è ridotta ai minimi termini e ha denominatore $25 = 5 \cdot 5$ che divide 10^2; quindi ha una rappresentazione decimale limitata (con parte intera nulla perché $\frac{11}{25} < 1$). Moltiplico numeratore e denominatore per 2^2, in modo da ottenere una frazione equivalente che sia decimale. Poi ricavo la rappresentazione decimale.

$\frac{11}{25} = \frac{11 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{44}{100} = 0{,}44$

c. $\frac{287}{80}$ è ridotta ai minimi termini e ha denominatore $80 = 10 \cdot 2^3$ che divide 10^4, e quindi ha una rappresentazione decimale limitata (con parte intera non nulla perché $\frac{287}{80} > 1$. Moltiplico numeratore e denominatore per 5^3, in modo da ottenere una frazione equivalente che sia decimale. Poi ricavo la rappresentazione decimale.

$\frac{287}{80} = \frac{287 \cdot 5^3}{10 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = \frac{35875}{10^4} = 3{,}5875$

[1] si poteva calcolare la rappresentazione decimale studiando separatamente la parte intera:
Per determinare tale rappresentazione, opero la divisione 7:3 per determinare la parte intera:

$$7 = 2 \cdot 3 + \mathbf{1}$$

e scrivere la frazione come somma della sua parte intera e della parte frazionaria:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

Ora determino la rappresentazione decimale di $\frac{1}{3}$ operando la divisione 1:3 fino a che ritrovo un resto già ottenuto in precedenza, e ricavo che $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$

1:3	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$1 = 0 \cdot 3 + \mathbf{1}$	0
	$10 = 3 \cdot 3 + \mathbf{1}$	**3**

Sommando la parte intera, ottengo che

$\frac{7}{3} = 2,\bar{3}$

d. $\frac{347}{12}$ è ridotta ai minimi termini e ha denominatore $12 = 2^2 \cdot 3$ che non è un divisore di una potenza di 10, e dunque tale frazione ha rappresentazione illimitata periodica, con parte intera non nulla perché $\frac{347}{12} > 1$. Per determinare tale rappresentazione, opero la divisione 347:12 fino a ritrovare un resto già ottenuto in precedenza (mi aspetto al più 11 divisioni)

347:12	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$347 = 28 \cdot 12 + 11$	28
	$110 = 9 \cdot 12 + 2$	**9**
	$20 = 1 \cdot 12 + \mathbf{8}$	**1**
	$80 = 6 \cdot 12 + \mathbf{8}$	**6**

Considerando i quozienti parziali ottenuti, si ricava la rappresentazione decimale cercata, con periodo 6 di lunghezza 1, antiperiodo 91 di lunghezza 2

$$\frac{347}{12} = 28{,}91\overline{6}$$

e. $\frac{542}{13}$ è ridotta ai minimi termini e ha denominatore 13 che non è un divisore di una potenza di 10, e dunque tale frazione ha rappresentazione illimitata periodica, con parte intera non nulla perché $\frac{542}{13} > 1$. Per determinare tale rappresentazione, opero la divisione 542:13 fino a ritrovare un resto già ottenuto in precedenza (mi aspetto al più 12 divisioni)

542:13	**espressione numerica delle divisioni parziali**	**quoziente della divisione parziale**
	$542 = 41 \cdot 13 + \mathbf{9}$	41
	$90 = 6 \cdot 13 + 12$	**6**
	$120 = 9 \cdot 13 + 3$	**9**
	$30 = 2 \cdot 13 + 4$	**2**
	$40 = 3 \cdot 13 + 1$	**3**
	$10 = 0 \cdot 13 + 10$	**0**
	$100 = 7 \cdot 13 + \mathbf{9}$	**7**

Considerando i quozienti parziali ottenuti, si ricava la rappresentazione decimale cercata, con periodo 692307 di lunghezza 6

$$\frac{542}{13} = 41,\overline{692307}$$

2) Scrivere i seguenti numeri in forma di frazione
   a. $x = 37,\overline{541}$ b. $w = 258{,}37\,\overline{6013}$

   a. $x = 37,\overline{541}$
   La rappresentazione decimale è periodica semplice, con periodo 541 di lunghezza 3. Sottraggo la parte intera per isolare la parte decimale

$$y = x - 37 = 0,\overline{541}$$

Poiché il periodo ha lunghezza 3, moltiplico per 10^3

$$10^3 y = 541,\overline{541} = 541 + y$$

Ne deduco una espressione di y in forma di frazione

$$y = \frac{541}{10^3 - 1}$$

Sommo la parte intera di x per ritrovare x

$$x = 37 + y = 37 + \frac{541}{10^3 - 1} = \frac{37541 - 37}{999}$$

b. $w = 258{,}41\,\overline{6013}$

La rappresentazione decimale è periodica mista, con antiperiodo 41 di lunghezza 2, periodo 6013 di lunghezza 4.

Sottraggo la parte intera di w per isolare la parte decimale

$$z = w - 258 = 0,41\,\overline{6013}$$

Poiché l'antiperiodo di z (e di w) ha lunghezza 2, moltiplico per 10^2

$$x = 10^2 z = 41,\overline{6013}$$

Sottraggo la parte intera di x per isolare la parte decimale

$$y = x - 41 = 0,\overline{6013}$$

Poiché il periodo di y ha lunghezza 4, moltiplico per 10^4

$$10^4 y = 6013,\overline{6013} = 6013 + y$$

Ne deduco una espressione di y in forma di frazione

$$y = \frac{6013}{10^4 - 1}$$

Sommo la parte intera di x (che è l'antiperiodo di w) per ritrovare x

$$x = 41 + y = 41 + \frac{6013}{10^4 - 1}$$

Divido per 10^2 per ritrovare z

$$z = \frac{x}{10^2} = \frac{41}{10^2} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)}$$

Ora sommo la parte intera di w per ritrovare w

$$w = 258 + z = 258 + \frac{41}{10^2} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{258 \cdot 10^2 \cdot (10^4 - 1)}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{41 \cdot (10^4 - 1)}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{25800 \cdot (10^4 - 1)}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{41 \cdot 10^4 - 41}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{25800 \cdot (10^4 - 1)}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{41 \cdot 10^4 - 41}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{25800 \cdot 10^4 - 25800}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{410000 - 41}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} + \frac{6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{258000000 - 25800 + 410000 - 41 + 6013}{10^2 \cdot (10^4 - 1)} =$$

$$= \frac{258416013 - 25841}{999900}$$

LUMSA - FONDAMENTI DELLA MATEMATICA DI BASE
Principio di induzione matematica

Prof. F. Tovena

Il Principio di induzione matematica è una tecnica di dimostrazione che permette la dimostrazione simultanea di infinite affermazioni.

Un insieme è *infinito* se è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

L'insieme **N** dei numeri naturali è infinito perché è in corrispondenza biunivoca con il suo sottoinsieme proprio formato dai numeri pari: basta, infatti, considerare la funzione:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

Si osservi che **N** è in corrispondenza biunivoca anche con il sottoinsieme dei numeri dispari (disgiunto dal sottoinsieme dei pari), ad esempio tramite la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$$

Una ulteriore caratteristica dei numeri naturali è quella che *ogni numero naturale ha un successivo, e tale successivo è unico*: il numero successivo del numero n è il numero $n+1$.

Il principio di induzione può essere applicato quando è assegnata una affermazione il cui enunciato dipende da un numero naturale n, e si vuole dimostrare che tale affermazione è vera non appena n è maggiore o uguale di un prefissato valore. Si basa sul fatto che, partendo da un numero naturale fissato n_0 e ripetendo il passaggio tra un numero e il suo successivo, si raggiunge (con un numero finito di passi) qualsiasi prefissato numero n maggiore di n_0.
Esempi di affermazioni che dipendono da un numero naturale $n \geq 1$ (è possibile enunciare anche affermazioni false):

1.1) $A(n)$: la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n\,(n+1)}{2}$;

1.2) $B(n)$: ogni poligono piano convesso con n lati ha esattamente n diagonali;

1.3) $C(n)$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di (n) lati è uguale a $(n-2)\cdot 180^o$;

1.4) $D(n)$: il prodotto dei primi n numeri è uguale a 6.

1.5) $E(n)$: Tracciando n rette nel piano euclideo, non è possibile dividere il piano in più di 2^n parti.

1.6) $F(n)$: $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$.

1.7) $G(n)$: ogni numero naturale n è prodotto di numeri primi.

