

9

SFORZO ASSIALE ECCENTRICO

A. A. 2024-2025
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

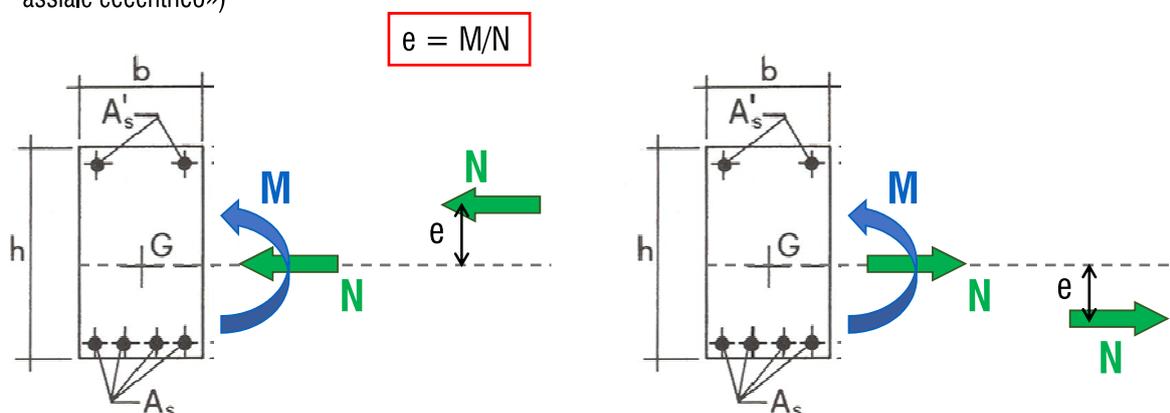
Sforzo assiale eccentrico

FLESSIONE COMPOSTA

Una sezione è soggetta a flessione composta quando è sollecitata:

- **azione assiale** centrata nel baricentro (azione di compressione o di trazione)
- **momento flettente**

La combinazione di queste due sollecitazioni può anche essere vista come un'**azione assiale agente in posizione eccentrica «e» rispetto al baricentro** (per questo si parla indifferentemente di «flessione composta» o «sforzo assiale eccentrico»)



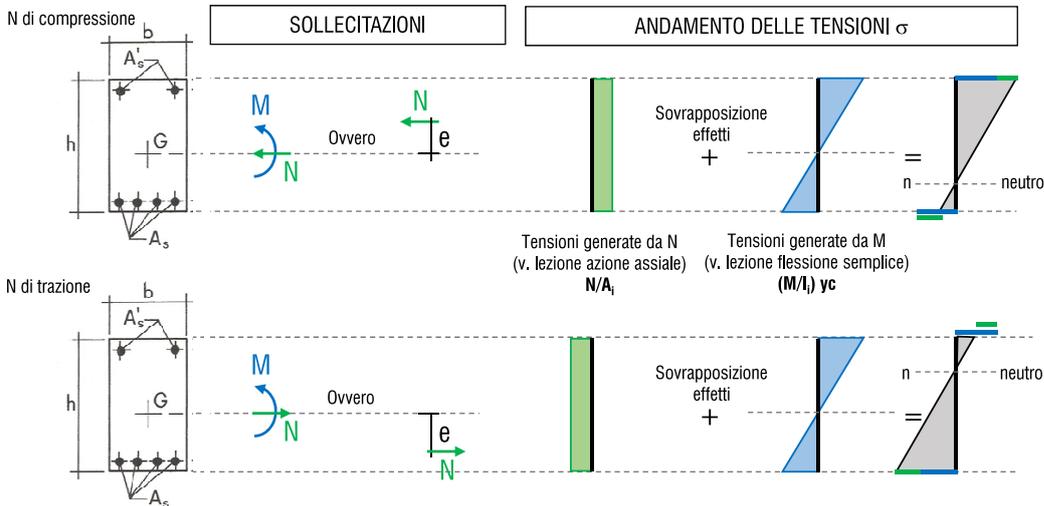
Se l'azione assiale è nulla ($N=0$), ci si riconduce al caso della flessione semplice

STADIO I

Caso di sezione **interamente reagente**

IPOSTESI: 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-clt (congruenza)
 3) Materiali in campo elastico (clt elastico lineare, acciaio elastico lineare)

Per il calcolo delle tensioni si applica la sovrapposizione degli effetti assiale e flessionale:



Tensioni nel calcestruzzo:

$$\sigma_c = \pm \frac{N}{A_i} - \frac{M}{I_i} y_c$$

Tensioni nelle barre di armatura:

$$\sigma_s = \alpha_e \left[\pm \frac{N}{A_i} - \frac{M}{I_i} y_s \right]$$

I momenti d'inerzia vanno calcolati con riferimento all'**asse baricentrico della sezione omogeneizzata**

L'asse neutro (ovvero dove $\sigma=0$) si sposta dalla posizione baricentrica e, in particolare:

- verso le fibre tese, per N di compressione;
- verso le fibre compresse, se N è di trazione.

