3.4 Fasci di iperpiani

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo le corrispondenti nozioni negli spazi proiettivi. Come vedremo, la situazione è semplificata, o meglio c'è un'unica nozione di fascio.

Definizione 3.4.1. Se $P \in \mathbb{P}^2$, diciamo *fascio di rette di centro* P l'insieme Φ_P di tutte e sole le rette del piano passanti per P.

La dimostrazione del seguente risultato è del tutto analoga a quella vista nel piano affine.

Proposizione 3.4.1. *Nel piano proiettivo* $\mathbb{P}^2$ *con coordinate* $[x_0, x_1, x_2]$, *siano* P *un punto,* $r: \ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ *e* $s: \ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ *due rette distinte per* P. *Allora il fascio di rette di centro* P *è dato da*

$$\Phi_P: \ \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Se si esprime Φ_P con la precedente equazione, le rette r e s si dicono ancora *generatori* del fascio. Il loro ruolo può essere attribuito a una qualunque coppia di rette distinte di Φ_P.

Osservazione 3.4.1. Si noti che la scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ è del tutto equivalente a quella usata nel caso affine: $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ovviamente, non si era utilizzata in quel contesto solo perché non si erano ancora introdotti gli spazi proiettivi.

Osservazione 3.4.2. La scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ ha un evidente vantaggio: permette di stabilire chiaramente una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ_P e i punti di $\mathbb{P}^1$. Infatti si verifica facilmente che, posta $r_{\lambda,\mu}$ la retta di Φ_P di equazione $\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$, l'applicazione

$$\Phi_P \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad r_{\lambda,\mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Questo dà un significato preciso all'espressione *"un fascio di rette nel piano è costituito da* ∞^1 *rette"*.

Esempio 3.4.1. Determiniamo il fascio di rette Φ_P dove $P = [1, 2, 3] \in \mathbb{P}^2$. Per fare questo, basta determinarne due generatori. Ad esempio,

$$r: \ 3x_0 - x_2 = 0, \quad s: \ 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Dunque

$$\Phi_P: \ \lambda(3x_0 - x_2) + \mu(3x_1 - 2x_2) = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1.$$

Come visto per lo spazio affine, è naturale definire la seguente nozione e il relativo risultato.

Definizione 3.4.2. Se $r \subset \mathbb{P}^3$ è una retta, diciamo *fascio di piani di sostegno* r l'insieme $\mathcal{F}_r$ di tutti e soli i piani dello spazio contenenti r.

Proposizione 3.4.2. *In* $\mathbb{P}^3$ *con coordinate* $[x_0, x_1, x_2, x_3]$*, si considerino la retta* r *e i due piani distinti* $\pi : \ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ *e* $\sigma : \ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ *contenenti* r*. Allora il fascio di piani di sostegno* r *è dato da*

$$\mathcal{F}_r : \ \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Con ovvie notazioni, posto $\pi_{\lambda,\mu}$ il generico piano del precedente fascio, si ha che l'applicazione

$$\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad \pi_{\lambda,\mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Quindi, anche in questo caso, possiamo dire che un fascio di piani nello spazio è costituito da ∞^1 piani.

Esempio 3.4.2. Determinare tutti i piani di $\mathbb{P}^3$ passanti per i punti $A = [1, 2, 3, 4]$ e $B = [-1, 5, 7, 0]$.
Chiaramente i piani richiesti sono tutti e soli quelli del fascio $\mathcal{F}_r$ di sostegno la retta r passante per A e B. Tale retta, determinata nell'Esempio 3.3.5, è

$$r : \quad \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 & = 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}_r : \quad \lambda(x_0 + 10x_1 - 7x_2) + \mu(20x_0 + 4x_1 - 7x_3) = 0.$$

Si osservi che abbiamo dato un'unica nozione di fascio (sia di rette che di piani) senza distinguere tra "propri" e "impropri". La ragione sarà chiara nel prossimo paragrafo.

Quanto visto si può generalizzare in uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, osservando che il *luogo base* (cioè l'insieme dei punti comuni a tutti i sottospazi del fascio) è un punto, nel caso delle rette di $\mathbb{P}^2$, e una retta, nel caso dei piani di $\mathbb{P}^3$. In entrambe le situazioni si tratta di un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Definizione 3.4.3. Sia $L \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione $n-2$ (i.e. di codimensione 2). Diciamo *fascio di iperpiani di sostegno* L l'insieme $\mathcal{F}_L$ di tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ contenenti L.