1.8) $H(n)$: 6 divide $8^n - 2^n$

Sostituendo a n un valore particolare, si ricava

2.1) $A(n)$ per $n = 5$ diventa: la somma dei primi 5 numeri naturali è uguale a $\frac{5\,(5+1)}{2}$, cioè $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5\,(5+1)}{2}$;

2.2) $B(n)$ per $n = 6$: ogni poligono piano convesso con 6 lati (cioè ogni esagono piano convesso) ha esattamente 6 diagonali;

2.3) $C(n)$ per $n = 3$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di 5 lati è uguale a $3 \cdot 180^o$;

2.4) $D(n)$ per $n=2$: il prodotto dei primi 2 numeri è uguale a 6, (cioè $1 \cdot 2 = 6$ e capiamo che l'affermazione è falsa per $n = 2$).

2.5) $E(n)$ per $n = 4$: Tracciando 4 rette nel piano euclideo, non è possibile dividere il piano in più di $2^4 = 16$ parti.

2.6) $F(n)$ per $n = 1$ diventa: $(1+3)^2 = 1+6+9$, (e notiamo che l'affermazione è vera per $n = 1$).

Abbiamo imparato a distinguere tra una dimostrazione matematica e una convinzione basata sul ripetersi di un evento (cui segue una ragionevole aspettativa che un evento si ripeta nelle modalità previste). Talora è possibile fornire una dimostrazione diretta delle affermazioni che vale per tutti i numeri; ad esempio, l'affermazione $F(n)$: $(n+3)^2 = n^2+6n+9$ può essere provata per ogni $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}(n+3)^2 &= (n+3) \times (n+3) \text{ per definizione di potenza}\\ &= n \cdot n + 3 \cdot n + n \cdot 3 + 3 \cdot 3 \text{ per la proprietà distributiva}\\ &= n^2 + 3 \cdot n + n \cdot 3 + 3^2 \text{ per definizione di potenza}\\ &= n^2 + 3 \cdot n + 3 \cdot n + 3^2 \text{ per la proprietà commutativa del prodotto}\\ &= n^2 + 2 \cdot (3 \cdot n) + 3^2 \text{ per la proprietà distributiva}\\ &= n^2 + 6 \cdot n + 3^2 \text{ per la proprietà associativa del prodotto}\end{aligned}$$

Non sempre è però possibile una dimostrazione diretta, e il principio di induzione offre in tal caso una differente modalità di lavoro. Il principio di induzione fornisce, infatti, uno strumento per dimostrare che una affermazione è vera, senza alcuna eccezione, per ogni numero naturale maggiore o uguale ad un numero prefissato.

Principio di induzione

Supponiamo di voler dimostrare che una affermazione $P(n)$ (dipendente da n) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 sia un valore prefissato). La tecnica di dimostrazione che si basa sul principio di induzione consiste in due passi:
a) **la base induttiva** : si dimostra che l'affermazione è vera quando n coincide con il valore prefissato n_0 (cioè per il più piccolo numero a cui siamo interessati).
b) **il passo induttivo** : mostriamo che, se l'affermazione $P(k)$ è vera per un certo numero $k \geq n_0$, allora è vera anche per il numero successivo $(k+1)$.
Se siamo in grado di svolgere entrambi i passi, allora il principio di induzione assicura che l'affermazione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Si noti che non ricaviamo nessuna informazione sul fatto che $P(n)$ sia vera o falsa per $n < n_0$.
È importante osservare che, nella dimostrazione relativa al passo induttivo, si suppone che l'affermazione $P(k)$ sia vera per k: tale ipotesi passa sotto il nome di *ipotesi induttiva*. In simboli, i passi della dimostrazione per induzione possono essere scritti come:

a) **la base induttiva**: mostro che $P(n_0)$ è vero .
b) **il passo induttivo**: per $k \geq n_0$, mostro che $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$.
Deduco che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Proviamo ad applicare il principio di induzione alle affermazioni elencate in precedenza e a qualche ulteriore esempio. Per ciascuna di esse, devo innanzitutto stabilire per quali valori di n vogliamo eseguire la dimostrazione.

3.1) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:

$A(n)$: la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

In questo caso, $n_0 = 1$. Riscriviamo l'affermazione nella forma:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{1}$$

a) **base induttiva**: mostro che $A(1)$ è vero .

Per $n = 1$, la somma a sinistra contiene solo un numero e l'affermazione diventa $A(1) : 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$. Poichè $\frac{1\,(1+1)}{2} = 1$, la base induttiva è provata.

b) **passo induttivo**: mostro che $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$.

Per ipotesi induttiva, diamo per vero che $1+2+3+\ldots+k = \frac{k\,(k+1)}{2}$. Possiamo utilizzare questo fatto per dimostrare $A(k+1)$. Per ottenere l'espressione di $A(k+1)$, devo sostituire in (1) la lettera n con $(k+1)$

$$A(k+1) : 1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

Si noti come l'espressione (1) favorisca la dimostrazione del passo induttivo più dell'espressione iniziale a parole. Infatti:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+k+(k+1) &= = (1+2+3+\ldots+k)+(k+1) = \\
&= \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \frac{k\,(k+1)+2(k+1)}{2} \quad \text{svolgendo la somma} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \quad \text{per la proprietà distributiva} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{per la commutativià del prodotto}
\end{aligned}$$

Il passo induttivo è dimostrato e quindi, applicando il principio di induzione, abbiamo dimostrato che, per ogni $n \geq 1$, la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

La dimostrazione è terminata, ma possiamo fare alcune osservazioni. Innanzitutto, la dimostrazione non ha fornito indizi su come è stata ricavata l'espressione $\frac{n\,(n+1)}{2}$ prevista per calcolare la somma; l'enunciato era quindi una informazione da avere prima di iniziare la dimostrazione, e va trovato in modo autonomo. Per avere una idea di come ricavare l'enunciato, e una evidenza geometrica sulla verità dell'enunciato, è possibile rivedere la situazione in altro modo. Scrivendo due volte i numeri da sommare (riportandoli su due righe, nella prima in ordine crescente e nella seconda riga in ordine decrescente)

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots\ \ldots & (n-1) & n \\
n & (n-1) & (n-2) & \ldots\ \ldots & 2 & 1
\end{array}$$

osserviamo che, in ogni colonna, la somma è uguale a $(n+1)$ e le colonne sono n; dunque la somma dei numeri contenuti nelle due righe è $n\,(n+1)$: ma la somma cercata $1+2+3+\ldots+n$ è la metà di tale quantità. Rappresentando i numeri tramite regoli, l'evidenza geometrica è enfatizzata.

3.2) Verifica per induzione che un cerchio tagliato da $n \geq 1$ corde può essere colorato con 2 colori in modo che regioni adiacenti siano colorate con colori differenti.

L'affermazione da provare per $n \geq 1$ è: $Z(n)$: In un cerchio, siano tracciate $n \geq 1$ corde, che dividono il cerchio in varie regioni. Allora tali regioni possono essere colorati con 2 colori in modo che regioni adiacenti siano colorate con colori differenti.

Osserviamo che in questo caso $n_0 = 1$.

a) **base induttiva**: mostro che $Z(1)$ è vero .

Un cerchio diviso da una corda può essere colorato con 2 colori.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 1$) $Z(k) \Longrightarrow Z(k+1)$.

Per ipotesi induttiva, suppongo le regioni definite da n corde in un cerchio possono essere colorate con 2 colori, in modo che regioni adiacenti abbiano differente colore. Dobbiamo mostrare che la stessa proprietà è vera in presenza di $n+1$ corde.

Se aggiungiamo un'altra corda, essa suddivide (senza tenere conto delle altre corde) il cerchio in due parti: in una delle due parti, lasciamo il colore precedente nelle regioni formate; nell'altra parte, cambiamo il colore a tutte le regioni formate. In questo modo, otteniamo la tesi.

3.3) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 3$:

$C(n)$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di (n) lati è uguale a $(n-2) \cdot 180^o$-

Osserviamo che in questo caso $n_0 = 3$.

a) **base induttiva**: mostro che $C(3)$ è vero .

Un poligono convesso con 3 lati è un triangolo, che ha somma degli angoli pari a 180^o per la proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 1$) $C(k) \Longrightarrow C(k+1)$.

Per ipotesi induttiva, suppongo che la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di (k) lati è uguale a $(k-2) \cdot 180^o$, e devo dimostrare che la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di $(k+1)$ lati è uguale a $(k+1-2) \cdot 180^o = (k-1) \cdot 180^o$. Considero un poligono piano convesso $\mathcal{P}$ con $(k+1)$ lati e, in esso, due lati consecutivi $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$: la diagonale d che congiunge i vertici non comuni di tali lati è interna a $\mathcal{P}$ (per definizione di convessità). Il poligono $\mathcal{P}'$ ottenuto da $\mathcal{P}$ considerando il lato d al posto dei lati $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ risulta essere un poligono di k lati. Il poligono $\mathcal{P}$ risulta scomposto nell'unione di $\mathcal{P}'$ e il triangolo $\mathcal{T}$ avente per lati $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ e d. La somma degli angoli interni di $\mathcal{P}$ è dunque uguale alla somma degli angoli interni di $\mathcal{P}'$ (che, per ipotesi induttiva è $(k-2) \cdot 180^o$,) e la somma degli angoli interni del triangolo $\mathcal{T}$ (che è di 180^o per la base induttiva). La somma degli angoli interni di $\mathcal{P}$ è dunque uguale a $(k-1) \cdot 180^o$, come si voleva.

