

# TRASFORMAZIONI CANONICHE

In un sist. Hamiltoniano, lo STATO è dato da un pto nello SPAZIO DELLE FASI, individuato dalle coord.  $(\bar{p}, \bar{q})$ .

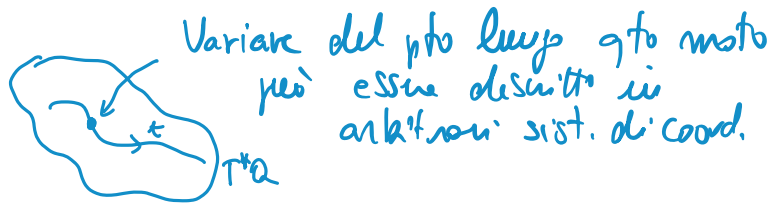
Il MOTO di qto punto nello spazio delle fasi descrive come evolve lo stato del sistema

Un SISTEMA HAMILTONIANO è tale se esiste un sistema di coordinate  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ , dette COORDINATE CANONICHE, t.c. le equazioni del moto (eq. nelle incognite  $p_1(t), \dots, p_n(t), q_1(t), \dots, q_n(t)$ ) hanno la semplice forma delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = - \frac{\partial H}{\partial q_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \\ \dot{q}_h(t) = \frac{\partial H}{\partial p_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \end{cases} \quad h=1, \dots, n \quad \text{e } H: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} \text{ detta HAMILTONIANA}$$

Le funzioni  $\bar{p}(t)$  e  $\bar{q}(t)$  descrivono il moto, nel senso che ad ogni  $t$  associano un set di numeri  $(p_1, \dots, q_n)$  che individuano un pto nello sp. delle fasi  $T^*Q$ . Al variare di  $t$  questo punto cambia.

Lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse coord. in tale pto, per es.  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ .



In qto sist. di coord. il moto è dato dalle functioni  $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ .

Se la trasf. di coord è

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t),$$

allora deve valere  $p(t) = u(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \quad q(t) = v(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$ .

Domanda: le equazioni differenziali che  $\tilde{p}_h(t)$  e  $\tilde{q}_h(t)$  ( $h=1, \dots, m$ ) soddisfano, sono ancora nella FORMA DI EQ. DI HAMILTON?

→ qta domanda equivale a chiedersi se esiste una funzione Hamiltoniana  $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$  t.c. le funt.  $\tilde{p}_h(t), \tilde{q}_h(t)$  soddisfano le eq. diff.

$$\dot{\tilde{p}}_h = - \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad h=1, \dots, m$$

Se qto accade, la trasf. di coord. (tra due set di COORDINATE CANONICHE) è detta **TRASFORMAZIONE CANONICA**.

## ESEMPIO di trasformazione NON-canonica.

Consideriamo la seguente trasf. di coord nello spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p} \cos \tilde{q} \\ q &= \frac{\tilde{p}}{m\omega} \sin \tilde{q} \end{aligned} \quad (*)$$

dove  $(p, q)$  sono coord. canoniche. Lo sono anche  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ ?

Consideriamo la PARTICELLA LIBERA con  $H = \frac{p^2}{2m}$  ;  
le eq. di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 0 \\ \dot{q}(t) = \frac{p(t)}{m} \end{cases} \quad (*)$$

Vediamo quali sono le eq. che le funt.  $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$  soddisfano, tenuto conto che esse sono legate alle funt.  $p(t), q(t)$  da

$$\begin{aligned} p(t) &= \tilde{p}(t) \cos \tilde{q}(t) \\ q(t) &= \frac{\tilde{p}(t)}{m\omega} \sin \tilde{q}(t) \end{aligned}$$

Facciamo le derivate temporali di entrambi i lati

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{\tilde{p}} \cos \tilde{q} - \tilde{p} \dot{\tilde{q}} \sin \tilde{q} \\ \dot{q} &= \frac{\dot{\tilde{p}}}{m\omega} \sin \tilde{q} + \frac{\tilde{p} \dot{\tilde{q}}}{m\omega} \cos \tilde{q} \end{aligned}$$

Siccome  $p, q$  soddisfano  $(*)$ , le  $\tilde{p}, \tilde{q}$  soddisfano

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} \cos \tilde{q} - \tilde{p} \dot{\tilde{q}} \sin \tilde{q} = 0 \\ \frac{\dot{\tilde{p}}}{\omega} \sin \tilde{q} + \frac{\tilde{p} \dot{\tilde{q}}}{\omega} \cos \tilde{q} = \tilde{p} \cos \tilde{q} \end{cases} \quad \leftarrow \text{sist. lineare in incognite } \dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}$$

Risolviamo il sist. lin. e troviamo le eq.:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \omega \tilde{p} \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} = \omega \cos^2 \tilde{q} \end{cases} \quad (*)$$

←  $\tilde{p}(t)$  e  $\tilde{q}(t)$  soddisfano queste equez. diff.