Proposizione 3.4.3. *Nello spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n$ *con coordinate* $[x_0, \dots, x_n]$, *si consideri il sottospazio proiettivo di codimensione* 2 *avente equazione cartesiana*

$$L: \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n &= 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n &= 0 \end{cases}.$$

Allora il fascio di iperpiani di sostegno L *è dato da*

$$\mathcal{F}_L: \ \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Esempio 3.4.3. Determinare tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}^4$ contenenti il sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$, dove W è il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \langle (1,0,1,0,1), (0,0,0,0,1), (1,2,0,0,0) \rangle.$$

Si verifica che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ (). Di conseguenza, $\dim L = 2$ e quindi $\operatorname{codim} L = 2$, pertanto gli iperpiani richiesti costituiscono il fascio $\mathcal{F}_L$ di iperpiani di $\mathbb{P}^4$ avente per sostegno L.
Troviamo l'equazione cartesiana di L col metodo descritto nell'Esempio 3.3.5, cioè imponiamo che il vettore $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia combinazione lineare dei generatori di W ovvero che

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Per il *Teorema dei minori orlati*, basta orlare un minore non degenere 3×3, ad esempio quello costituito dalle colonne $1-3-5$ (intersecate con le righe 2-3-4): i minori *orlanti* saranno dunque costituiti, rispettivamente, dalle colonne $1-2-3-5$ e $1-3-4-5$. I loro determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 - 2x_2, \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_3.$$

Quindi

$$L: \begin{cases} 2x_0 - x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\mathcal{F}_L: \ \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2) + \mu x_3 = 0.$$

3.5 Completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$

In questo paragrafo useremo queste notazioni: $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_K$, $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_K$, dove K è un campo.

Definizione 3.5.1. Gli $n+1$ iperpiani di $\mathbb{P}^n$

$$H_i : \quad x_i = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

sono detti *iperpiani coordinati*.

Osservazione 3.5.1. Ogni spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ con coordinate omogenee $[x_0, \ldots, x_n]$ può essere scritto come la seguente unione (disgiunta):

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0,$$

dove

$$H_0 := \{[[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} , \quad U_0 := \{[[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}.$$

Ovviamente H_0 è il primo iperpiano coordinato.

Osservazione 3.5.2. La precedente decomposizione di $\mathbb{P}^n$ può essere generalizzata a ogni iperpiano coordinato, cioè possiamo scrivere

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i,$$

dove

$$H_i := \{[[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\} , \quad U_i := \{[[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

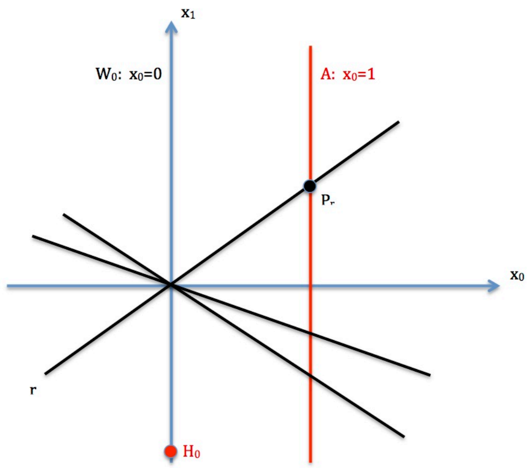
Considerando, ad esempio, la decomposizione $\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0$, mostriamo come costruire una corrispondenza biunivoca "naturale" tra U_0 e $\mathbb{A}^n$ nei casi $n = 1$, $n = 2$ e per n qualunque.

A tale scopo, si considereranno contemporaneamente $\mathbb{P}^n$ e il corrispondente spazio vettoriale K^{n+1}, tenendo presente che ogni iperpiano di $\mathbb{P}^n$ è il proiettivizzato di un iperpiano vettoriale di K^{n+1}. In particolare, l'iperpiano $H_0 \subset \mathbb{P}^n$ è il proiettivizzato dell'iperpiano $W_0 \subset K^{n+1}$, che ha anch'esso equazione $x_0 = 0$.

Completamento da $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{P}^1$

In questo caso, H_0 è il punto $[0,1] \in \mathbb{P}^1$. In K^2 si considerino i seguenti sottoinsiemi $W_0 : x_0 = 0$ (retta vettoriale) e $A : x_0 = 1$ (retta affine).
Ogni retta vettoriale $r = \langle v \rangle = [v] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ interseca la retta A in uno e un solo punto, che denotiamo con P_r. Questo definisce l'applicazione

$$\alpha : \quad \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^2 \quad \text{data da} \quad r \mapsto P_r := r \cap A.$$



Chiaramente α è biunivoca e, essendo la prima coordinata di ogni punto $r \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ non nulla, è definita da

$$r = [v_0, v_1] = \left[1, \frac{v_1}{v_0}\right] \quad \mapsto \quad P_r = \left(1, \frac{v_1}{v_0}\right) \in A.$$

Inoltre, definiamo la naturale applicazione (biunivoca)

$$\beta : \quad A \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad (1,t) \mapsto t.$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \quad \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1] \ \mapsto \ \frac{v_1}{v_0}$$

è ancora biunivoca e possiamo considerare la sua inversa che denotiamo con

$$j_0 : \quad \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad t \ \mapsto \ [1,t].$$