Deduco che $C(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Può essere utile trattare alcuni casi intermedi, per comprendere meglio la dimostrazione: per $n = 4$, il quadrilatero $\mathcal{P}$ è diviso dalla diagonale in due triangoli. Per $n = 5$, il pentagono $\mathcal{P}$ è diviso dalla diagonale in un quadrilatero e un triangolo.

3.4) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:

$H(n)$: 6 divide $8^n - 2^n$.

Anche in questo caso, $n_0 = 1$.

a) **base induttiva**: mostro che $H(1)$ è vero .
Per $n = 1$, $8^n - 2^n = 8 - 2 = 6$ è divisibile per 6, e la base induttiva è vera.

b) **passo induttivo**: per $k \geq 1$, mostro che $H(k) \Longrightarrow H(k+1)$.
Devo mostrare che 6 divide $8^{k+1} - 2^{k+1}$. Osservo che

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 2^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k = (6+2) \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 6 \cdot 8^k + 2 \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 6 \cdot 8^k + 2 \cdot (8^k - 2^k) \end{aligned}$$

Dunque, $8^{k+1} - 2^{k+1}$ è la somma di un multiplo di 6 e di un multiplo di $8^k - 2^k$ (che, per ipotesi induttiva è un multiplo di 6). Dunque $8^{k+1} - 2^{k+1}$ è a sua volta un multiplo di 6, come si voleva. Deduco che $H(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

3.5) Dimostra, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \geq 0$,
$W(n)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + n \cdot 3) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.
Osserviamo che in questo caso $n_0 = 0$.

a) **base induttiva**: mostro che $W(0)$ è vero .
È sufficiente osservare che l'uguaglianza numerica $1 = \frac{(0+1)(3 \cdot 0+2)}{2}$ è vera.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 0$) $W(k) \Longrightarrow W(k+1)$.
Per ipotesi induttiva, supponiamo che sia vera l'identità
$W(k)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$,
e vogliamo dimostrare che, allora, è vera anche l'affermazione
$W(k+1)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + (k+1) \cdot 3) = \frac{((k+1)+1)(3(k+1)+2)}{2}$.
Svolgendo i calcoli, osserviamo che $W(k+1)$: può essere scritta come
$W(k+1)$: $[1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3)] + (3k+4) = \frac{(k+2)(3k+5)}{2}$.
Nel termine a sinistra dell'espressione di $W(k+1)$ compare la somma

$$1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3)$$

che, per ipotesi induttiva, è uguale a $\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$. Sostituendo tale valore, il termine a sinistra di $W(k+1)$ diventa $\frac{(k+1)(3k+2)}{2} + (3k+4) = \frac{3k^2+11k+10}{2}$.
Poichè $(k+2)(3k+5) = 3k^2 + 11k + 10$, il passo induttivo è vero.
Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

3.6) Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 4$:
$M(n)$: con monete da 2 Euro e banconote da 5 Euro è possibile formare la cifra di n Euro.
Osserviamo che in questo caso $n_0 = 4$.

a) **base induttiva**: mostro che $M(4)$ è vero .
È sufficiente utilizzare 2 monete da 2 Euro.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 4$) $M(k) \Longrightarrow M(k+1)$.
Supponiamo di poter comporre la cifra di n Euro (con $n \geq 4$) e mostriamo di poter comporre anche la cifra di $(n+1)$ cifre.
Caso 1: per comporre n è stato composto utilizzando almeno una banconota da 5 Euro: basta sostituire una banconota da 5 Euro con 3 monete da 2 Euro, per raggiungere la cifra di $(n+1)$ Euro.
Caso 2: La cifra n è stata composta utilizzando unicamente monete da 2 Euro. Poichè $n \geq 4$, sono state utilizzate almeno 2 monete da 2 Euro. Basta sostituire due monete da 2 Euro con una banconota da 5 per comporre la cifra di $(n+1)$ Euro.
Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

3.7) Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 24$:
$T(n)$: esistono numeri naturali $x, y \geq 0$ tali che $n = 7x + 5y$.
Osserviamo che in questo caso $n_0 = 24$.

a) **base induttiva**: mostro che $T(24)$ è vero .
È sufficiente osservare che $24 = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$, con $x = y = 2$.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 24$) $T(k) \Longrightarrow T(k+1)$.
Per ipotesi induttiva esistono naturali x_0, y_0 tali che $k = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0$. Dobbiamo dedurne che, allora, esistono naturali x, y tali che $k+1 = 7 \cdot x + 5 \cdot y$.
Sostituendo nell'espressione di $k+1$ il valore di k fornito dall'ipotesi induttiva, si ottiene:

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + 1 \tag{2}$$

Caso 1: se $x_0 = 0$, oppure $x_0 = 1$, allora $y_0 \geq 4$ perché $k \geq 24$. Osservando che $1 = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4$, sostituendo tale valore in (1) si ricava che

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = 7 \cdot (x_0 + 3) + 5 \cdot (y_0 - 4).$$

Posti $x = x_0 + 3$, $y = y_0 - 4$, si ottengono i due numeri naturali richiesti per mostrare il passo induttivo.
Caso 2: se $x_0 \geq 2$, osservando che $1 = 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3$, sostituendo tale valore in (1) si ricava che

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 7 \cdot (x_0 - 2) + 5 \cdot (y_0 + 3).$$

Posti $x = x_0 - 2$, $y = y_0 + 3$, si ottengono i due numeri naturali richiesti per mostrare il passo induttivo.
Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

Esercizi

5.1) *Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:*
$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$. (si osservi che, per ottenere un quadrato di lato $(n+1)$ da un quadrato di lato n è sufficiente 'bordarlo' su due lati, aggiungendo $(2n+1)$ quadrati unitari).
Dimostriamo l'affermazione $P(n)$ applicando il principio di induzione:
a) P(1) è vera perché $1 = 1^2$
b) Per $k \geq 1$, si supponga vera $P(k)$, i.e. $1+3+5+7+\ldots+(2k-1) = k^2$, e si consideri $P(k+1)$: $1+3+5+7+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$. Osserviamo che $1+3+5+\ldots+(2k+1) = [1+3+5+\ldots+(2k-1)] + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$; dunque $P(k+1)$ è vera, e la tesi è dimostrata.

5.2) *Mostra che, per ogni $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*

5.3) *Mostra che, per ogni $n \geq 1$, $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ è un multiplo di 7*
a) ok per $n = 1$.
b) Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n = k$, cioè $3^{2k+1} + 2^{k-1}$ sia un multiplo di 7. Dobbiamo provare che l'affermazione è vera per $n = k+1$, cioè che $3^{2k+3} + 2^k$ è un multiplo di 7. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
3^{2k+3} + 2^k &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= (7+2) \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot (3^{2k+1} + 2^{k-1}) \\
&= (\textit{multiplo di } 7) + 2 \cdot (\textit{multiplo di } 7) \\
&= (\textit{multiplo di } 7)
\end{aligned}$$

5.4) *Nel piano euclideo sono disegnate $n \geq 1$ circonferenze. Esse dividono il piano in regioni. Mostra che sono sufficienti due colori per colorare il piano, in modo tale che siano colorate con colori differenti due regioni che abbiano in comune una linea di confine.*

5.5) *Trova l'errore nella seguente dimostrazione.*

In ogni insieme di n pennarelli, con $n \geq 1$, tutti i pennarelli hanno lo stesso colore. a) Vero per $n = 1$. b) Supponiamo che ogni insieme di $k \geq 1$ pennarelli contenga solo pennarelli dello stesso colore. Consideriamo un insieme S con $k+1$ pennarelli e, in esso, una coppia di pennarelli, che indichiamo con A e B, scelta a caso. Togliendo da S un pennarello diverso da A e da B, otteniamo un insieme di k pennarelli che contiene A e B: per ipotesi induttiva, tutti questi pennarelli hanno lo stesso colore, e in particolare A e B hanno lo stesso colore. Poiché la coppia A e B era stata scelta a caso, concludiamo che tutti i pennarelli hanno lo stesso colore.

Dobbiamo ricordarci che:
i) se la base induttiva è falsa, allora la nostra tesi è falsa; possiamo, eventualmente, modificarla per controllare se l'affermazione è vera per un differente insieme di valori.
ii) se non riusciamo a dimostrare il passo induttivo, non è detto che la tesi sia falsa: è possibile che qualcun altro (o noi stessi in un giorno diverso) sia capace di farlo, o che la tipologia di dimostrazione non sia adatta alla natura del problema.

