Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.8

30 aprile 2025

1) Si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di rette di centro $[2, -2+i, 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Determinare la retta $r \in \mathcal{F}$ che passa per il punto $[1, 1, 1]$. Determinare anche le equazioni cartesiane del fascio e della retta in questione nel piano affine (a meno di j_0).

2) Si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di rette di centro $[0, 4, 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Determinare la retta $r \in \mathcal{F}$ che passa per il punto $[-3, 0, 2]$. Determinare anche le equazioni cartesiane del fascio e della retta in questione nel piano affine (a meno di j_0).

3) Determinare la chiusura proiettiva della retta $t\colon 3ix - 2y - i + 1 = 0$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ e calcolare le coordinate omogenee del suo punto improprio.

4) In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano L passante per i punti $[1, -1, 0, 0]$, $[1, 1, 1, 0]$ e $[2, 1, 0, -2]$. Determinare l'equazione di L e della sua parte affine (cioè $L \cap \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ a meno di j_0).

5) Siano $S, T \subset \mathbb{A}^n$ due sottospazi affini e $\overline{S}, \overline{T} \subset \mathbb{P}^n$ le rispettive chiusure proiettive. Provare che $S \subseteq T$ implica $\overline{S} \subseteq \overline{T}$. Provare inoltre che $S_\infty \subseteq T_\infty$.

6) Dimostrare che ogni $g \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ ha almeno un punto fisso.

7) Dimostrare che ogni $g \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ ammette almeno un punto fisso se n è pari.

8) Trovare controesempi all'esercizio precedente per ogni n dispari.

9) Si consideri la proiettività $f \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i punti fissi di f. Scrivere la matrice di f rispetto ad un sistema di riferimento proiettivo nel quale i punti fondamentali sono i punti fissi (il punto unità può essere scelto arbitrariamente).

10) Consideriamo l'immersione $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ data da j_0 e sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$. Dimostrare che esiste un'unica proiettività $\widehat{f} \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ che estende f e se ne determini la matrice in un opportuno riferimento proiettivo. Dedurne che esiste un monomorfismo di gruppi $\psi\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$.

Viceversa, data $g \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$, dire sotto quali condizioni esiste $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ tale che $g = \widehat{f}$, e nel caso determinarne le equazioni.