Lezione 30 aprile 2025

mercoledì 30 aprile 2025 09:03

Visto: Prima forma fond.

$I_p : T_pS \longrightarrow R$; $f: U \to S$, $f(U) \ni p$

$I_p(v) = v \cdot v$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ matrice I_p in $\{\partial_u f, \partial_v f\}$

$R \subseteq S$ regione chiusa limitata connessa ; $R \subseteq f(U)$

$$A(R) = \iint_Q \|\partial_u f \wedge \partial_v f\| \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{EF - G^2} \, du \, dv$$

$Q = f^{-1}(R)$

OSS. Se si cambia parametizz.

$\psi : V \to S$, $\psi(U) \supseteq R$

la matrice $\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}$ di I_p relat. a ψ

è CONGRUENTE a $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, cioè

$\exists \, M \in GL(2)$ invertibile t.c.

$$\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = {}^tM \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot M$$

$$\det \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = \det({}^tM) \cdot \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \det M \overset{!}{=} (\det M)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

infatti se M è matrice di cambio di base:

$$I_p(\lambda' \partial_{u'} \psi + \mu' \partial_{v'} \psi) = (\lambda' \ \mu') \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = {}^t\left(M \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right) \overset{!}{=} (\lambda \ \mu) \cdot \underbrace{{}^tM \cdot \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \cdot M}_{} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda' \partial_{u'} \psi + \mu' \partial_{v'} \psi = \lambda \partial_u f + \mu \partial_v f$$

Comunque:

$$\psi = (\psi \circ f^{-1}) \circ f$$
$$\qquad\quad h$$

$$\partial_{u'} \psi \wedge \partial_{v'} \psi = (\partial_u f \wedge \partial_v f) \cdot \det J(h)$$

$$\|\partial_{u'} \psi \wedge \partial_{v'} \psi\| = \underbrace{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\| \, |\det J(h)|}_{}$$

$$\iint_{Q'} \|\partial_{u'} \psi \wedge \partial_{v'} \psi\| \, du' \, dv' = \iint_{Q'} \qquad du' \, dv'$$

$$Q' = \psi(R) \qquad \overset{!}{=} \iint_Q \|\partial_u f \wedge \partial_v f\| \, du \, dv$$

~ . ~ . ~

Vogliamo ora "misurare" la variaz. di T_pS al variare di p; scegliamo di studiare variazione di N(p).

Ricordo: localmente $\exists$ sempre

$f: U \to S$

$N : \underset{\subseteq S}{f(U)} \to \mathbb{R}^3$

$$N(p) = \frac{\partial_u f(q) \wedge \partial_v f(q)}{\|\partial_u f(q) \wedge \partial_v f(q)\|}$$

$q = f^{-1}(p)$

$$\boxed{N = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\underbrace{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}_{\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}} = N(u, v) \quad \text{è } \mathcal{C}^\infty$$

OSS.: $N : f(U) \subseteq S \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Domanda: N è differenziabile?

In generale

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "F"] & S' \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ U \arrow[u, "f"] \arrow[r] \arrow[r, bend left] & V \end{tikzcd} \quad \mathcal{C}^\infty$$

F è diff. $\iff \psi^{-1} \circ F \circ f$ è $\mathcal{C}^\infty$

Nel nostro caso: $N: f(U) \subseteq S \to \mathbb{S}^2$

$$\begin{tikzcd} f(U) \\ U \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Cons. le par. di MONGE di $\mathbb{S}^2$

$\psi_1 : U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{S}^2$

$(x, y) \to (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$

$\psi_2 \qquad (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$

$\psi_3 \qquad (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$

$\psi_4 \qquad (x, -\sqrt{}, y)$

$\psi_5 \qquad (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$

$\psi_6 \qquad (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$

ψ_1^{-1} è la proiezione sulle prime due coordinate

ψ_2^{-1} —"—

ψ_3^{-1} è proi. su prima e terza coordinata

⋮

$$\Longrightarrow \psi_i^{-1} \circ \underbrace{N \circ f}_{N(u,v)} = \text{proiezione di } N \circ f \text{ su 2 delle 3 coordinate} \Rightarrow \text{è } \mathcal{C}^\infty$$