4.1) L'affermazione $D(n)$: *il prodotto dei primi n numeri è uguale a 6.* è vera solo per $n = 3$.

4.2) L'affermazione $B(n)$: *ogni poligono piano convesso con n lati ha esattamente n diagonali* è sicuramente falsa per $n = 4$.

4.3) L'affermazione $G(n)$: *ogni numero naturale n è prodotto di numeri primi* è vera per ogni $n \geq 2$, ma non c'è una buona correlazione tra la fattorizzazione in fattori primi di n e di $(n+1)$. È possibile modificare la tecnica del principio di induzione per poter trattare questo caso:

Principio di induzione in forma forte
Supponiamo di voler dimostrare che una affermazione $P(n)$ (dipendente da n) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 sia un valore prefissato). La tecnica di dimostrazione che si basa sul principio di induzione in forma forte consiste in due passi:
a) **la base induttiva** : si dimostra che l'affermazione è vera quando n coincide con n_0 (cioè per il più piccolo numero a cui siamo interessati).
b) **il passo induttivo** : supponiamo che l'affermazione $P(n)$ sia vera per TUTTI i numeri h tali che $n_0 \leq h \leq k$, e mostriamo che allora è vera anche per il numero successivo $(k+1)$.
Se siamo in grado di svolgere entrambi i passi, allora il principio di induzione assicura che l'affermazione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

In simboli:
Principio di induzione in forma forte
a) **la base induttiva**: mostro che $P(n_0)$ è vero .
b) **il passo induttivo**: mostro che $\{P(h)$ per ogni h tali che $n_0 \leq h \leq k\} \Longrightarrow P(k+1)$.
Deduco che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

4.1) *Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 2$: $G(n)$: ogni numero naturale n è prodotto (finito) di numeri primi.*

Applico il principio di induzione in forma forte, per $n_0 = 2$.

a) **base induttiva**: il numero $n_0 = 2$ è un primo, e quindi $G(2)$ è vera.

b) **passo induttivo**: Per ipotesi induttiva, suppongo che ogni numero h compreso tra 2 e k sia prodotto di fattori primi. Considero $(k+1)$. Se $(k+1)$ è primo, non ho nulla da dimostrare. Se, invece, $(k+1)$ non è primo, per definizione deve ammettere un fattore proprio: dunque $k+1 = h \cdot h'$ con h e h' diversi da 1 e $(k+1)$. Per ipotesi induttiva, sia h che h' sono prodotto di fattori primi, e quindi anche $(k+1)$ gode della stessa proprietà.

Deduco che $G(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$ (e abbiamo mostrato una parte del teorema fondamentale dell'aritmetica).

LUMSA - Fondamenti della matematica di base
Esercizi sul principio di induzione matematica

Prof. F. Tovena

Principio di induzione
Supponiamo di voler dimostrare che una affermazione $P(n)$ (dipendente da n) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 sia un valore prefissato). La tecnica di dimostrazione che si basa sul principio di induzione consiste in due passi:

a) **la base induttiva**: mostro che $P(n_0)$ è vero .
b) **il passo induttivo**: per $k \geq n_0$, mostro che $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$.
Deduco che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Nella dimostrazione relativa al passo induttivo, l'ipotesi che l'affermazione $P(k)$ sia vera per k: tale ipotesi passa sotto il nome di *ipotesi induttiva*.

1) Dimostra, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \geq 0$,

   $W(n)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + n \cdot 3) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.

   Osserviamo che in questo caso $n_0 = 0$.

   a) **base induttiva**: mostro che $W(0)$ è vero .
      È sufficiente osservare che l'uguaglianza numerica $1 = \frac{(0+1)(3 \cdot 0+2)}{2}$ è vera.
   b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 0$) $W(k) \Longrightarrow W(k+1)$.
      Per ipotesi induttiva, supponiamo che sia vera l'identità
      $W(k)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$,
      e vogliamo dimostrare che, allora, è vera anche l'affermazione
      $W(k+1)$: $1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + (k+1) \cdot 3) = \frac{((k+1)+1)(3(k+1)+2)}{2}$.
      Svolgendo i calcoli, osserviamo che $W(k+1)$: può essere scritta come
      $W(k+1)$: $[1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3)] + (3k + 4) = \frac{(k+2)(3k+5)}{2}$.
      Nel termine a sinistra dell'espressione di $W(k+1)$ compare la somma

      $$1 + (1 + 1 \cdot 3) + (1 + 2 \cdot 3) + \ldots + (1 + k \cdot 3)$$

      che, per ipotesi induttiva, è uguale a $\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$. Sostituendo tale valore, il termine a sinistra di $W(k+1)$ diventa
      $\frac{(k+1)(3k+2)}{2} + (3k + 4) = \frac{3\,k^2+11\,k+10}{2}$
      Poichè $(k + 2)(3k + 5) = 3\,k^2 + 11\,k + 10$, il passo induttivo è vero.
      Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

2) Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 4$:

   $M(n)$: con monete da 2 Euro e banconote da 5 Euro è possibile formare la cifra di n Euro.

   Dimostriamo l'affermazione mediante il principio di induzione. Osserviamo che in questo caso $n_0 = 4$.

   a) **base induttiva**: mostro che $M(4)$ è vero .
      È sufficiente utilizzare 2 monete da 2 Euro.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 4$) $M(k) \Longrightarrow M(k+1)$.
Supponiamo di poter comporre la cifra di n Euro (con $n \geq 4$) e mostriamo di poter comporre anche la cifra di $(n+1)$ cifre.
Caso 1: per comporre n è stato composto utilizzando almeno una banconota da 5 Euro: basta sostituire una banconota da 5 Euro con 3 monete da 2 Euro, per raggiungere la cifra di $(n+1)$ Euro.
Caso 2: La cifra n è stata composta utilizzando unicamente monete da 2 Euro. Poichè $n \geq 4$, sono state utilizzate almeno 2 monete da 2 Euro. Basta sostituire due monete da 2 Euro con una banconota da 5 per comporre la cifra di $(n+1)$ Euro.
Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

Deduco che $C(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

3) Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 24$:
$T(n)$: esistono numeri naturali $x, y \geq 0$ tali che $n = 7x + 5y$.
Dimostriamo l'affermazione mediante il principio di induzione. Osserviamo che in questo caso $n_0 = 24$.

a) **base induttiva**: mostro che $T(24)$ è vero .
È sufficiente osservare che $24 = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$, con $x = y = 2$.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 24$) $T(k) \Longrightarrow T(k+1)$.
Per ipotesi induttiva esistono naturali x_0, y_0 tali che $k = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0$. Dobbiamo dedurne che, allora, esistono naturali x, y tali che $k+1 = 7 \cdot x + 5 \cdot y$.
Sostituendo nell'espressione di $k+1$ il valore di k fornito dall'ipotesi induttiva, si ottiene:

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + 1 \tag{1}$$

Caso 1: se $x_0 = 0$, oppure $x_0 = 1$, allora $y_0 \geq 4$ perché $k \geq 24$. Osservando che $1 = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4$, sostituendo tale valore in (1) si ricava che

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = 7 \cdot (x_0 + 3) + 5 \cdot (y_0 - 4).$$

Posti $x = x_0 + 3$, $y = y_0 - 4$, si ottengono i due numeri naturali richiesti per mostrare il passo induttivo.
Caso 2: se $x_0 \geq 2$, osservando che $1 = 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3$, sostituendo tale valore in (1) si ricava che

$$k + 1 = 7 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 + 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 7 \cdot (x_0 - 2) + 5 \cdot (y_0 + 3).$$

Posti $x = x_0 - 2$, $y = y_0 + 3$, si ottengono i due numeri naturali richiesti per mostrare il passo induttivo.
Per il principio di induzione, deduciamo che la tesi è vera.

4) *Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:*
$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$. (si osservi che, per ottenere un quadrato di lato $(n+1)$ da un quadrato di lato n è sufficiente 'bordarlo' su due lati, aggiungendo $(2n+1)$ quadrati unitari).
Dimostriamo l'affermazione $P(n)$ applicando il principio di induzione:

a) P(1) è vera perché $1 = 1^2$

b) Per $k \geq 1$, si supponga vera $P(k)$, i.e. $1+3+5+7+\ldots+(2k-1) = k^2$, e si consideri $P(k+1): 1+3+5+7+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$. Osserviamo che $1+3+5+\ldots+(2k+1) = [1+3+5+\ldots+(2k-1)] + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$; dunque $P(k+1)$ è vera, e la tesi è dimostrata.