La sezione è interamente reagente (Stadio I) fintanto che il calcestruzzo non si fessura a trazione o (visto che la resistenza a trazione del clt è molto piccola) fintanto che ho tensioni di sola compressione sulla sezione. Questo si verifica se l'eccentricità «e» è piccola, cioè **se N cade all'interno del nocciolo d'inerzia** della sezione, ovvero **$e < u$** . Si parla in questo caso di **PICCOLA ECCENTRICITÀ**

Se **$e > u$** , la sezione si parzializza: **N cade al di fuori del nocciolo d'inerzia** si parla di **GRANDE ECCENTRICITÀ**

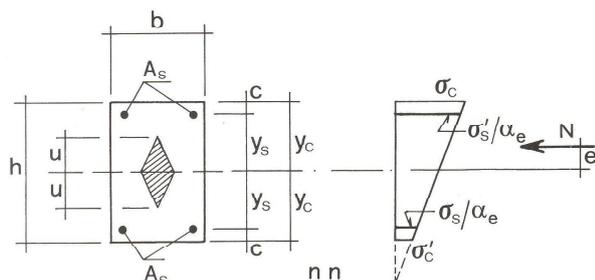
$$u = \frac{i^2}{h/2}$$

$$i^2 = \frac{I_i}{A_i}$$

(i raggio d'inerzia)

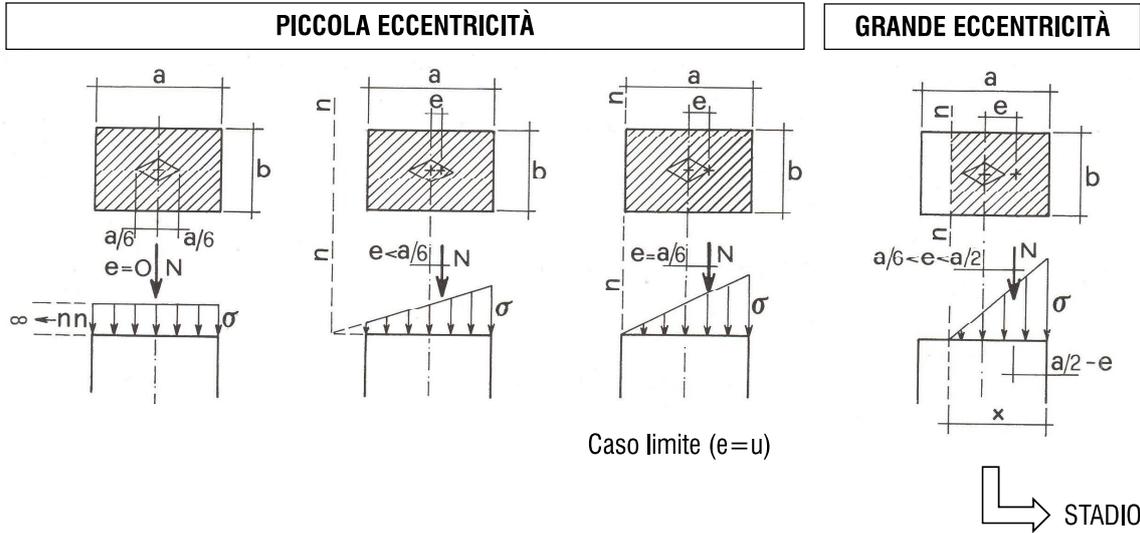
$$A_i = A_c + \alpha_e A_{s,tot} = hb + \alpha_e 2A_s$$

$$I_i = A_c \frac{h^2}{12} + \alpha_e A_{s,tot} y_s^2$$



In assenza di armatura

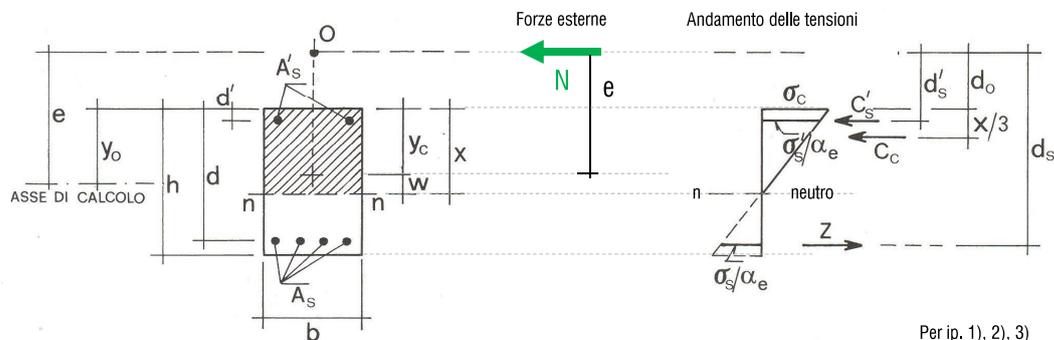
$$u = \frac{i^2}{h/2} = \frac{I_i}{A_i h/2} = \frac{2bh^3}{12bh^2} = \frac{h}{6}$$



STADIO II

Caso di sezione **parzializzata** (calcestruzzo fessurato a trazione)

- IPTESI:** 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-clc (congruenza)
 3) Calcestruzzo elastico lineare a compressione, acciaio elastico lineare
 4) Calcestruzzo fessurato a trazione