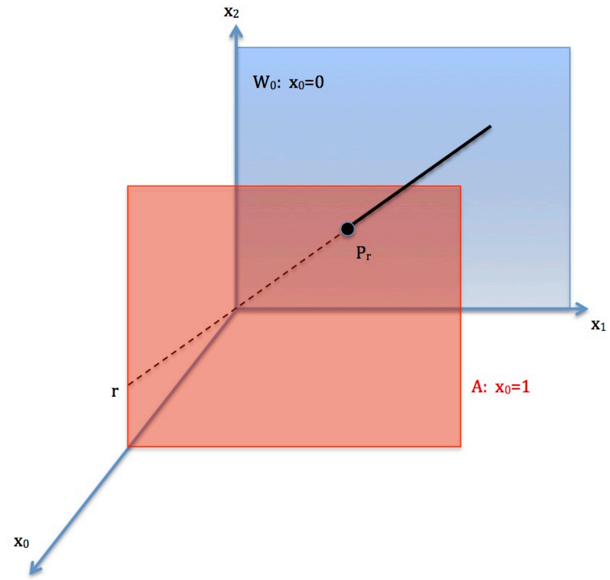
Tenendo conto delle notazioni introdotte nell'Osservazione 3.5.1, è chiaro che $j_0(\mathbb{A}^1) = U_0$ e si ha dunque

$$\mathbb{P}^1 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^1).$$

Definizione 3.5.2. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^1$ e che H_0 è il *punto all'infinito* di $\mathbb{A}^1$ (via l'immersione j_0).

Completamento da $\mathbb{A}^2$ a $\mathbb{P}^2$

In K^3 consideriamo il piano vettoriale $W_0: \; x_0 = 0$ e il piano $A: \; x_0 = 1$



Si osservi che $H_0 = \mathbb{P}(W_0)$ e definiamo, come prima, l'applicazione biunivoca

$$\alpha : \quad \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^3$$

definita da

$$r = [v_0, v_1, v_2] \mapsto P_r := r \cap A = \left(1, \frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

e anche l'applicazione (biunivoca)

$$\beta : \quad A \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad (1, t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2).$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \quad \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1, v_2] \; \mapsto \; \left(\frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

è ancora biunivoca. Si consideri la sua inversa

$$j_0 : \quad \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad (t_1, t_2) \; \mapsto \; [1, t_1, t_2].$$

Si ha dunque

$$\mathbb{P}^2 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^2)$$

In questo caso l'iperpiano H_0 è una retta.

Definizione 3.5.3. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^2$ e che H_0 è la *retta all'infinito* o *retta impropria* di $\mathbb{A}^2$ (via l'immersione j_0). I suoi punti si dicono *punti impropri*.

Completamento da $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$

Quanto visto si generalizza naturalmente a una dimensione qualunque col seguente risultato la cui dimostrazione (una semplice verifica) è lasciata al lettore.

Proposizione 3.5.1. *Si consideri lo spazio affine* $\mathbb{A}^n$ *con coordinate* $(y_1, \dots, y_n)$ *e lo spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n$ *con coordinate omogenee* $[x_0, x_1, \dots, x_n]$.
L'applicazione

$$j_0 : \quad \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0 = U_0$$

definita da

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$$

è biunivoca e la sua inversa

$$j_0^{-1} : \quad U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

è definita da

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Definizione 3.5.4. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^n$ e che H_0 è *l'iperpiano all'infinito* di $\mathbb{A}^n$ (via j_0).

Osservazione 3.5.3. Tenendo conto dell'Osservazione 3.5.2, operando come nella costruzione appena vista, si possono introdurre le analoghe applicazioni biunivoche $j_1, j_2, \dots, j_n$

$$j_i : \quad \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_i = U_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e le corrispondenti carte affini

$$U_i = \{[x_0 \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = j_i(\mathbb{A}^n) \cong \mathbb{A}^n.$$

Quindi

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i = H_i \cup j_i(\mathbb{A}^n) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e dunque $\mathbb{A}^n$ si può immergere in $\mathbb{P}^n$ in (almeno!) $n+1$ modi.
Si osservi infine che

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

e tale scrittura viene detta *ricoprimento* di $\mathbb{P}^n$ con carte affini (o *atlante affine*).

Osservazione 3.5.4. Nel seguito, utilizzeremo sempre il completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$ mediante j_0 e, identificando in tal modo U_0 con $\mathbb{A}^n$, scriveremo con un leggero abuso di notazione

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n.$$

I punti di $\mathbb{P}^n$ che sono affini si diranno *punti propri* mentre quelli appartenenti all'iperpiano H_0 sono *punti impropri*. In particolare, ogni punto di $\mathbb{A}^n$ ha, oltre alle sue coordinate affini, anche delle coordinate omogenee. Viceversa, ogni punto di $\mathbb{P}^n$ che abbia la prima coordinata omogenea non nulla, ha anche delle coordinate affini.