$\Longrightarrow$ Possiamo cons. il DIFFERENZ. di N

$N : f(U) \subseteq S \to \mathbb{S}^2$

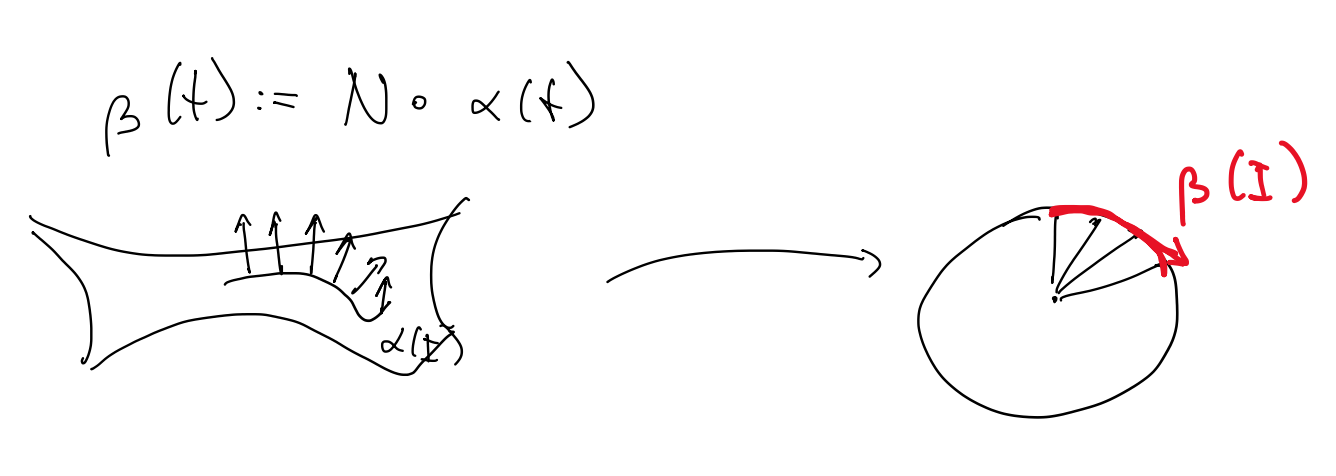
$dN_p : T_pS \to T_{N(p)} \mathbb{S}^2$

$dN_p(v) := \beta'(0)$, dove

$v = \alpha'(0)$, $\alpha : I \to S$, $\alpha(0) = p$, $\alpha(I) \subseteq f(U)$

$\alpha : I \to f(U) \xrightarrow{N} \mathbb{S}^2$

$\beta(t) := N \circ \alpha(t)$



dN_p non dipende dalla scelta di α

In generale: se $F : S \to S'$ è $\mathcal{C}^\infty$

$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$ con $\alpha: I \to f(U)$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$

la definizione non dipende dalla scelta di α.

Infatti: se $(u(t), v(t)) := f^{-1} \circ \alpha(t)$

si ha $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$

Se $\psi : V \to S'$ è param. t.c.

$F(f(U)) \subseteq \psi(V)$

si ha $F \circ \alpha(t) = \psi \circ \underbrace{\psi^{-1} \circ F \circ f}_{=: \bar{F}} (u(t), v(t))$

Infine: $df_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettivo $\Rightarrow (u'(0), v'(0))$ è l'unica controimmagine di $v = \alpha'(0)$; in particolare, non dipende da α.

quindi: $(F \circ \alpha)'(0) = d_{\psi^{-1}(p)} \psi \circ d\bar{F}_p \underbrace{(u'(0), v'(0))}_{\text{non dipende da } \alpha}$

$d_{\psi^{-1}(p)}\psi$ ↓ non dipende da α; $d\bar{F}_p$ ↓ non dipende da α

Inoltre: dN_p è AL tra spazi vettoriali

In generale:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "F"] & S' \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ U \arrow[u, "f"] & V \end{tikzcd}$$