Per ip. 1), 2), 3)

$$d_o = e - y_c$$

$$d'_s = d_o + d'$$

$$d_s = d_o + d$$

Risultante delle compressioni nel cls

$$C_c = \frac{1}{2} \sigma_c b x$$

Risultante delle trazioni nelle barre inferiori

$$Z = \sigma_s A_s$$

Risultante delle compressioni nelle barre superiori

$$C'_s = \sigma'_s A'_s$$

$$\sigma'_s = \alpha_e \frac{x - d'}{x} \sigma_c$$

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{d - x}{x} \sigma_c$$

- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al punto O e sostituiamo:

$$C_c \left(d_o + \frac{x}{3} \right) + C'_s d'_s - Z d_s = 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d_o + \frac{x}{3} \right) + \alpha_e \frac{x - d'}{x} \sigma_c A'_s d'_s - \alpha_e \frac{d - x}{x} \sigma_c A_s d_s = 0$$

$$x^3 + 3 d_o x^2 + \frac{6 \alpha_e}{b} (A_s d_s + A'_s d'_s) x - \frac{6 \alpha_e}{b} (A_s d_s d + A'_s d'_s d') = 0$$

Ricaviamo la posizione dell'asse neutro x

- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale e sostituiamo:

$$C_c + C'_s - Z = N$$

$$\frac{1}{2} \sigma_c b x + \alpha_e \frac{x - d'}{x} \sigma_c A'_s - \alpha_e \frac{d - x}{x} \sigma_c A_s = N$$

$$\sigma_c = \frac{N}{\frac{1}{x} \left[\frac{b x^2}{2} + \alpha_e (x - d') A'_s - \alpha_e (d - x) A_s \right]}$$

Momento statico della sezione ideale parzializzata omogenizzata (S_i), valutato rispetto all'asse neutro

$$\sigma_c = \frac{N}{S_i} x$$

Tensioni nel calcestruzzo

Da cui possiamo ricavare anche quelle nelle armature, mediante

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{d - x}{x} \sigma_c \quad \sigma'_s = \alpha_e \frac{x - d'}{x} \sigma_c$$



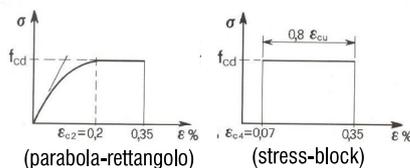
STADIO III

Per la resistenza allo **STATO LIMITE ULTIMO**

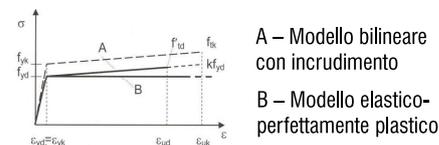
- IPTOTESI:**
- 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 - 2) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 - 3) Cla con legame parabolico rettangolare a compressione, acciaio elasto-plastico
 - 4) Calcestruzzo fessurato a trazione

RICHIAMO AI MODELLI COSTITUTIVI SEMPLIFICATI (v. lezione sui materiali)

- Per calcestruzzo a compressione

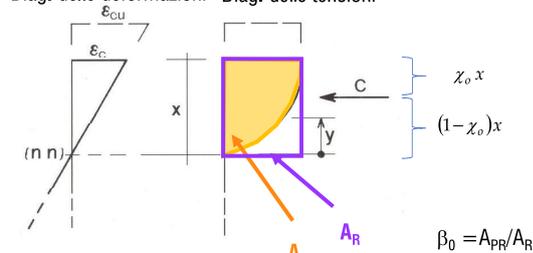


- Per l'acciaio d'armatura



SEZIONE PARZIALIZZATA

Diag. delle deformazioni Diag. delle tensioni



- Se il cla ha raggiunto la sua deformazione ultima al lembo compresso ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$), allora $\sigma_c = f_{cd}$, $\chi \sim 0.4$ e $\beta_0 \sim 0.8$
- Se il cla **NON** ha raggiunto la sua deformazione ultima al lembo compresso ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$), allora $\sigma_c < f_{cd}$
 $\chi = 0.33 + 0.07 \bar{\epsilon}_c$ $\beta = (1.6 - 0.8 \bar{\epsilon}_c) \bar{\epsilon}_c$ $\bar{\epsilon}_c = \epsilon_c / \epsilon_{cu}$



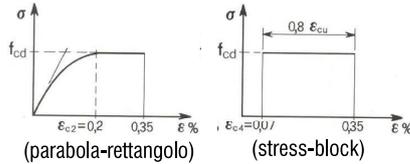
STADIO III

Per la resistenza allo **STATO LIMITE ULTIMO**

- IPOSTESI:** 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 3) Cla con legame parabolico rettangolare a compressione, acciaio elasto-plastico
 4) Calcestruzzo fessurato a trazione

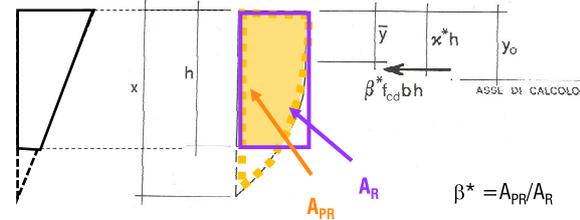
RICHIAMO AI MODELLI COSTITUTIVI SEMPLIFICATI
 (v. lezione sui materiali)

- Per calcestruzzo a compressione



SEZIONE INTERAMENTE REAGENTE (tutta compressa)