Il passaggio dalle coordinate affini a quelle omogenee (e viceversa) è determinato dalla Proposizione 3.5.1.

Esempio 3.5.1. Come visto, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup H_0$, dove $H_0 = \{[0,1]\}$ consiste di un solo punto: il punto all'infinito della retta affine. Inoltre, se $P = (t) \in \mathbb{A}^1$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, t]$.
Viceversa, se $Q = [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^1$. Qui ha coordinata $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)$.

Esempio 3.5.2. Come sopra, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup H_0$, dove la retta all'infinito H_0 ha equazione $x_0 = 0$. Inoltre, se $P = (x, y) \in \mathbb{A}^2$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, x, y]$.
Viceversa, se $Q = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2$. Qui ha coordinate affini $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$.

Chiusura proiettiva

In questa sezione utilizziamo le notazioni introdotte sopra, dunque le coordinate affini $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{A}^n$, le coordinate omogenee $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ di $\mathbb{P}^n$ e il completamento

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n,$$

dove $H_0 : \ x_0 = 0$.

Definizione 3.5.5. Sia H l'iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di equazione

$$H : \quad a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n + b = 0.$$

Diciamo *chiusura proiettiva* di H l'iperpiano di $\mathbb{P}^n$ di equazione

$$\overline{H} : \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b x_0 = 0.$$

Proposizione 3.5.2. *Se H è un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di chiusura proiettiva $\overline{H} \subset \mathbb{P}^n$, allora*

$$H = \overline{H} \cap \mathbb{A}^n.$$

Inoltre $H_\infty := \overline{H} \setminus H$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 2 in $\mathbb{P}^n$ e precisamente

$$H_\infty = \overline{H} \cap H_0.$$

Dimostrazione. Sia $H:\ a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$ e sia $P = (Y_1, \dots, Y_n)$ un punto di H. Dunque vale l'identità $a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n + b = 0$.
D'altra parte, per la Proposizione 3.5.1, le coordinate omogenee di P sono $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ e quindi banalmente soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{H}:\quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + bx_0 = 0$.
Questo prova che $H \subset \overline{H}$ e quindi che $H \subset \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$.
Viceversa, sia $P = (Y_1, \dots, Y_n) \in \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$. Dunque le sue coordinate omogenee $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{H}$, cioè vale l'identità $a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n + b = 0$. Questo equivale al fatto che le coordinate affini soddisfano l'equazione di H e quindi $P \in H$.
Resta da provare l'ultima affermazione, cioè che

$$\overline{H} \setminus H = \overline{H} \cap H_0.$$

Si osservi che

$$\overline{H} = \overline{H} \cap \mathbb{P}^n = \overline{H} \cap (\mathbb{A}^n \cup H_0) = (\overline{H} \cap \mathbb{A}^n) \cup (\overline{H} \cap H_0) = H \cup (\overline{H} \cap H_0)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata provata sopra. Pertanto si ha la tesi. □

Come conseguenza si ha dunque la decomposizione

$$\overline{H} = H \cup H_\infty$$

dove H è l'insieme dei punti propri di $\overline{H}$ e H_∞ è l'insieme dei punti impropri di $\overline{H}$.

Definizione 3.5.6. Il sottospazio proiettivo H_∞ è detto *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di H.

Esercizio P3. Siano H un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ e T un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. Provare che, se $H \subset T$, allora $T = \overline{H}$.

Osservazione 3.5.5. Se H è l'iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di equazione

$$H:\quad a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

allora il suo sottospazio improprio è

$$H_\infty:\quad \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases}.$$

Esempio 3.5.3. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^2$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}^2$ e il suo punto improprio r_∞, dove

$$r:\ 3x + 2y - 1 = 0.$$

Per quanto visto

$$\overline{r}:\ 3x_1 + 2x_2 - x_0 = 0$$

e

$$r_\infty:\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r_\infty = [0, 2, -3].$$

Esempio 3.5.4. Dato il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\overline{\pi} \subset \mathbb{P}^3$ e la sua retta impropria π_∞ (in equazione cartesiana e in equazione parametrica), dove

$$\pi : \ 3x + y - 5z + 3 = 0.$$

Per quanto visto

$$\overline{\pi} : \ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_0 = 0$$

$$\pi_\infty : \ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} x_0 & = & 0 \\ x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & -3\lambda + 5\mu \\ x_3 & = & \mu \end{cases}$$

Dall'Osservazione 3.5.5 si ha il seguente fatto.