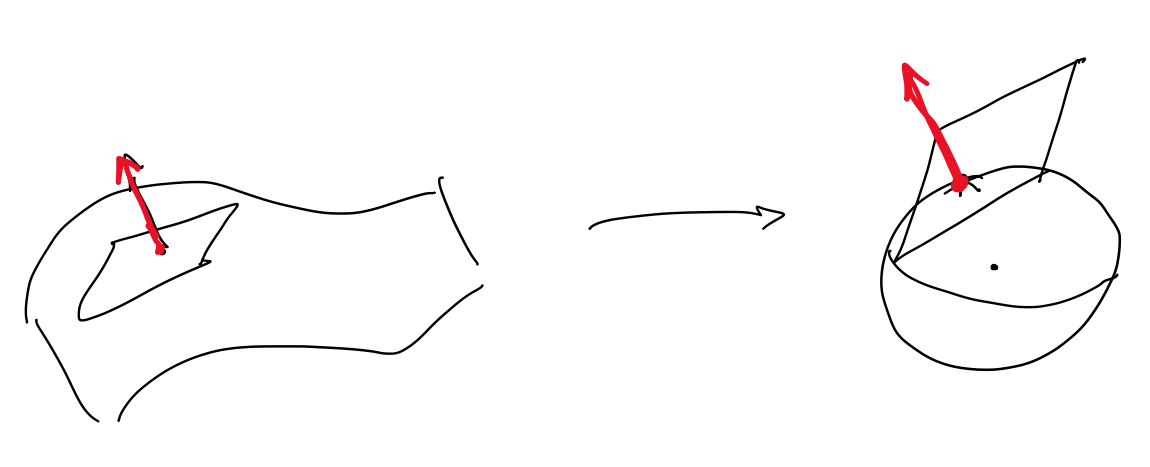
Esercizio $d F_p(v) = \left((d\psi) \circ \overset{AL}{d\bar{F}} \circ \underbrace{(df)^{-1}}_{AL}\right)(v)$

$\bar{F} = \psi^{-1} \circ F \circ f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{U} \to \underset{\mathbb{R}^2}{V}$

dF_p è composizione di 3 AL.

Abbiamo

$dN_p : T_pS \to T_{N(p)} \mathbb{S}^2$



Ricordo: $\forall \, p' = (x', y', z') \in \mathbb{S}^2$

$T_{p'} \mathbb{S}^2 \perp \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

infatti: $\mathbb{S}^2 : \{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{G(x,y,z)} = 1\}$

$T_{p'} \mathbb{S}^2 \perp \nabla G(x', y', z') = \begin{pmatrix} 2x' \\ 2y' \\ 2z' \end{pmatrix}$

$\nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Ora $\left.\begin{array}{ll} N(p) \perp T_pS & \text{ssv} \\ N(p) \perp T_{N(p)} \mathbb{S}^2 & \text{ssv} \end{array}\right\} \Rightarrow T_pS = T_{N(p)} \mathbb{S}^2$

$$\Longrightarrow \boxed{dN_p : T_pS \to T_pS \text{ è ENDOMORFISMO}}$$

Teorema: dN_p è ENDO. AUTOAGG. (ENDO. SIMMETRICO).

Dim.: Cioè: $\forall \, w, w' \in T_pS$

(✱) $dN_p(w) \cdot w' = w \cdot dN_p(w')$

Sia $f : U \to S$

OSS.: $T_pS = \text{Span}(\partial_u f, \partial_v f)$

per linearità basta verif. che

(✱) vale per $w = \partial_u f, \partial_v f$
$\qquad\qquad w' = \partial_u f, \partial_v f$

$dN_p(\partial_u f) \cdot \partial_v f = \partial_u f \cdot dN_p(\partial_v f)$] dobbiamo verificare solo questa

$dN_p(\partial_u f) \cdot \partial_u f = \partial_u f \cdot dN_p(\partial_u f)$
$dN_p(\partial_v f) \cdot \partial_v f = \partial_v f \cdot dN_p(\partial_v f)$) vere automaticamente per simmetria del prodotto scalare