Diag. delle deformazioni Diag. delle tensioni



- Il cla ha raggiunto la sua deformazione ultima al lembo compresso ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$)

$$\beta^* = 1 - \frac{(1-\bar{\eta})^3}{3(\xi-\bar{\eta})^2} \quad x^* = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(1-\bar{\eta})^3}{6(\xi-\bar{\eta})^2} (3-\bar{\eta}) \right] \frac{1}{\beta^*}$$

$$\xi = x/h (>1) \quad \bar{\eta} = \bar{y}/h (\cong 0.43)$$

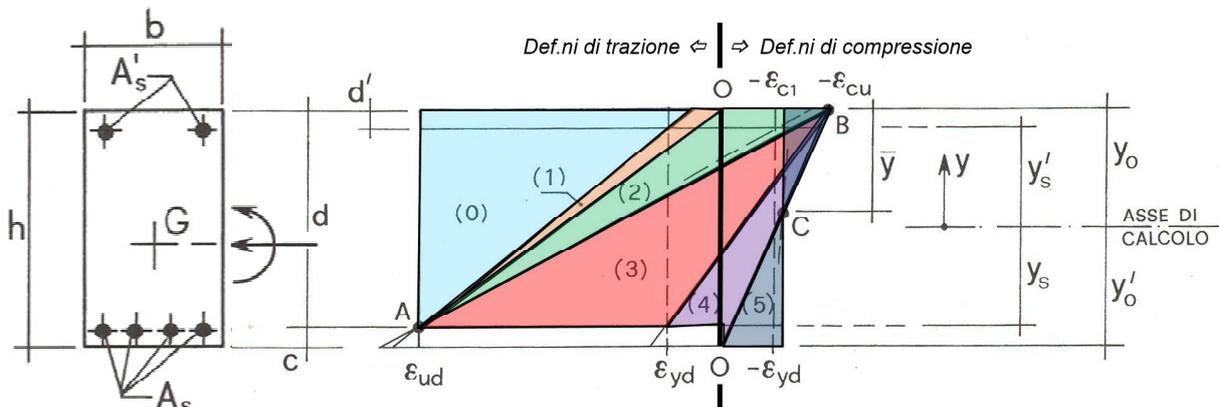
Campi di rottura

Il collasso allo SLU di una sezione soggetta a flessione composta avviene quando il momento sollecitante supera il momento resistente.

Il momento resistente (assieme alla posizione dell'asse neutro) si determinano, al solito, scrivendo le equazioni di equilibrio alla rotazione (es. attorno al baricentro) e alla traslazione tra forze interne ed esterne.

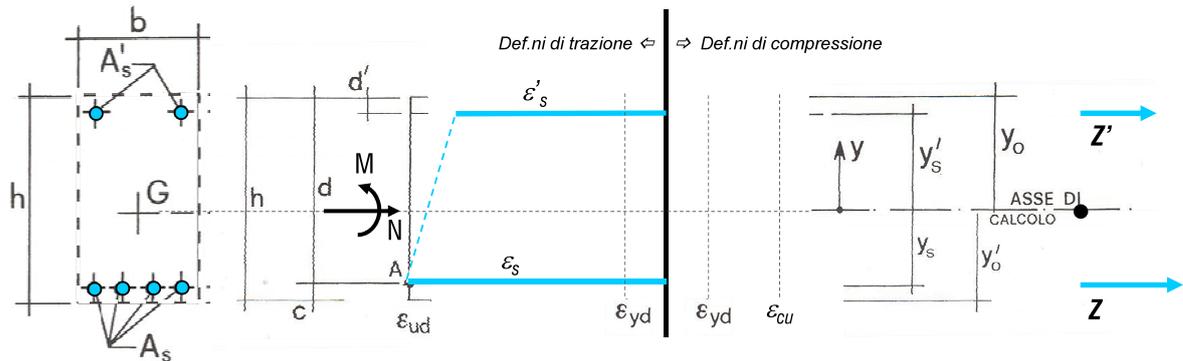
Per poter scrivere e risolvere tali equazioni è necessario conoscere in che stato di sollecitazione si trovano i materiali (es. barre in campo elastico o snervate? calcestruzzo in campo elastico o già schiacciato?).

Siccome, a priori, tale stato di sollecitazione non è noto, si devono fare delle ipotesi: a ipotesi diverse corrispondono diversi CAMPI DI ROTTURA.



Campo di rottura 0

Hp: Il calcestruzzo è interamente fessurato, le armature inferiori e superiori sono tese e snervate ($\epsilon_s = \epsilon_{ud}$, $\epsilon_{yd} < \epsilon'_s < \epsilon_{ud}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