Corollario 3.5.3. *Due iperpiani paralleli H e H' di $\mathbb{A}^n$ hanno lo stesso sottospazio improprio, i.e. $H_\infty = H'_\infty$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, gli iperpiani H e H' hanno equazioni del tipo

$$H : \quad a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

e

$$H' : \quad a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b' = 0$$

Per l'Osservazione 3.5.5 si ha immediatamente la tesi. □

Proposizione 3.5.4. *Se H è un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di giacitura W allora*

$$H_\infty \cong \mathbb{P}(W).$$

Dimostrazione. Se $H : \ a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0 = 0$ allora per l'Osservazione 3.5.5

$$H_\infty : \quad \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases}.$$

D'altra parte, la giacitura di H è il sottospazio vettoriale di K^n di equazione

$$W : \ a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$$

e le rette vettoriali di W sono del tipo $\langle v \rangle$, dove il vettore $v = (v_1, \ldots, v_n)$ verifica l'uguaglianza $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. Quindi è naturale definire

$$\alpha : \quad H_\infty \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

in questo modo: per ogni punto $P = [0, x_1, \ldots, x_n] \in H_\infty$ (cioè tale che $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$) si pone $\alpha(P) := [x_1, \ldots, x_n]$. Si verifica immediatamente che α è ben definita (cioè non dipende dalla scelta del rappresentante delle coordinate omogenee di P) ed è biunivoca. □

La nozione di chiusura proiettiva si generalizza in modo naturale a un qualunque sottospazio affine.

Ricordando il sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione 3.1.7), introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.5.7. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine. Si dice *chiusura proiettiva* di S il sottospazio proiettivo $L(S)$ e si denota con $\overline{S}$, i.e.

$$\overline{S} := \bigcap_{\mathbb{P}(U)\supset S} \mathbb{P}(U).$$

Si dice inoltre *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di S l'insieme

$$S_\infty := \overline{S} \setminus S.$$

Dall'Esercizio P3 segue facilmente ( ) che, nel caso in cui S stesso sia un iperpiano, la definizione di chiusura proiettiva data sopra coincide con quella data nella Definizione 3.5.6.

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente utile risultato.

Proposizione 3.5.5. *Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine e siano $H_1, \dots, H_s$ iperpiani tali che $S = H_1 \cap \cdots \cap H_s$. Allora la chiusura proiettiva di S è il sottospazio proiettivo*

$$\overline{S} = \overline{H}_1 \cap \cdots \cap \overline{H}_s.$$

Inoltre il sottospazio all'infinito di S è

$$S_\infty = (H_1)_\infty \cap \cdots \cap (H_s)_\infty = \mathbb{P}(W),$$

dove W è la giacitura di S.

Esempio 3.5.5. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}^3$ e il suo punto improprio r_∞, dove

$$r: \begin{cases} x + 2y - z + 2 & = 0 \\ 3x + z + 1 & = 0 \end{cases}.$$

Per la Proposizione 3.5.5 si ha

$$\overline{r}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_0 & = 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_0 & = 0 \end{cases}$$

e

$$r_\infty: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ 3x_1 + x_3 & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 & = & 0 \\ x_2 & = & -2x_1 \\ x_3 & = & -3x_1 \end{cases}$$

e quindi $r_\infty = [0, 1, -2, -3]$.

Esercizio P4. Generalizzare il Corollario 3.5.3 a sottospazi affini di qualunque dimensione, cioè se $S, T \subset \mathbb{A}^n$ sono due sottospazi affini paralleli con $\dim S \leq \dim T$ allora $S_\infty \subseteq T_\infty$.

Fasci proiettivizzati

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato i fasci di iperpiani nello spazio affine $\mathbb{A}^n$, suddividendoli in "propri" e "impropri": i primi avevano in comune un sottospazio affine di codimensione 2 (ad esempio, i fasci propri di rette nel piano di centro un punto) e i secondi avevano in comune una giacitura (ad esempio, un fascio improprio di rette nel piano, tutte parallele a una retta data). Tale distinzione viene a cessare nella Geometria Proiettiva.

Definizione 3.5.8. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di iperpiani in $\mathbb{A}^n$. Diciamo suo *fascio proiettivizzato* l'insieme di iperpiani di $\mathbb{P}^n$ dato da

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{H} \subset \mathbb{P}^n \mid H \in \mathcal{F}\}.$$

Osservazione 3.5.6. Se $\mathcal{F}$ è un fascio proprio di iperpiani di sostegno un sottospazio affine L (con $\operatorname{codim}(L) = 2$) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\overline{L}$.
Se invece $\mathcal{F}$ è un fascio improprio di iperpiani di giacitura W (con W iperpiano vettoriale di K^n) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\mathbb{P}(W) \subset H_0$.

