Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 8

Esercizio 1. Sia $F \subset E$ un'estensione di campi.

1. Sia $f \in F[x]$ un polinomio e sia sia $\alpha \in E$ una radice di f. Sia $\varphi \in Gal(E/F)$. Dimostrare che $\varphi(\alpha)$ è una radice di f.

2. Sia F un campo. A seconda della caratteristica di F, esiste un sottocampo K di F tale che $K \cong \mathbb{Q}$ oppure $K \cong \mathbb{Z}_p$ per un opportuno p primo. Dimostrare che se $\varphi \in Aut(F)$, allora φ è l'identità su K.

Esercizio 2. Sia $F \subset E$ un'estensione di campi, sia $f \in F[x]$ un polinomio irriducibile su F. Supponiamo che i due numeri $\deg(f)$ e $[E : F]$ siano primi tra di loro. Dimostrare che f è irriducibile anche su E.

Esercizio 3. Consideriamo l'estensione di campi $F \subset E$ con $F = \mathbb{Z}_2(x^2, y^2)$ ed $E = \mathbb{Z}_2(x, y)$. Qui con $\mathbb{Z}_2(x^2, y^2)$ intendiamo il sottocampo di $\mathbb{Z}_2(x, y)$ dato dagli elementi della forma

$$\frac{f(x^2, y^2)}{g(x^2, y^2)} \quad \text{con } f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{Z}_2(x, y)\,.$$

Dimostrare che non esiste $\alpha \in E$ tale che $E = F(\alpha)$.

Suggerimento: se un tale α esistesse, dimostrare che $\alpha^2 \in F$.

Esercizio 4. Usando il seguente criterio:

"Sia $q(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio per cui esiste un numero s primo tale che s divide a_i per $i = 0, \ldots, n-1$ ma s non divide a_n e s^2 non divide a_0, allora $q(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ (Criterio di Eisenstein). "

si dimostri che $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = (x^p - 1)/(x - 1)$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni numero primo p.

(Suggerimento: sostituire x con $x + 1$)