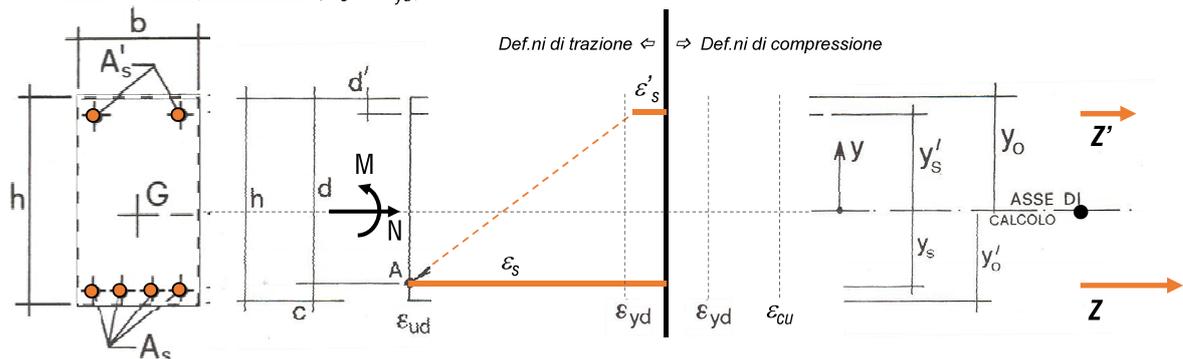
$$Z \cdot y_s - Z' \cdot y'_s = M \rightarrow f_{yd} A_s y_s - f_{yd} A'_s y'_s = M$$

- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$Z + Z' = N \rightarrow f_{yd} A_s + f_{yd} A'_s = N$$

Campo di rottura 1

Hp: Il calcestruzzo è interamente fessurato, le armature inferiori sono tese e snervate ($\epsilon_s = \epsilon_{ud}$), le armature superiori sono tese e in campo elastico ($\epsilon'_s < \epsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

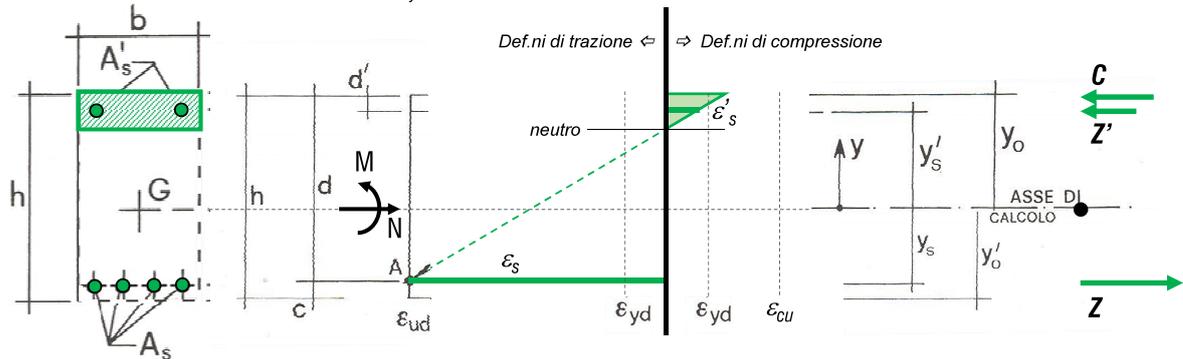
$$Z \cdot y_s - Z' \cdot y'_s = M \rightarrow f_{yd} A_s y_s - E_s \epsilon'_s A'_s y'_s = M$$

- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$Z + Z' = N \rightarrow f_{yd} A_s + E_s \epsilon'_s A'_s = N$$

Campo di rottura 2'

Hp: Il calcestruzzo è parzializzato, le armature inferiori sono tese e snervate ($\varepsilon_s = \varepsilon_{ud}$), le armature superiori sono comprese e in campo elastico ($\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow f_{yd} A_s y_s - E_s \varepsilon'_s A'_s y'_s - \int_A \sigma_c(\varepsilon) b y dy = M$$

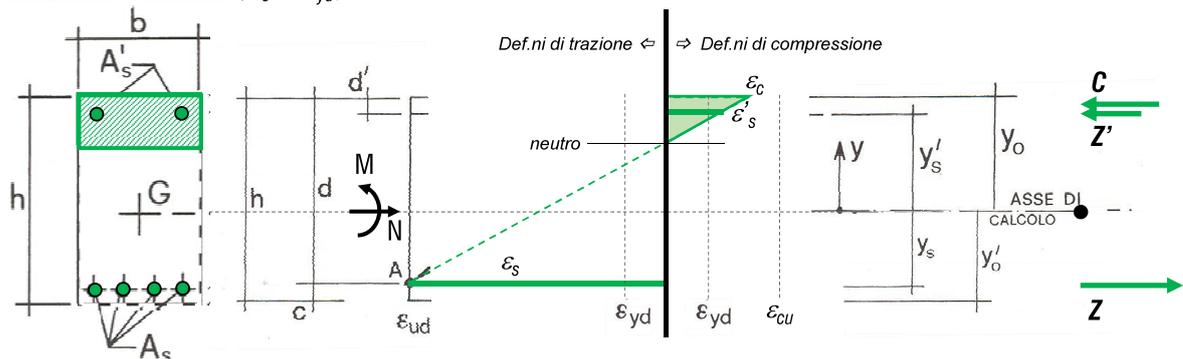
- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$Z - Z' - C = N \rightarrow f_{yd} A_s + E_s \varepsilon'_s A'_s + \int_A \sigma_c(\varepsilon) b dy = N$$

σ_c e ε'_s si intendono con segno negativo, poiché di compressione

Campo di rottura 2''

Hp: Il calcestruzzo è parzializzato, le armature inferiori sono tese e snervate ($\varepsilon_s = \varepsilon_{ud}$), le armature superiori sono comprese e snervate ($\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow f_{yd} A_s y_s + f_{yd} A'_s y'_s - \int_A \sigma_c(\varepsilon) b y dy = M$$