Esempio 3.5.6. Si consideri il fascio di rette in $\mathbb{A}^2$ dato da

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$$

e sia $\overline{\mathcal{F}}$ il suo fascio proiettivizzato. Determinare una equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ (in coordinate omogenee) e il suo centro.
Chiaramente $\overline{\mathcal{F}}$ ha come generatori le chiusure proiettive dei generatori di $\mathcal{F}$ e dunque l'equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{P}^2$ è

$$\overline{\mathcal{F}}: \quad \lambda(x_1 + x_2 - 3x_0) + \mu(2x_1 - x_2) = 0.$$

Pertanto il centro di $\overline{\mathcal{F}}$ è il punto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 2].$$

Esempio 3.5.7. Come l'esercizio precedente, ma riguardo al fascio di piani in $\mathbb{A}^3$ (con coordinate affini (x, y, z)) dato da

$$\mathcal{F}: \quad x + y + t = 0.$$

Conviene scrivere $\mathcal{F}$ utilizzando due parametri omogenei invece dell'unico parametro non omogeneo, cioè $\mathcal{F}: \lambda(x + y) + \mu = 0$. Dunque

$$\overline{\mathcal{F}}: \quad \lambda(x_1 + x_2) + \mu x_0 = 0.$$

Pertanto il sostegno di $\overline{\mathcal{F}}$ è la retta r intersezione dei 2 piani generatori

$$r: \begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_0 & = 0 \end{cases}.$$

Si noti che r non è la proiettivizzata di alcuna retta dello spazio affine, in quanto essa giace nel piano all'infinito.

(Scrivere una equazione parametrica di r).

3.6 Proiettività

Introduciamo ora le applicazioni "opportune" nella categoria degli spazi proiettivi.

Definizione 3.6.1. Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi della stessa dimensione. Diciamo che un'applicazione

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

è un *isomorfismo proiettivo* se esiste un isomorfismo di K-spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow V'$ tale che, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$f(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle.$$

Equivalentemente, posta $\pi : V \setminus \{0_V\} \to \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$ (e definita analogamente π'), f è un isomorfismo proiettivo se il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0_V\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \setminus \{0_{V'}\} \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}(V') \end{tikzcd}$$

è commutativo. Diremo inoltre che f è l'*isomorfismo proiettivizzato di* φ o che è *indotto da* φ. Scriveremo anche $f = \overline{\varphi}$.

Chiaramente f è univocamente individuato da φ, ma non viceversa, come vedremo.

Esercizio P5. Provare che un isomorfismo proiettivo è ben definito ed è biiettivo.

Definizione 3.6.2. Due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$. In tal caso scriveremo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V')$.

Esercizio P6. Provare che la composizione di isomorfismi proiettivi è ancora un isomorfismo proiettivo e precisamente che $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \overline{\varphi \circ \psi}$.
Provare inoltre che se f è un isomorfismo proiettivo, anche f^{-1} lo è e precisamente che $(\overline{\varphi})^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$.

Proposizione 3.6.1. *Se* $\mathbb{P}(V)$ *uno spazio proiettivo di dimensione* n *allora* $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n_K$.

Dimostrazione. Per un noto risultato di Algebra Lineare, $V \cong K^{n+1}$, cioè esiste un isomorfismo di K-spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow K^{n+1}$. Se $f := \overline{\varphi}$, allora $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ è un isomorfismo proiettivo, come volevamo. □

Per come è definito un isomorfismo proiettivo indotto da un isomorfismo lineare, si ha facilmente il seguente fatto.

Osservazione 3.6.1. Sia $\varphi : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo di K-spazi vettoriali. Allora, per ogni $\lambda \in K^*$, gli isomorfismi φ e $\lambda\varphi$ inducono lo stesso isomorfismo proiettivo, i.e.

$$\overline{\varphi} = \overline{\lambda\varphi}.$$

Per verificare che

$$\overline{\varphi} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V') \quad \text{e} \quad \overline{\lambda\varphi} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

coincidono, bisogna provare che, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$, si verifica

$$\overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \overline{\lambda\varphi}(\langle v \rangle).$$

Dalla Definizione 3.6.1 si ha che

$$\overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle \quad \text{e} \quad \overline{\lambda\varphi}(\langle v \rangle) = \langle (\lambda\varphi)(v) \rangle.$$

Ma $\langle (\lambda\varphi)(v) \rangle = \langle \lambda\varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v) \rangle$, come volevamo.

È naturale chiedersi se valga il viceversa. La risposta è affermativa, ma non immediata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 3.6.2. *Siano $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$ due isomorfismi di K-spazi vettoriali. Se $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$ come isomorfismi proiettivi da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V')$, allora esiste $\lambda \in K^*$ tale che*

$$\psi = \lambda\varphi.$$

Dimostrazione. Per ipotesi e per definizione, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ si ha

$$\langle \varphi(v) \rangle = \overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \overline{\psi}(\langle v \rangle) = \langle \psi(v) \rangle.$$

Pertanto esiste uno scalare $\lambda_v \in K^*$, dipendente da v, tale che

$$\psi(v) = \lambda_v \varphi(v).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri si ottiene

$$\varphi^{-1}(\psi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda_v \varphi(v)) = \lambda_v v.$$

Quindi v è un autovettore di $\varphi^{-1} \circ \psi$: ciò accade per ogni $v \in V$ e dunque, necessariamente, $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un'omotetia. Dunque esiste $\lambda \in K^*$ (indipendente da v) tale che $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \, \mathrm{Id}_V$, da cui $\psi = \lambda\varphi$, come volevamo. $\square$

Come abbiamo fatto per gli spazi affini, focalizzeremo la nostra attenzione a isomorfismi che hanno uguale dominio e codominio. La nozione analoga all'affinità (introdotta nel Capitolo 1) è dunque la seguente.