5) *Mostra che, per ogni* $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Dimostriamo l'affermazione applicando il principio di induzione:

a) mostriamo che l'affermazione è vera per $n = 1$: in tal caso, l'affermazione diventa $1^2 = \frac{1\,(1+1)\,(2+1)}{6}$, che è vera.

b) Passo induttivo: supponiamo per ipotesi induttiva che l'affermazione sia vera per il valore $k \geq 1$, cioè che

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}$$

Sotto questa ipotesi, dobbiamo dimostrare che l'affermazione è vera anche per $k+1$, cioè che è vera l'affermazione:

$$[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2] + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\,(k+2)\,(2k+3)}{6}$$

Sostituiamo nel primo termine il valore della somma dei primi k addendi, tenendo conto dell'ipotesi induttiva. Otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k\,(k+1)\,(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= (k+1)\frac{k\,(2k+1) + 6(k+1)}{6} \quad \text{(raccogliendo } (k+1) \text{ a fattor comune} \\
&= (k+1)\frac{2k^2 + k + 6\,k + 6}{6} \\
&= (k+1)\frac{2k^2 + 7\,k + 6}{6}
\end{aligned}$$

Poiché $(k+2)\,(2k+3) = 2k^2 + 4\,k + 3\,k + 6 = 2k^2 + 7\,k + 6$, il passo induttivo è dimostrato. Per il principio di induzione, otteniamo la tesi.

Elementi di Statistica descrittiva

La statistica descrittiva studia i criteri di rilevazione, classificazione, sintesi e rappresentazione dei dati ottenuti dallo studio di una popolazione o di una parte di essa, detta campione. Il termine di popolazione va inteso in senso lato come 'insieme che si vuole studiare'. Gli elementi della popolazione analizzata sono chiamati anche **unità statistiche**.
Per ogni unità statistica è possibile studiare una o più caratteristiche (che vengono chiamate **caratteri della popolazione**) e possono essere di tipo qualitativo o quantitativo.

Una indagine statistica prevede varie **fasi**.

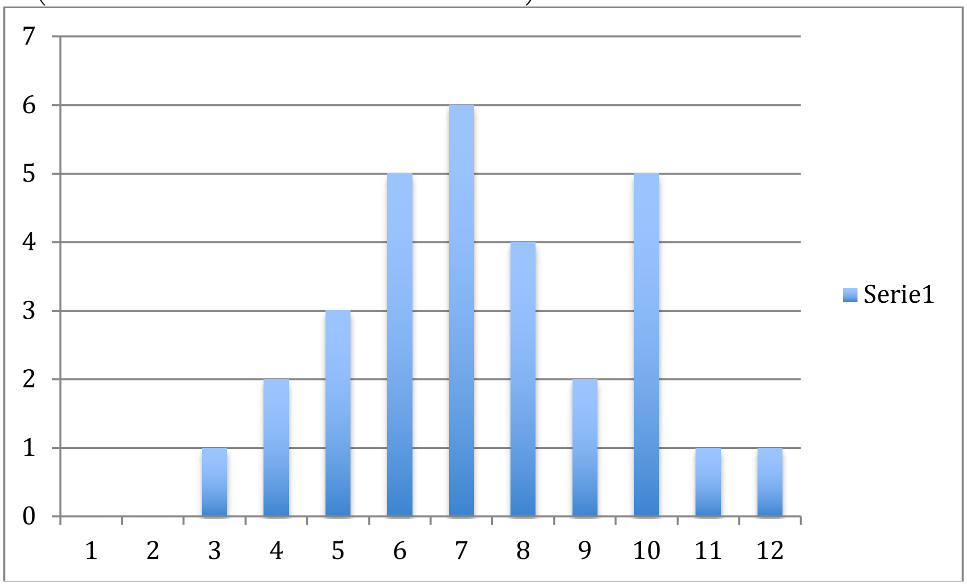
1) Studio del problema e impostazione dell'indagine statistica
   Si individuano lo scopo della ricerca, il fenomeno sul quale indagare, la popolazione statistica di interesse, le unità statistiche e i caratteri oggetto dell'indagine
2) Rilevazione dei dati statistici
   Si procede con la raccolta dei dati statistici riguardanti i caratteri e le unità statistiche di interesse. La rilevazione può avvenire in modo diretto (raccogliendo le informazioni da ciascuna unità statistica) o in modo indiretto (raccogliendo le informazioni solo tra le unità in un opportuno campione, che deve essere scelto in modo da essere rappresentativo.
3) Spoglio delle schede e tabulazione: i dati raccolti sono suddivisi in classi omogenee e riassunti tramite tabelle.
4) Rappresentazione dei dati statistici.
   La rappresentazione può avvenire attraverso diversi tipi di grafico:
   a) diagramma cartesiano: rappresentazione nel piano cartesiano dei valori della variabile
   b) sull'asse orizzontale e delle relative frequenze sull'asse verticale;
   c) ideogramma: si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo;
   d) diagramma a nastri o a bastoni: utilizzata prevalentemente per addetti ai lavori;
   e) areogramma: grafico a forma di cerchio composto da settori circolari con aree
   f) direttamente proporzionali alle frequenze;
   g) istogramma: grafico composto da rettangoli aventi area proporzionale alla frequenza.
5) Elaborazione dei dati
   Vengono elaborati i dati tabulati al fine di costruire opportuni indici di sintesi.
6) Interpretazione dei risultati
   Attraverso i grafici e gli indici è possibile fornire informazioni relative ad alcune caratteristiche del fenomeno in studio.

Analisi dei dati quando la popolazione comprende un numero finito di unità statistiche e i caratteri sono descritti da un numero intero
A partire dai dati raccolti durante una analisi, per ogni modalità di un carattere è possibile valutare, ad esempio, i caratteri elencati nel seguito.
La **frequenza assoluta** è il numero di volte con cui si presenta una modalità del carattere indagato;
La **frequenza relativa** è il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale dei casi presi in esame.
La **frequenza percentuale** è la frequenza relativa moltiplicata per 100.

La **moda** è il dato che ha frequenza maggiore.
La **media aritmetica** viene calcolata sommando tutti i valori dei dati e dividendo il risultato per il numero complessivo dei dati. Se sono stati raccolti i dati per n campioni, indicando con x_i i valori ottenuti (non necessariamente tra loro distinti) la media aritmetica è data dal rapporto $\frac{x_1+\cdot x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}$
[https://it.wikipedia.org/wiki/Media_(statistica)#Media_aritmetica]

La **mediana** di una successione di dati disposti in ordine crescente o decrescente è il dato che occupa la posizione centrale se il numero dei dati è dispari; se il numero dei dati è pari è la media aritmetica dei dati della coppia centrale. [https://it.wikipedia.org/wiki/Mediana_(statistica)]

Esempio 1
Se tiriamo due dadi (o un dado due volte), possiamo calcolare la somma dei numeri ottenuti. Il risultato minore possibile è 2 (quando entrambi i dadi danno 1) e quello maggiore possibile è 12 (quando escono due 6). Gli eventi possibili sono dunque i numeri da 2 a 12.
Proviamo a lanciare la coppia di dadi 30 volte e registrare la somma ottenuta in un istogramma, come quello in figura (eventualmente omettendo la colonna 1).

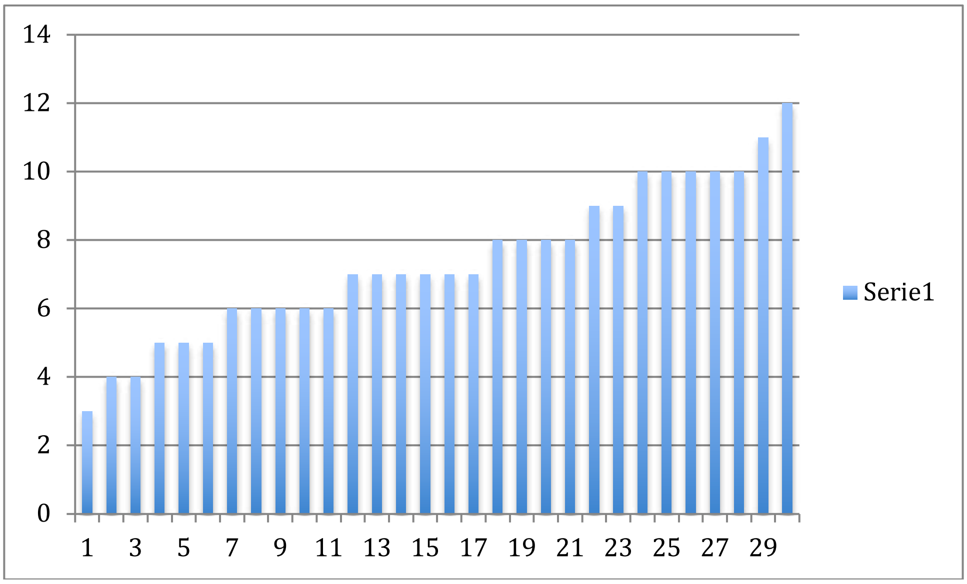


Frequenze dei valori ottenuti

La **moda** è 7(valore di frequenza 6).
La **media** si calcola invece sommando tutti i valori ottenuti, e dividendo per il numero dei lanci. Nel nostro esempio, la media è

$$\frac{3+4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 5+7\cdot 6+8\cdot 4+9\cdot 2+10\cdot 5+11+12}{30}=\frac{221}{30}$$