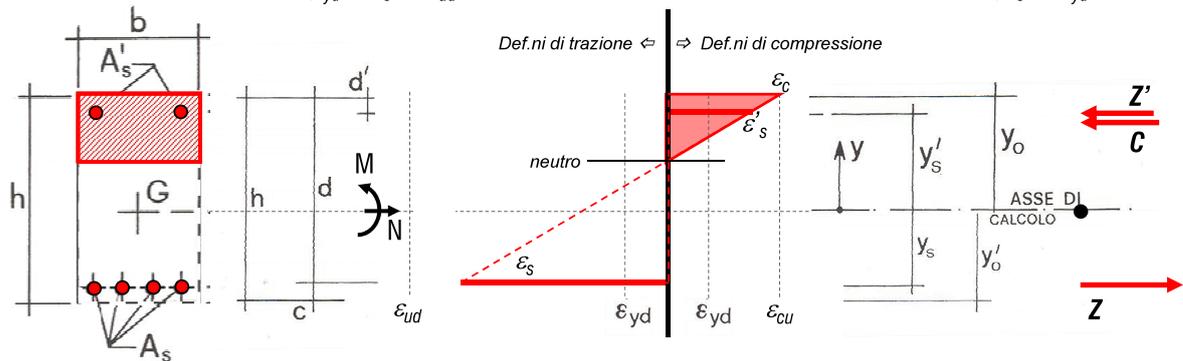
- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$Z - Z' - C = N \rightarrow f_{yd} A_s - f_{yd} A'_s + \int_A \sigma_c(\varepsilon) b dy = N$$

σ_c si intende con segno negativo poiché di compressione

Campo di rottura 3

Hp: Il calcestruzzo è parzializzato e ha raggiunto la deformazione ultima a compressione ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$), le armature inferiori sono tese e snervate ($\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{ud}$), le armature superiori sono comprese e snervate ($\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow f_{yd} A_s y_s + f_{yd} A'_s y'_s - \int_B \sigma_c(\varepsilon) b y dy = M$$

- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

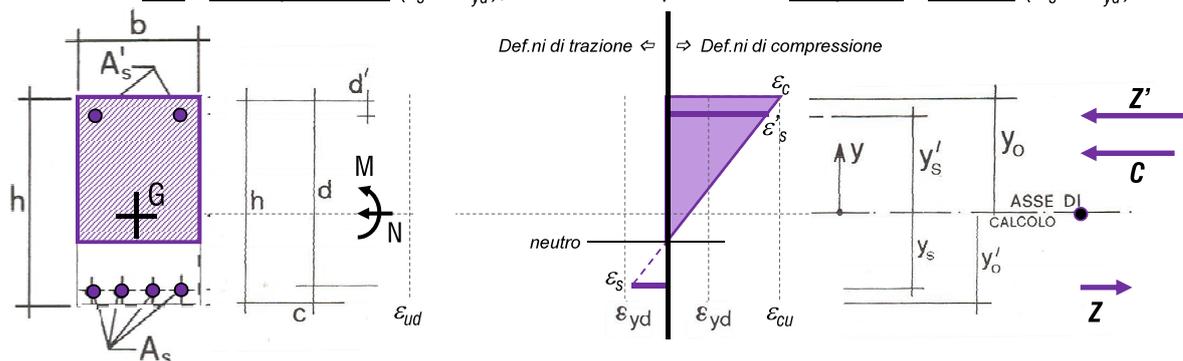
$$Z - Z' - C = N \rightarrow f_{yd} A_s - f_{yd} A'_s + \int_B \sigma_c(\varepsilon) b dy = N$$

σ_c si intende con segno negativo poiché di compressione



Campo di rottura 4

Hp: Il calcestruzzo è parzializzato e ha raggiunto la deformazione ultima a compressione ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$), le armature inferiori sono tese e in campo elastico ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$), le armature superiori sono comprese e snervate ($\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow E_s \varepsilon_s A_s y_s + f_{yd} A'_s y'_s - \int_B \sigma_c(\varepsilon) b y dy = M$$

- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

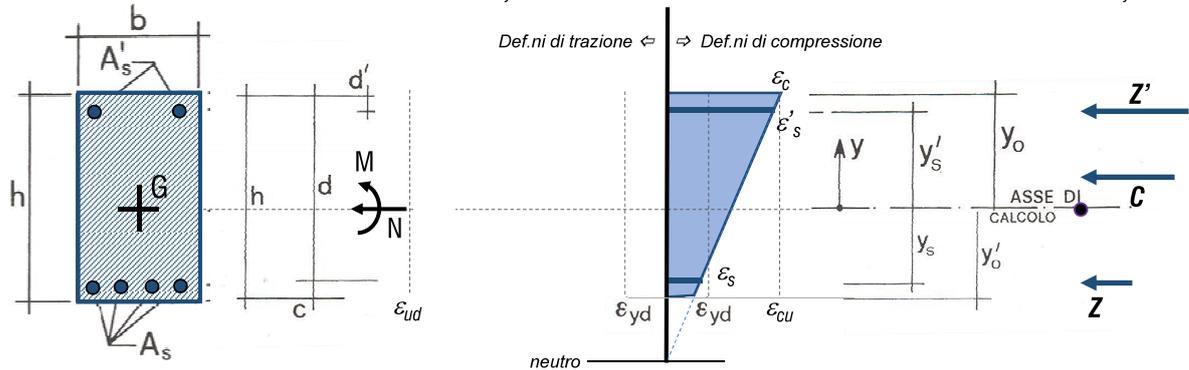
$$Z - Z' - C = N \rightarrow E_s \varepsilon_s A_s - f_{yd} A'_s + \int_B \sigma_c(\varepsilon) b dy = N$$