Definizione 3.6.3. Si dice *proiettività* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ un isomorfismo proiettivo
$$f:\ \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V).$$

È evidente che $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è una proiettività. Dunque per l'Esercizio P6 si ha immediatamente che l'insieme

$$\{f:\ \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V) \mid f \text{ è una proiettività}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione.

Definizione 3.6.4. Tale gruppo si dice *gruppo delle proiettività* di $\mathbb{P}(V)$ e si denota con $PGL(\mathbb{P}(V))$. In particolare, invece di $PGL(\mathbb{P}^n_K)$, scriveremo $PGL(n+1, K)$ che viene detto *gruppo proiettivo lineare generale.*

Proposizione 3.6.3. *Se V è un K-spazio vettoriale, l'applicazione*

$$\alpha:\ GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V)) \quad \textit{data da} \quad \varphi \mapsto \overline{\varphi}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Inoltre $\ker(\alpha) = Om(V)$*, il gruppo delle omotetie di V. Conseguentemente*

$$PGL(\mathbb{P}(V)) \cong GL(V)/Om(V).$$

<u>Dimostrazione</u>. Poiché, per definizione, ogni proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è individuata da un isomorfismo lineare di V, l'applicazione α è suriettiva.
Inoltre, per l'Esercizio P6, α è un omomorfismo di gruppi.
Resta da determinare il suo nucleo, cioè

$$\ker(\alpha) = \{\varphi \in GL(V) \mid \overline{\varphi} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}\}.$$

È evidente che $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} = \overline{\mathrm{Id}_V}$. Quindi, per l'Osservazione 3.6.1 e il Teorema 3.6.2, si ha che

$$\overline{\varphi} = \overline{\mathrm{Id}_V} \iff \exists \lambda \in K^* \mid \varphi = \lambda\, \mathrm{Id}_V \iff \varphi \in Om(V).$$

□

Il problema di determinare le equazioni di una proiettività è facilmente risolubile: basti pensare che ogni $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$ è del tipo $f = \overline{\varphi}$ per un'opportuna $\varphi \in GL(V)$. Nel caso particolare (che non è restrittivo, per la Proposizione 3.6.1) in cui $V = K^{n+1}$ e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n_K$, l'omomorfismo α si esplicita come

$$\alpha:\ GL(n+1, K) \longrightarrow PGL(n+1, K) \quad \text{data da} \quad M \mapsto [M].$$

Se, fissata una base $\mathcal{B}$ di V e posta $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, l'equazione di φ è

$$Y = MX,$$

allora l'equazione di $f = \overline{\varphi}$ (rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{B}$ di $\mathbb{P}(V)$) è

$$\rho Y = MX$$

dove $\rho \in K^*$. Diremo che M è la *matrice associata a f rispetto al riferimento* $\mathcal{B}$, intendendo che è determinata a meno di una costante non nulla (più precisamente a f è associata una classe di equivalenza $[M]$ di matrici, tutte proporzionali a M).

Esempio 3.6.1. Determinare tutte e sole le proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tali che $f(A_i) = B_i$, con $i = 1, 2, 3$, dove

$$A_1 = [1,0,0], \quad A_2 = [0,1,0], \quad A_3 = [0,0,1]$$

$$B_1 = [1,1,0], \quad B_2 = [1,0,1], \quad B_3 = [0,1,1].$$

Per determinare una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ associata a f, imponiamo le 3 condizioni precedenti sulla generica matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cioè (intendendo le coordinate dei punti scritte per colonne):

$$\rho B_i = M A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ad esempio, dalla prima si ha

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

In modo analogo si impongono le altre due condizioni, ottenendo

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

In tal modo si è determinata una famiglia di ∞^3 matrici che soddisfano i requisiti richiesti. Di conseguenza tutte le proiettività cercate costituiscono la famiglia di ∞^2 elementi

$$\left\{ [M] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

La domanda che nasce naturalmente dal precedente Esempio è: quanti punti sono necessari per individuare univocamente una proiettività?

La risposta è nel seguente risultato, analogo a quello della *Determinazione di un'affinità mediante punti* (vedi Capitolo 1, Teorema 1.11.6).