OSS. : $\partial_u f(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \underbrace{f(u_0 + t, v_0)}_{} \Big|_{t=0}$

$$dN_p(\partial_u f) \underset{\text{per def.}}{=} \frac{d}{dt} \Big(\underbrace{N \big(\underbrace{f(u_0 + t, v_0)}_{\alpha(t)} \big)}_{\beta(t)} \Big) \Big|_{t=0} = \partial_u N(u_0, v_0)$$

dove $N = N(u, v) = (N \circ f)(u, v)$

$p = f(u_0, v_0)$

Analog.: $dN_p(\partial_v f) = \partial_v N(u_0, v_0)$

Dobbiamo dim. che

$$\partial_u N \cdot \partial_v f = \partial_u f \cdot \partial_v N$$

TRUCCO: $N = N(u, v)$ è un versore ortogonale a ogni piano tangente in punti di $f(U)$

$\Rightarrow N(u,v) \cdot \partial_u f = 0$ e $N(u,v) \cdot \partial_v f = 0$

Derivo queste due identità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\big(N(u,v) \cdot \partial_u f\big) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\big(N(u,v) \cdot \partial_v f\big) = 0$$

$$\partial_u N \cdot \partial_u f + N \cdot \partial_{uu} f = 0$$
$$\partial_v N \cdot \partial_u f + N \cdot \underbrace{\partial_{uv} f}_{} = 0$$
$$\qquad\qquad \| \text{ Schwarz}$$
$$\partial_u N \cdot \partial_v f + N \cdot \underbrace{\partial_{uv} f}_{} = 0$$

$\Rightarrow \partial_v N \cdot \partial_u f = \partial_u N \cdot \partial_v f$

$\Rightarrow$ ho dimostrato l'uguaglianza voluta.

CONSEGUENZA: Osservo che dN_p autoaggiunto $\Rightarrow$ anche $-dN_p$ è autoaggiunto $\Rightarrow$ Per il Teorema Spettrale, $\exists$ base ORTONORMALE di autovettori di $-dN_p$

Def.: $N : f(U) \to \mathbb{S}^2$ MAPPA DI GAUSS

$-dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ MAPPA DI WEINTGARTEN

Def.: Cons. $-dN_p$; base autovettori $\{e_1, e_2\}$: $e_i \in T_pS$

DIREZIONI PRINCIPALI

e gli autovalori k_1 e k_2 di $-dN_p$ si dicono CURVATURE PRINCIPALI

Def.: Se $k_1 = k_2 = k$

la matrice diag. ass. a $-dN_p$

è $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \mathbb{I}_2$

$\Rightarrow -dN_p$ è una OMOTETIA

e P si dice OMBELICO di S

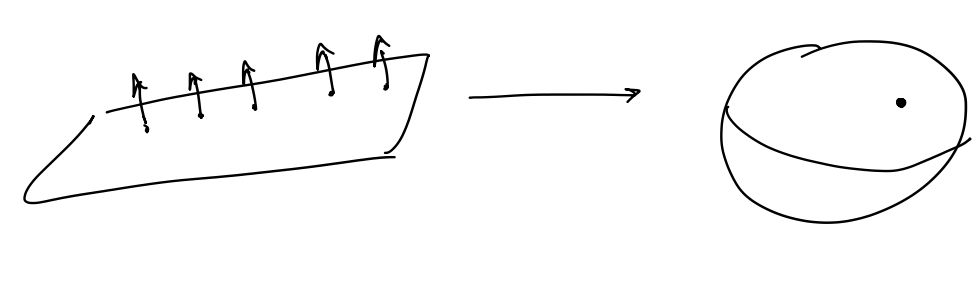
Esempi:

- H piano affine

  $ax + by + cz = d$

  $N(p) = \dfrac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|}$ è costante

  $N : H \to \mathbb{S}^2$ è costante



  $\Rightarrow dN_p = 0$ è la mappa nulla

  $\Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ sono ombelichi

- Sfera

  $N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

  $p = (x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

  $N = Id_{\mathbb{S}^2}$

  $\Rightarrow dN_p = Id_{T_p\mathbb{S}^2}$

  $-dN_p = -Id_{T_p\mathbb{S}^2}$

  $k_1 = k_2 = -1 \Rightarrow$ sono tutti ombelichi