Il valore di $\frac{221}{30}$ può essere approssimato con 7,36. Notiamo che, in questo caso, la media non coincide con il valore di nessuna voce. La media ci suggerisce attorno a quale valore approssimato sono 'raggruppati' i dati, fornendo il valore 'virtuale' dei dati, se tutti i dati del campione fossero stati tra loro uguali e mantenendo fissata la somma di tutti i valori.
Un altro indicatore aiuta nel segnalare come sono distribuiti i dati: è la **mediana**. Per illustrarla, modifichiamo la descrizione dei dati raccolti, mettendo in evidenza i 30 lanci effettuati. Numeriamo i lanci da 1 a 30 ordinandoli in modo tale che la somma ottenuta vada dalla più piccola alla più grande. Otterremo un istogramma della forma di quello nella figura successiva (a parità di valore ottenuto, l'ordine tra i lanci è irrilevante).



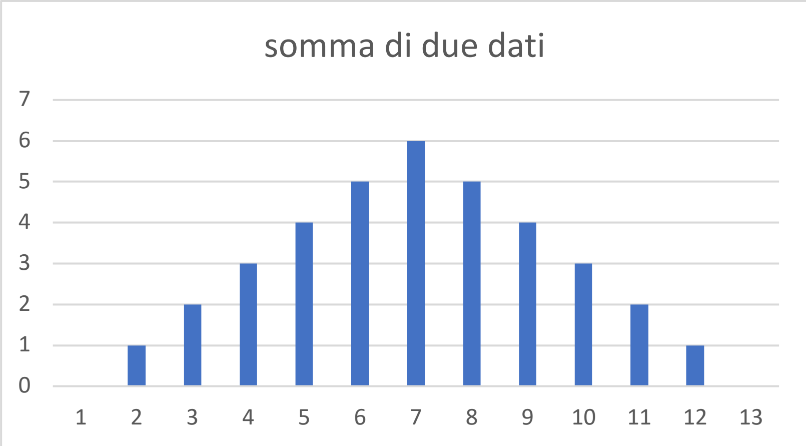
valore ottenuto nei singoli lanci, ordinati per valore crescente

Ripartiamo a metà i lanci così ordinati; la divisione a metà sta tra il lancio 15 e il lancio 16: in entrambi i casi la somma ottenuta nel lancio è 7, e quindi 7 è la mediana: alla destra e alla sinistra ci sono lo stesso numero di lanci. Se i valori fossero stati differenti, ne avremmo preso la media, mentre se il numero di lanci fosse stato dispari, sarebbe stato sufficiente prendere il valore corrispondente al lancio 'centrale'. In questo caso, moda e mediana sono uguali, ma ciò non accade sempre.

Proviamo ora a calcolare il numero di modi possibili in cui un valore poteva essere ottenuto.
Schematizziamo un tiro di dadi tramite una coppia ordinata di numeri (a, b) con $1 \le a, b \le 6$. Il numero di tali coppie è 36.

Valore ottenuto	coppie corrispondenti al valore
2	(1,1)
3	(1,2), (2,1)
4	(1,3), (2,2), (3,1)
5	(1,4), (2,3), (3,2),(4,1)
6	(1,5),(2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
7	(1,6),(2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
8	(2,6),(3,5), (4,4), (5,3), (6,2)
9	(3,6), (4,5),(5,4), (6,3)
10	(4,6), (5,5), (6,4)
11	(5,6), (6,5)
12	(6,6)

Un istogramma che riporti per il numero di possibilità ottenute per ogni valore da 2 a 12, è riportato nella figura successiva, mettendo in evidenza una perfetta simmetria.



Elementi di probabilità discreta [definizione classica]

Nozione di evento possibile/impossibile. Tra gli eventi possibili sono compresi anche gli eventi certi.
La definizione classica di probabilità può essere facilmente calcolata in alcuni casi, ma non è sempre applicabile.
Si trattano solo un numero finito di casi, sotto l'ipotesi che tutti i casi possibili sia equiprobabili (questo concetto è delicato da definire, senza circoli viziosi). Nel caso del lancio di un dado, si intende che il dado non è truccato.
La **probabilità** di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili: è dunque un valore compreso tra 0 e 1, ove 1 viene attribuito ai casi certi.
Il modo di contare gli eventi dipende dalla modellizzazione che viene utilizzata per descrivere la situazione, mentre la probabilità non dipende dalla modellizzazione utilizzata.
Lanciando un dado, la probabilità P(3) che esca 3 è 1/6. Lanciando 2 dadi, la probabilità P(2) può essere modellizzata come sopra: la probabilità che la somma sia 2 è quindi 1/36 (come P(12)), mentre P(4) = 3/36.
Se due eventi sono incompatibili, la probabilità che ne accada uno oppure l'altro è pari alla somma delle probabilità di ciascuno: lanciando un dado, la probabilità che esca un numero pari è uguale alla somma delle probabilità P(2) che esca 2, P(4) che esca4, P(6) che esca 6; dunque, la probabilità P(pari) che esca un numero pari 1/6+1/6+1/6.
Se p è la probabilità che un certo evento accada, la probabilità che lo stesso evento non accada è pari a 1-p: lanciando un dado, la probabilità P(6) che esca 6 è pari a 1/6, la probabilità che non esca 6 è 1-1/6 = 5/6.

[https://it.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A0#Definizione_classica]
[http://online.scuola.zanichelli.it/bergaminifiles/Biennio/Capitoli/BLU/bergamini_capitolo_beta_blu.pdf]

Elementi di probabilità discreta

La **probabilità** di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili: è dunque un valore compreso tra 0 e 1, ove 1 viene attribuito ai casi certi.

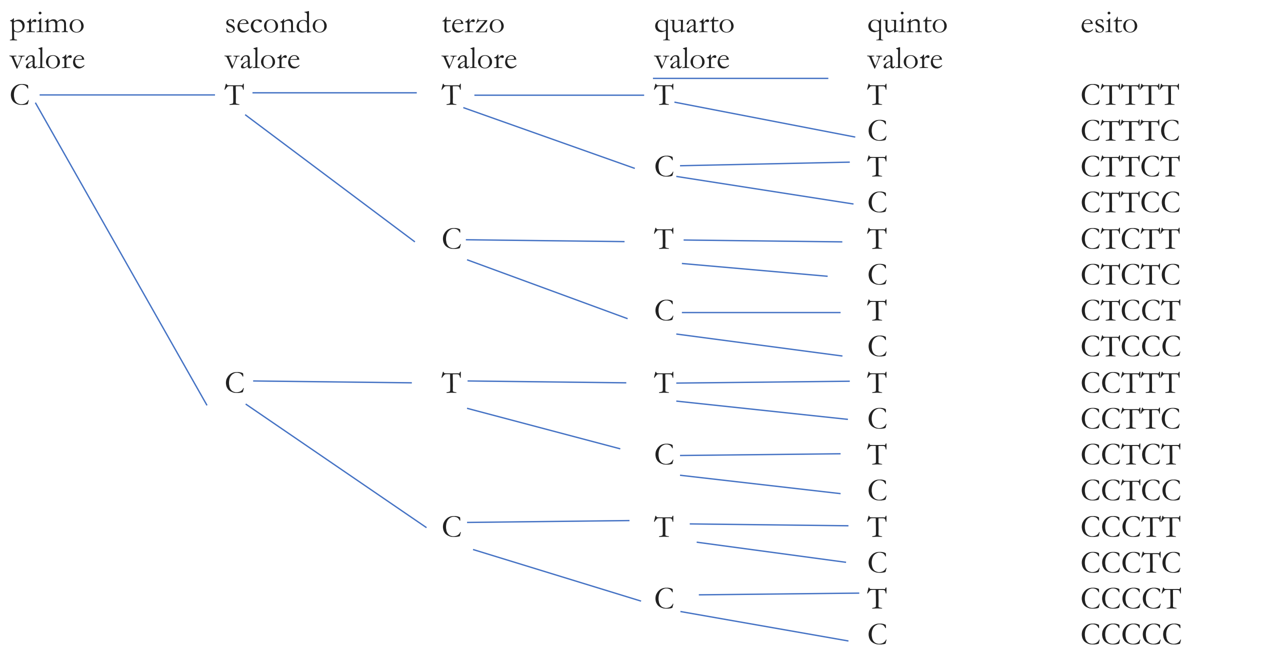
La definizione si applica quando si hanno un numero finito di eventi, sotto l'ipotesi che tutti gli eventi possibili siano equiprobabili.