Teorema 3.6.4 (Teorema fondamentale sulle proiettività)**.**
Si considerino due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, entrambi di dimensione n. Se $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ sono due $(n+2)$-uple di punti in posizione generale, allora esiste un'unico isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza di f.
Siano $v_i \in V$ e $w_i \in V'$ vettori tali che $P_i = [v_i]$ e $Q_i = [w_i]$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n+1$. Per ipotesi, $v_0, \dots, v_n$ sono una base di V e quindi si può scrivere

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n \tag{3.3}$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Analogamente

$$w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \cdots + \mu_n w_n \tag{3.4}$$

dove i μ_i sono tutti non nulli.
Siano ora $\mathcal{B} := (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$ e $\mathcal{B}' := (\mu_0 w_0, \dots, \mu_n w_n)$: chiaramente sono ancora basi di V e V', rispettivamente. Per un noto risultato di Algebra Lineare, esiste un unico isomorfismo di K-spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V' \quad \text{tale che} \quad \varphi(\lambda_i v_i) = \mu_i w_i, \ \forall i = 0, \dots, n.$$

Di conseguenza, per (3.3) e (3.4), vale anche

$$\varphi(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Pertanto, posto $f := \overline{\varphi}$, si ha che f è un isomorfismo proiettivo e verifica

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1.$$

Proviamo ora l'unicità di f.
Supponiamo che esista un isomorfismo proiettivo

$$f' : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f'(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Poniamo $g := (f')^{-1} \circ f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$. Se mostriamo che $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, concluderemo che $f' = f$.
A tale scopo, osserviamo dapprima che, per l'Esercizio P6, g risulta una proiettività e quindi è indotta da un automorfismo ψ di V. Equivalentemente, $g = \overline{\psi}$. Si noti che $g(P_i) = P_i$, per $i = 0, 1, \ldots, n+1$ e questo implica che $\psi(v_i) = \rho_i v_i$, per opportuni scalari $\rho_i \in K^*$, per $i = 0, 1, \ldots, n+1$.
In particolare, $\psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1}$. Inoltre,

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n \tag{3.5}$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Quindi, per la linearità di ψ si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) = \psi(\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 \psi(v_0) + \cdots + \lambda_n \psi(v_n) = \\ = \lambda_0 \rho_0 v_0 + \cdots + \lambda_n \rho_n v_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, sempre da (3.5), si ha

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1} = \rho_{n+1}(\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n) = \\ = \lambda_0 \rho_{n+1} v_0 + \cdots + \lambda_n \rho_{n+1} v_n. \end{aligned}$$

Confrontando le due precedenti espressioni di $\psi(v_{n+1})$ e tenendo conto del fatto che $v_0, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_0 \rho_0 & = & \lambda_0 \rho_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n \rho_n & = & \lambda_n \rho_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 - \rho_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_n - \rho_{n+1} & = & 0 \end{cases}$$

dove l'implicazione segue dal fatto che i λ_i sono tutti non nulli.
Quindi tutti i ρ_i coincidono e ponendo

$$\rho := \rho_0 = \cdots = \rho_{n+1},$$

si ha che $\psi(v_i) = \rho v_i$, per ogni i. Di conseguenza, $\psi = \rho\, \mathrm{Id}_V$ è un'omotetia e quindi $g = \overline{\psi} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, come volevamo. □

Esempio 3.6.2. Dal precedente teorema segue che per determinare una proiettività di $\mathbb{P}^n$ servono due $n+2$-uple di punti in posizione generale. Ad esempio, per determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2$ servono due quaterne di punti in posizione generale.

Consideriamo la situazione dell'Esempio 3.6.1: abbiamo determinato tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^2$ tali che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3$. Se alle 2 terne date aggiungiamo $A_4 = [1, 1, 1] = B_4$, poiché le due quaterne A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4 sono in posizione generale, troveremo un'unica proiettività tale che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Chiaramente basta imporre l'ultima condizione $f(A_4) = B_4$ alla famiglia determinata nell'Esempio 3.6.1, che risultava essere costituita dalle matrici

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

Tale condizione si esprime imponendo

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + \sigma \\ \rho + \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sigma = \tau.$$

Pertanto le matrici richieste sono

$$M = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che è associata a un'unica proiettività di $\mathbb{P}^2$ (come affermato dal Teorema 3.6.4).

Osservazione 3.6.2. *(non banale)* Si confronti il Teorema 3.2.2 col Teorema 3.6.4 (e tenendo presente il Teorema 3.6.2). Il primo si può riformulare dicendo che la scelta di un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di un isomorfismo proiettivo $\rho\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ che mette in corrispondenza i rispettivi punti fondamentali ed i punti unità, che a sua volta equivale alla scelta dei punti fondamentali (ordinati) e del punto unità.

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.6.5. Due sottoinsiemi X e X' di $\mathbb{P}^n$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^n$ tale che $f(X) = X'$.

Dal Teorema fondamentale sulle proiettività segue immediatamente questo risultato.

Corollario 3.6.5. *Due r-uple di punti di $\mathbb{P}^n$ in posizione generale sono proiettivamente equivalenti se $1 \leq r \leq n+2$.*