σ_c si intende con segno negativo poiché di compressione



Campo di rottura 5'

Hp: Il calcestruzzo è interamente reagente e ha raggiunto la deformazione ultima a compressione ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$), le armature inferiori sono comprese e in campo elastico ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$), le armature superiori sono comprese e snervate ($\epsilon'_s > \epsilon_{yd}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

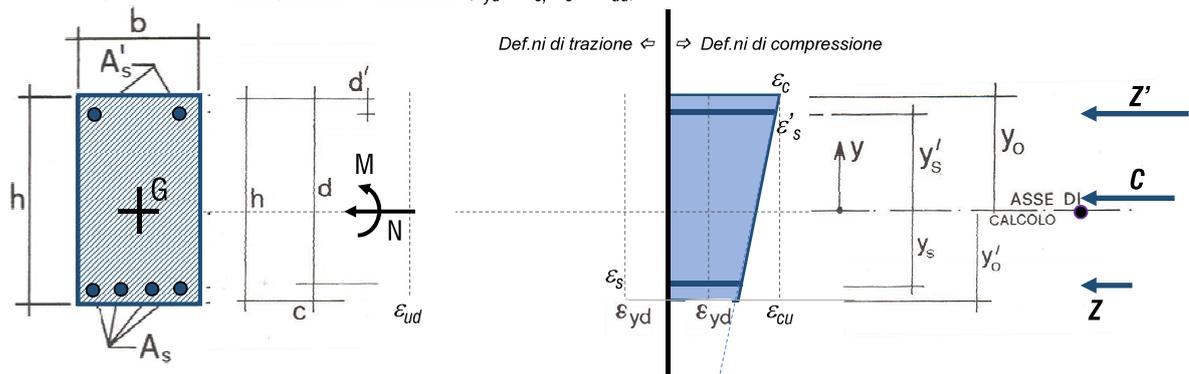
$$-Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow E_s \epsilon_s A_s y_s + f_{yd} A'_s y'_s - \int_C \sigma_c(\epsilon) b y dy = M$$
- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$-Z - Z' - C = N \rightarrow E_s \epsilon_s A_s - f_{yd} A'_s + \int_C \sigma_c(\epsilon) b dy = N$$

σ_c, ϵ_s si intendono con segno negativo poiché di compressione

Campo di rottura 5''

Hp: Il calcestruzzo è interamente reagente e ha raggiunto la deformazione ultima a compressione ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$), le armature inferiori e superiori sono comprese e snervate ($\epsilon_{yd} < \epsilon_s, \epsilon'_s < \epsilon_{ud}$)



- Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$-Z \cdot y_s + Z' \cdot y'_s + C \cdot y_c = M \rightarrow -f_{yd} A_s y_s + f_{yd} A'_s y'_s - \int_C \sigma_c(\epsilon) b y dy = M$$
- Scriviamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$-Z - Z' - C = N \rightarrow -f_{yd} A_s - f_{yd} A'_s + \int_C \sigma_c(\epsilon) b dy = N$$

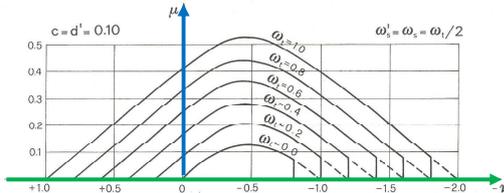
σ_c si intende con segno negativo poiché di compressione

Diagrammi di interazione (adimensionalizzati)

Riguardando le equazioni scritte nelle precedenti slides ci accorgiamo che, nel caso di flessione composta, M_{Rd} non è un valore unico che dipende solo dalle caratteristiche della sezione (come avevamo trovato nel caso di flessione semplice), ma **dipende anche dall'azione assiale agente, N_{Ed}** .

È pertanto più corretto scrivere la verifica a flessione composta come $M_{Ed} \leq M_{Rd}(N_{Ed})$.