Il modo di contare gli eventi dipende dalla modellizzazione che viene utilizzata per descrivere la situazione, mentre la probabilità non dipende dalla modellizzazione utilizzata.

Per calcolare la probabilità, è quindi essenziale 'saper rappresentare' e 'saper contare'.

Una modalità spesso utile è quella di rappresentare gli eventi tramite stringhe ordinate di simboli. Ad esempio, se lancio una moneta 5 volte consecutive, posso rappresentare l'esito dei lanci mediante una sequenza della forma (T,T,C, C, T), indicando con T il caso in cui esca 'testa' e con C il caso in cui esca 'croce', o adattare i simboli utilizzati a seconda delle immagini effettivamente raffigurate sulla moneta. La stessa rappresentazione è possibile se tiro contemporaneamente 5 monete: posso pensare di riconoscerle e numerarle separatamente da 1 a 5, e riportare nella sequenza l'esito del lancio. La sequenza (T,T,C, C, T) si interpreta allora dicendo che per la prima, la seconda e la quinta moneta è uscito testa, mentre è uscito croce nella terza e nella quarta.
In entrambe le situazioni, quanti sono i casi possibili? sono $32 = 2x2x2x2x2 = 2^5$ e per elencarli è bene procedere con una strategia ordinata. Nell'esempio, metà dei dati sono riportati attraverso una tabella, l'altra metà con un diagramma ad albero.

primo valore	secondo valore	terzo valore	quarto valore	quinto valore	esito
T	T	T	T	T	TTTTT
				C	TTTTC
			C	T	TTTCT
				C	TTTCC
		C	T	T	TTCTT
				C	TTCTC
			C	T	TTCCT
				C	TTCCC
	C	T	T	T	TCTTT
				C	TCTTC
			C	T	TCTCT
				C	TCTCC
		C	T	T	TCCTT
				C	TCCTC
			C	T	TCCCT
				C	TCCCC



Principio di moltiplicazione

In generale, se devo comporre una sequenza con n termini, in cui nel primo termine posso utilizzare m_1 simboli, nel secondo m_2 simboli, …. nell'n-esimo m_n simboli, il numero complessivo N dei dati è fornito dal prodotto

$$N = m_1 \text{ x } m_2 \text{ x } \ldots \text{ x } m_n$$

Esempio Ad esempio, se una targa è composta (nell'ordine) da 2 lettere nell'alfabeto con 21 lettere e 4 cifre da 0 a 9, si possono comporre N = 21x21x10x10x10x10= 4410000 targhe.
Supponiamo ora che le targhe vengano assegnate casualmente. La probabilità di avere la targa AA0000 è dunque uguale a $\frac{1}{4410000}$, e tale probabilità è uguale per qualsiasi sequenza fissata.
La probabilità di avere una targa che comincia per Z si ottiene osservando che il numero di eventi possibili è sempre 4410000 come prima, mentre i casi favorevoli sono le targhe della forma Z lettera cifra cifra cifra cifra; il numero di tali targhe coincide con il numero M di targhe con 5 entrate, di cui la prima è una lettera e le rimanenti sono cifre. Applicando il principio sopra esposto, ricaviamo che

$$\text{numero di casi favorevoli} = M = 21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10 = 210000$$

La probabilità di avere una targa che inizia con Z è dunque

$$\frac{210000}{4410000} = \frac{21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10}{21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10} = \frac{1}{21} \sim 0,048$$

E' come se io avessi considerato solo il primo termine della sequenza, e estratto a caso una lettera tra le 21 possibili.

Analogamente, per calcolare la probabilità di avere una targa che termina con 0, si possono calcolare i casi favorevoli contando il numero di targhe formate da 2 lettere e tre cifre: tale numero è 21x21x10x10x10 = 441000. La probabilità di avere una targa che termina con 0 è dunque

$$\frac{441000}{4410000} = \frac{21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10}{21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10} = \frac{1}{10} = 0,1$$

E' come se io avessi considerato solo l'ultimo termine della sequenza, e estratto a caso una cifra tra le 10 possibili.

Quale è la probabilità di avere una targa che contiene la Z? il numero di eventi possibili è ancora lo stesso. Osserviamo che il numero di targhe che contengono Z si può calcolare sottraendo al numero complessivo delle targhe l'elenco di quelle che NON contengono Z: ma le targhe che non contengono Z sono quelle in cui nella prima e nella seconda entrata si utilizzano solo 20 lettere: il loro numero è quindi 20x20x10x10x10x10. In particolare, la probabilità di avere una targa che NON contiene Z è data da

$$\text{P(non Z)} = \frac{20\text{x}20\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10}{21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10} = \frac{20\text{x}20}{21\text{x}21} = \frac{400}{441} \sim 0,907$$

La probabilità di avere una targa contenente Z può essere calcolata come

$$\text{P(Z)} = 1 - \text{P(non Z)} = 1 - \frac{400}{441} = \frac{41}{441} \sim 0,093$$

oppure calcolando esplicitamente il numero di targhe contenente Z

$$\begin{aligned}\text{numero targhe con Z} &= 21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10 - 20\text{x}20\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10 = \\ &= 41\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10 = 410000\end{aligned}$$

e valutando il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili

$$\text{P(Z)} = \frac{41\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10}{21\text{x}21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10} = \frac{41}{21\text{x}21} = \frac{41}{441}$$

Riflettiamo ora su una differente modalità con la quale avremmo potuto calcolare il numero di targhe contenenti almeno una Z. Nel numero di eventi favorevoli vanno conteggiate sia le targhe che iniziano con Z (che abbiamo già contato: è $21\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10 = 210000$ che le targhe che hanno Z come secondo termine (questo numero è uguale al numero di targhe che cominciano con Z). Non è corretto però pensare che il numero dei casi favorevoli sia 2x210000, perché le targhe che iniziano con ZZ verrebbero contate due volte. Osserviamo che le targhe che cominciano con ZZ sono tutte e sole le targhe che stanno sia nell'elenco delle targhe che cominciano per Z che nell'elenco delle targhe con Z come secondo termine (formano quindi l'intersezione). Le targhe che cominciano con ZZ sono 10x10x10x10, perché corrispondono alle targhe numeriche con 4 cifre. Dunque, il numero di targhe che contengono una Z è dato da

$21x10x10x10x10 + 21x10x10x10x10 - 10x10x10x10$ = 10x10x10x10 (21x2-1) = 410000

Presenza o assenza di ripetizioni Se si utilizzano gli stessi simboli in più termini della stessa sequenza, occorre distinguere il caso in cui è possibile 'ripetere' uno stesso simbolo, cioè un simbolo può accadere contemporaneamente in più posizioni, oppure se sono escluse le ripetizioni. Ad esempio, se nelle targhe discusse nell'ultimo esempio si chiede che lo stesso simbolo non compaia mai due volte, allora le soluzioni AA1234 e AB0034 non sono lecite. Imponendo questa restrizione, il numero complessivo di targhe diventa inferiore e non posso conoscere a priori la lista di simboli utilizzabili in una certa entrata: i simboli utilizzabili dipendono dalle scelte operate nelle altre entrate. È lo stesso possibile fornire il calcolo del numero complessivo delle targhe. Possiamo infatti immaginare di comporre la targa a partire dal primo termine:

- selezioniamo la lettera da inserire in tale termine: abbiamo 21 possibili modi par farlo,
- nella seconda posizione dobbiamo inserire nuovamente una lettera: possiamo scegliere una lettera qualsiasi tranne quella già inserita nella prima posizione: dunque abbiamo 20 possibili modi per comporre il secondo termine.
- nel terzo termine, dobbiamo inserire una cifra, e abbiamo 10 modi per farlo;
- nel quarto termine, dobbiamo inserire una cifra diversa da quella già utilizzata per il terzo termine: abbiamo 9 possibilità
- nel quinto termine, abbiamo a disposizione 8 cifre
- nel sesto termine, abbiamo a disposizione 7 cifre

Il numero possibile di targhe senza ripetizione è dunque 21x20x10x9x8x7= 2116800.
Quante targhe senza ripetizione terminano con 0? 21x20x9x8x7=211680
Tra le targhe senza ripetizione, la probabilità di avere una targa che termina con 0 è ancora $\frac{1}{10}$.
Quante sono le targhe senza ripetizione che terminano con 10? ….
Quante sono le targhe senza ripetizione che contengono una Z? …
Quale è la probabilità di avere una targa senza ripetizione che contiene una Z? …

Esercizi:

- Gli aeroporti sono codificati con 3 lettere in un alfabeto di 25 lettere. Quanti aeroporti è possibile codificare in questo modo? Calcola la probabilità che nel codice di tre cifre NON compaia la Z.
- Disegna una bandiera come un rettangolo diviso a metà, ciascuna delle quali colorata con un colore uniforme differente da quello utilizzato nell'altra metà. Quante bandiere posso comporre utilizzando il giallo, il verde, il blu?
- Utilizzando le lettere A, B, C, D, E, F, G, quante sequenze di 4 lettere è possibile ottenere, con la richiesta che le sequenze contengano la E? Quale è la risposta se si chiede che le sequenze non contengano ripetizioni?