Se  $\tilde{p}, \tilde{q}$  sono buone coord. canoniche, allora (\*) potranno essere scritte nella forma di eq. di Hamilton, cioè  $\exists$  funt.  $K(\tilde{p}, \tilde{q})$  t.c.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \end{cases}$$

Qto avviene se  $\exists K(\tilde{p}, \tilde{q})$  t.c.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} &\stackrel{?}{=} -\omega \tilde{p} \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} &\stackrel{?}{=} \omega \cos^2 \tilde{q} \end{aligned}$$

Se qto avviene bisogna che si verifichi la condizione

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left( \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left( \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left( \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \right) &= -\cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left( \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \right) &= -2\omega \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \end{aligned} \right] \neq \Rightarrow \nexists K \text{ t.c. } (*)$$

passano esse portate nella forma di eq. di Hamilton



La trasf. di coord. (o)  
NON è canonica!

## ESEMPIO di trasformazione CANONICA

$$p_h = \alpha \tilde{p}_h$$

$$q_h = \beta \tilde{q}_h$$

Le eq. in  $(p, q)$  sono  $\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}(p, q) \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(p, q)$

$\Rightarrow$  Le eq. diff. in  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  sono

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_h}(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q}) \quad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_h}(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q})$$

I termini a destra dell'uguale sono scrivibili come

$$-\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad \text{per qualche } K(\tilde{p}, \tilde{q})?$$

La risposta è sì in

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q}) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \exists \text{ un tale } K \\ \forall \text{ scelta di } H \end{array}$$

$\Rightarrow$  La trasformazione è CANONICA.

# TRASF. CANONICHE.

Scriviamo la transf. di coord. nello sp. delle fasi:

$$(*) \quad \begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \equiv \tilde{p}, \tilde{q} \text{ (notazione semplificata)} \\ \text{coordinate } p \text{ e } q \\ \text{si mescolano} \end{matrix}$$

Nella notazione compatta:

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{anche scritta a volte} \\ \leftarrow x_i(\tilde{x}, t) \end{matrix}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} \quad \text{ha det} \neq 0$$

Def. La transf. di coord.  $(*)$ , regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prenda  $\leftarrow H$   
un'Hamiltoniana  $H(p, q, t)$ , ESISTE SEMPRE  
una funzione  $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$  t.c.

se le eq. del moto nelle coord.  $(p, q)$  assumono la forma di eq. di Ham. per  $H$ , cioè

$$\dot{p}_h = - \frac{\partial H}{\partial q_h} \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad h=1, \dots, n \quad (\neq)$$

ALLORA anche le eq. del moto nelle nuove coord. assumono la forma di eq. di Ham. con Hamiltoniana  $K$ :

$$\dot{\tilde{p}}_k = - \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_k} \quad \dot{\tilde{q}}_k = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_k} \quad k=1, \dots, n \quad (o)$$

Le soluzioni di  $(\neq)$  e  $(o)$  sono collegate dalla transf.  $(*)$ :

$$\begin{aligned} p_h(t) &= u_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \\ q_h(t) &= v_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \end{aligned}$$

$\leftarrow$  soluz. d.  $(\neq)$        $\leftarrow$  soluz. d.  $(o)$

$H$  e  $K$  si  
dicono  
CANONICAMENTE  
CONIUGATE

Trasf. canoniche nel formalismo compatto

Consideriamo la trasf. di coord. nello spazio delle fasi data da

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t)$$

$$\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$$

→ trasf. inverse  $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$ , cioè

$$\begin{cases} w(\tilde{w}(x, t), t) = x \\ \tilde{w}(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x} \end{cases}$$

Se il moto in  $T^*Q$  è descritto dalle funz.

$$x_i(t) \quad i=1, \dots, 2m$$

nelle coord.  $x$ , allora nelle coord.  $\tilde{x}$  sarà descritto dalle funzioni

$$\tilde{x}_j(t) = \tilde{w}_j(x(t), t)$$

equivalentemente:

$$x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$$

Da qta espressione, si può ricavare una relaz. tra le derivate  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{\tilde{x}}(t)$ :

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2m} \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_i}}_{\tilde{J}_{ji}} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}$$

$\tilde{J}_{ji}$  (Jacobiano delle trasf. di coord.)

