

Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025

Foglio di esercizi 8

Prof. Valentina Beorchia

2 maggio 2025

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard, e supponiamo che i suoi due autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ siano distinti, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di autovettori associati ai due autovalori.

(a) Si dimostri che se $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, per ogni $v \in \mathbb{S}^1$ si ha

$$|\lambda_1| \leq \|f(v)\| \leq |\lambda_2|,$$

e vale $\|f(v)\| = |\lambda_i|$ se e solo se $v = \pm v_i$.

Suggerimento: si scriva il generico $v \in \mathbb{S}^1$ nella forma $v = \cos \alpha v_1 + \sin \alpha v_2$.

(b) Si consideri la forma quadratica associata a f :

$$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = f(v) \cdot v,$$

e supponiamo che $\lambda_1 < \lambda_2$.

Si dimostri che per ogni $v \in \mathbb{S}^1$ si ha

$$\lambda_1 \leq Q(v) \leq \lambda_2,$$

e vale $Q(v) = \lambda_i$ se e solo se $v = \pm v_i$.

2. Si consideri il cilindro circolare retto $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Si determini $N(S)$, l'immagine della mappa di Gauss.

Si calcolino, inoltre, curvatures e direzioni principali nel punto generico di S .

3. Sia $S = \{(x, y, z) | z = x^2 + ky^2\}$ con $k > 0$ (S è un paraboloido) e si fissi un'orientazione (ovvero un campo di vettori normali) di S . In $P = (0, 0, 0)$ si calcolino curvatures e direzioni principali. Che tipo di punto è P ?
4. Sia $S = \{(x, y, z) | z = xy\}$. Si determini $N(S)$, l'immagine della mappa di Gauss. Si calcolino, inoltre, curvatures e direzioni principali nel punto $P = (0, 0, 0)$.
5. Sia S il grafico di una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si esprima la mappa di Weingarten in termini delle derivate prime e delle derivate seconde di f , si determini la matrice di tale mappa nella base del piano tangente indotta dalla parametrizzazione $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ e la si confronti con la matrice hessiana di f .