Si propongono esercizi relativi ai seguenti argomenti:
Numeri in base a
Principio di induzione
Rappresentazione di numeri razionali in forma decimale

Numeri in base a

- Completa:
  $(1234)_{10} = (\ldots\ldots\ldots\ldots)_7$
  $(46)_8 = (\ldots\ldots\ldots)_{10}$
  $(2010)_3 = (\ldots\ldots\ldots)_{10}$
  $(243)_5 + (422)_5 = (\ldots\ldots\ )_5$
  $(243)_5 - (144)_5 = (\ldots\ldots\ )_5$

  $(1234)_{10} = (3412)_7$

a	=	b	*	q	+	r
1234	=	7	*	176	+	2
176	=	7	*	25	+	1
25	=	7	*	3	+	4
3	=	7	*	0	+	3

$(46)_8 = 4 \times 8 + 6 = (38)_{10}$
$(2010)_3 = 2 \times 3^3 + 0\text{x } 3^2 + 1\text{x}3 + 0 = 2\text{x}27 + 3 = 54+3 = (57)_{10}$

$(243)_5 + (422)_5 = (1220)_5$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & & \\
 & 2 & 4 & 3 & + \\
 & 4 & 2 & 2 & = \\
\hline
1 & 2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

$(243)_5 - (144)_5 = (44)_5$

$$\begin{array}{cccc}
 & 5+3 & & \\
1 & \cancel{3} & 5+3 & \\
\cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{3} & - \\
1 & 4 & 4 & = \\
\hline
 & 4 & 4 &
\end{array}$$

Principio di induzione

Verifica, per induzione, se la seguente affermazione è vera per ogni n≥ 1:
A(n): 5 divide 6^n- 1.

Osservo che n_0=1. Procedo per induzione.

- **base induttiva**: mostro che A(1) è vero .
  Per n=1, 6- 1 =5 è divisibile per 5, e la base induttiva è vera.
- **passo induttivo**: per k≥ 1, mostro che A(k)⟹ A(k+1) .
  L'ipotesi induttiva è che 5 divide $6^k - 1$.
  Devo mostrare che, allora, 5 divide $6^{k+1} - 1$. Osservo che
  $$6^{k+1} - 1 = 6 \cdot 6^k - 1 = 6 \cdot 6^k - 6 + 5 = 6 \cdot (6^k - 1) + 5$$

Dunque, $6^{k+1}-1$ è la somma di un multiplo di 5, (il termine 5), e di un multiplo di (6^k-1) (che, per ipotesi induttiva \`e un multiplo di 5). Dunque $6^{k+1}-1$ è a sua volta un multiplo di 5, come si voleva.

Per il principio di induzione, deduco che A(n) è vera per ogni n≥ 1.

a	=	b	*	q	+	r
647	=	13	*	49	+	10
100	=	13	*	7	+	9
90	=	13	*	6	+	12
120	=	13	*	9	+	3
30	=	13	*	2	+	4
40	=	13	*	3	+	1
10	=	13	*	0	+	10
100	=	13	*	7	+	9

forma

Rappresentazione di numeri razionali in decimale

- Decomporre il numero come somma di quantità di differente valore

$$543,902 = 5\times 10^2 + 4 \times 10 + 3 + 9\frac{1}{10} + 0\frac{1}{10^2} + 2\frac{1}{10^3}$$

- Scrivere in forma di frazione decimale

$$5082,67 = \frac{508267}{10^2}$$

- Scrivere in forma di numero decimale
  - $\frac{647}{10^2} = 49,\ \overline{769230}$ periodico semplice

- Scrivere in forma di frazione $y = 0,\overline{7}$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1	$y = 0,\overline{7}$	$y = 0,\overline{p_1}$
moltiplico per 10 entrambi i membri	$10y = 7,\overline{7} = 7 + 0,\overline{7} = 7+y$	$10y = p_1,\overline{p_1} = p_1 + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10y = 7 + y$	$10y = p_1 + y$

raccolgo al primo membro i termini in y	$9y = 7$	$9y = p_1$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{7}{9}$	$y = \frac{p_1}{9}$

- Scrivere in forma di frazione $x = 27,\overline{6}$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con periodo di lunghezza 1	$x = 27,\overline{6}$	$x = a_0,\overline{p_1}$
sottraggo a x la parte intera per ottenere un numero periodico semplice con periodo di lunghezza 1 e parte intera nulla (come ne caso già trattato) **Per completezza, riportiamo i passi che già sappiamo fare**	$y = x - 27$ $= 0,\overline{6}$	$y = x - a_0$ $= 0,\overline{p_1}$
moltiplico per 10 entrambi i membri che esprimono y	$10y = 6,\overline{6}$ $= 6 + 0,\overline{6}$ $= 6 + y$	$10y = p_1,\overline{p_1} = p_1 + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10y = 6 + y$	$10y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$9y = 6$	$9y = p_1$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{6}{9}$	$y = \frac{p_1}{9}$
sostituisco l'espressione di y nei termini di x	$x - 27 = \frac{6}{9}$	$x - a_0 = \frac{p_1}{9}$
metto in evidenza x e trovo una sua espressione in forma di frazione	$x = 27 + \frac{6}{9} = \frac{27 \cdot 9 + 6}{9}$ $\frac{27 \cdot (10-1) + 6}{9} = \frac{276 - 27}{9}$	$x = a_0 + \frac{p_1}{9} = \frac{9 \cdot a_0 + p_1}{9}$

- Scrivere in forma di frazione $y = 0,\overline{27}$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con parte intera nulla e periodo di lunghezza 1	$y = 0,\overline{27}$	$y = 0,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	$10^2y = 27,\overline{27}$ $= 27 + 0,\overline{27}$ $= 27 + y$	$10^k y$ $= p_1p_2 \dots . p_k,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$ $= p_1p_2 \dots . p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^2y = 27 + y$	$10^k y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^2 - 1)y = 27$	$(10^k - 1)y = p_1p_2 \dots . p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{27}{(10^2 - 1)} = \frac{27}{99}$	$y = \frac{p_1p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$

- Scrivere in forma di frazione $x = 5,\overline{32}$

	Esempio numerico	espressione letterale
forma decimale periodica semplice, con periodo di lunghezza k	$x = 5,\overline{32}$	$x = a_0,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$
sottraggo a x la parte intera per ottenere un numero periodico semplice con periodo di lunghezza k e parte intera nulla (come ne caso già trattato) **Per completezza, riportiamo i passi che già sappiamo fare**	$y = x - 5$ $= 0,\overline{32}$	$y = x - a_0$ $= 0,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$
moltiplico per 10^k entrambi i membri	$10^2y = 32,\overline{32}$ $= 32 + 0,\overline{32}$	$10^k y$ $= p_1p_2 \dots . p_k,\overline{p_1p_2 \dots . p_k}$ $= p_1p_2 \dots . p_k + y$
riscrivo lasciando solo i termini esterni della catena di uguaglianze	$10^2y = 32 + y$	$10^k y = p_1 + y$
raccolgo al primo membro i termini in y	$(10^3 - 1)y = 32$	$(10^k - 1)y = p_1p_2 \dots . p_k$
metto in evidenza y e ottengo una espressione di y in forma di frazione	$y = \frac{32}{(10^2 - 1)}$	$y = \frac{p_1p_1p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$
sostituisco l'espressione di y nei termini di x	$x - 5 = \frac{32}{(10^2 - 1)}$	$x - a_0 = \frac{p_1p_2 \dots . p_k}{(10^k - 1)}$

metto in evidenza x e trovo una sua espressione in forma di frazione	$x = 5 + \frac{32}{(10^2-1)} =$ $= \frac{5\cdot(10^2-1)+32}{99}$ $= \frac{500-5+32}{99}$ $= \frac{532-5}{99}$	$x = a_0 + \frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{(10^k-1)}$ $= \frac{10^k a_0 + p_1 p_2 \ldots p_k - a_0}{(10^k-1)}$