Sezione simmetrica e armature simmetriche ($A_s = A'_s$)



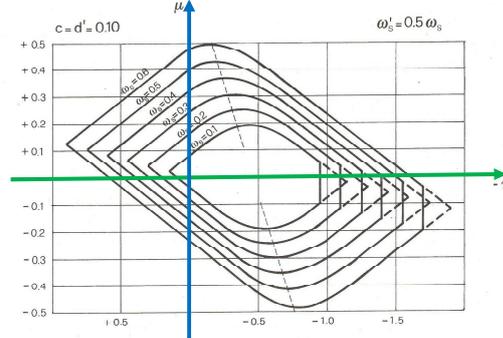
$$\mu = \frac{M}{f_{cd} b h^2}$$

Percentuale meccanica di armatura

$$\omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} b h}$$

$$\nu = \frac{N}{f_{cd} b h}$$

Sezione simmetrica e armature non simmetriche ($A'_s = 0.5A_s$)



Flessione semplice: $N=0 \rightarrow \nu = 0$ (asse delle ordinate)



Esempio di verifica a flessione composta per via grafica

Note le sollecitazioni M_{Ed} , e N_{Ed} (da analisi dei carichi)

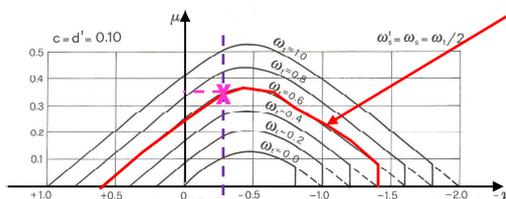
Note le caratteristiche dei materiali (scelta progettuale)

Note le caratteristiche della sezione (pre-dimensionamento)

1) Calcolo ν

2) Calcolo ω_s

Sezione simmetrica e armature simmetriche ($A_s = A'_s$)



3) Identifico il dominio di resistenza associato a ω_s

4) Identifico ν relativo al mio N_{Ed}

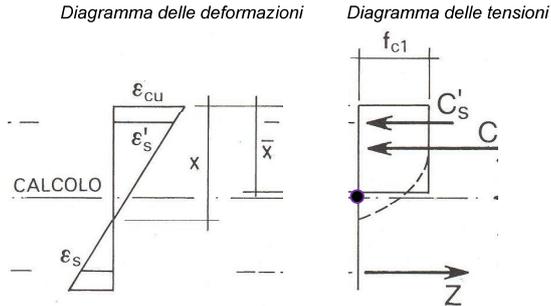
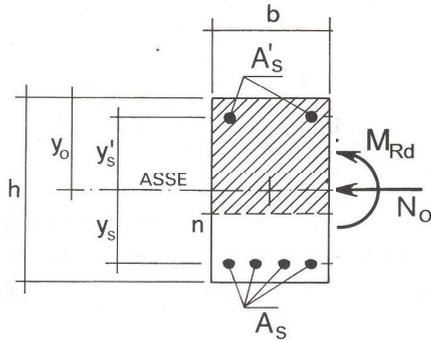
5) All'intersezione, leggo in ordinata il valore di μ e, quindi di $M_{Rd}(N_{Ed})$

6) Eseguo la verifica, cioè $M_{Ed} < M_{Rd}(N_{Ed})$

Le verifiche vanno condotte ovviamente previa l'introduzione dei **coefficienti di sicurezza parziali**, per abbattere le resistenze dei materiali ed amplificare l'intensità dei carichi. **Attenzione**, però, che l'azione assiale N_{Ed} può avere un effetto diminutivo o incrementativo di M_{Rd} e, di conseguenza, va amplificata o no, a seconda dei casi.



Esempio di verifica per via analitica



Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e dall'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$\begin{cases} C + C'_s - Z = N_o \\ C(y_o - \bar{x}/2) + C'_s y'_s + Z y_s = M_{Rd} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{cd} b \bar{x} + f_{yd} A'_s - f_{yd} A_s = N_o \\ f_{cd} b \bar{x} (y_o - \bar{x}/2) + f_{yd} A'_s y'_s + f_{yd} A_s y_s = M_{Rd} \end{cases}$$

Si ricavano:

$$\bar{x} = \frac{N_o + f_{yd} A_s - f_{yd} A'_s}{f_{cd} b}$$

Supponendo barre snervate:
va verificato ed eventualmente corretto con

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s = E_s \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu}$$

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_o) = f_{cd} b \bar{x} (y_o - \bar{x}/2) + f_{yd} A'_s y'_s + f_{yd} A_s y_s$$



PRESSOFLESSIONE DEVIATA

La verifica della sezione in c.a. soggetta a pressoflessione deviata può essere condotta per via puramente numerica sulla base di una rappresentazione analitica approssimata del locale settore interessato della frontiera di rottura.

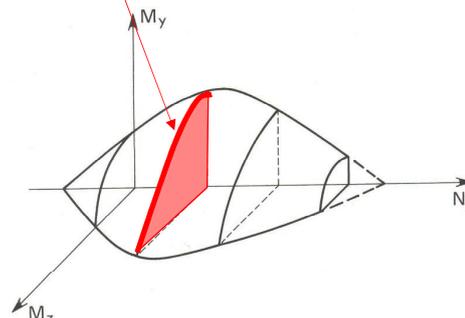
Per sezioni a doppia simmetria (di forma e di armatura) si può porre:

$$\left(\frac{M_y}{M_{Ryd}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_z}{M_{Rzd}} \right)^\alpha = 1 \quad 1 \leq \alpha \leq 1.5$$

formula che rappresenta la frontiera di rottura per $N_{Ed} = \text{cost.}$

M_y, M_z : componenti di momento sollecitante M_{Ed} attorno agli assi principali d'inerzia della sezione (assi di simmetria);

M_{Ryd}, M_{Rzd} : momenti M_{Rd} resistenti di flessione retta attorno agli assi principali d'inerzia della sezione (assi di simmetria), che dipendono da N_{Ed} .



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.