↑ analogamente

$$\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_e} \equiv J_{me}$$

$$\text{con } \sum_e J_{me} \tilde{J}_{ej} = \delta_{mj}$$

$$\text{cioè } \tilde{J} = J^{-1}$$

Ora, se  $x(t)$  soddisfa l'eq. diff.  $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t)$ ,  
allora

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2m} \tilde{J}_{ji}(x(t), t) f_i(x(t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(x(t), t)$$

usando  $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$ , posso scrivere una rel. tra  $\dot{\tilde{x}}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ , cioè un'eq. diff. 1° ord in la funzione  $\tilde{x}(t)$ :

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \tilde{J}_{ji}(w(\tilde{x}(t), t), t) f_i(w(\tilde{x}(t), t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(w(\tilde{x}(t), t), t)$$

Diciamo ora che  $x_i$  sono buone **coord. canoniche**, cioè le eq. diff. del moto sono nella forma

$$\dot{x}_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} \rightarrow f_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l}$$

Allora

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_{i,l} \tilde{J}_{ji} E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} \quad (*)$$

↳ in forma  
vettoriale  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$

La transf. è **CANONICA** se anche le nuove coord.  $\tilde{x}_i$  sono buone **coordinate canoniche**, cioè se  $\exists K(\tilde{x}, t)$  t.c. le eq. del moto nelle coord  $\tilde{x}$  sono nella forma

$$\dot{\tilde{x}} = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K \quad (**)$$

Confrontando (\*) con (\*\*) si vede che la transf.  $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$  è canonica se  $\forall H, \exists K$  t.c.

$$\tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K$$

Espressa per bene con tutti gli argomenti espliciti:

$$\tilde{J}(w(\tilde{x}, t), t) E \bar{\nabla}_x H(w(\tilde{x}, t), t) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t) = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K(\tilde{x}, t)$$

In particolare possiamo prendere  $H=0$ . Allora se la trasf. è canonica  $\exists K_0(\tilde{x}, t)$  t.c.

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t) = \epsilon \nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t)$$

Cioè  $K_0$  è l'Hamiltoniana coniugata all'Hamiltoniana nulla.

Esempi di trasf. canoniche

$$1) \quad p_n = \tilde{p}_n + \underbrace{a_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}} \quad q_n = \tilde{q}_n + \underbrace{b_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}} \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(\tilde{p} + a, \tilde{q} + b, t)$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv u_n(\tilde{p}, \tilde{q}, t)}$$

$$2) \quad p_n = \alpha \tilde{p}_n \quad q_n = \beta \tilde{q}_n \quad \alpha, \beta \neq 0 \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde{p}, \beta\tilde{q}, t)$$

$$3) \quad p_n = \tilde{p}_n \quad q_n = \tilde{q}_n + \alpha t \tilde{p}_n \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

↳ Es. particella libera  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1/m \\ \downarrow \end{array} \right.$

$$H(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{\tilde{p}^2}{2m} \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m} \tilde{p}^2 = 0$$

→ eq. di Ham. relative a  $K$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_n &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_n} = 0 & \Rightarrow & \tilde{p}_n(t) = \tilde{p}_n^{(0)} \\ \dot{\tilde{q}}_n &= +\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_n} = 0 & \Rightarrow & \tilde{q}_n(t) = \tilde{q}_n^{(0)} \end{aligned}$$

→ usando la trasf. di coord.

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \tilde{p}_n^{(0)} \\ q_n(t) &= \tilde{q}_n^{(0)} + t \frac{\tilde{p}_n^{(0)}}{m} \end{aligned}$$

4) Invece la transf. di coord.

$$p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \quad q = \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}$$

è canonica con  $K = H(\sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}, t)$ .

5) Transformationi PUNTOALI ESTESE

$$q_h = v_h(\tilde{q}, t) \quad (\text{non dip. da } \tilde{p})$$

$$p_h = \underbrace{\sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t)} \quad (\text{non-generica})$$

$$\tilde{v}(v(\tilde{q}, t), t) = \tilde{q}$$

Vediamo qual è la forma generale delle nuove Hamiltoniane.

Prop. Se la trasf. è CANONICA, allora  $\exists c$  (dipendente al più dal tempo  $t$ ) t.c.

$$K(\tilde{x}, t) = c \tilde{H}(\tilde{x}, t) + K_0(\tilde{x}, t) \quad (*)$$

dove:

- $\tilde{H}(\tilde{x}, t) \equiv H(w(\tilde{x}, t), t)$

- $K_0$  è t.c.  $\text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t)$

[ $K_0$  è l'Hamiltoniana coniugata ad  $H=0$  ed è non-banale quando la trasf. canonica dip. da  $t$  esplicitamente.]

Dim.

trasf. canonica per ipotesi

$$\begin{aligned} \text{E } \nabla_{\tilde{x}} K &= \tilde{J} \text{E } \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = \tilde{E}^{-1} \text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T (\tilde{J}^T)^{-1} \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = \\ &= -\text{E } \text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} + \text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0 \end{aligned}$$

$\tilde{E}^{-1} \text{E} = -\text{E}$  (se trasf. è canonica,  $\exists K_0$  t.c.  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = \text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0$ )

$\sum_j \tilde{J}_{ij}^T \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = \nabla_{\tilde{x}} (K - K_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} \text{ è IRROTAZIONALE } \forall \tilde{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T = c \mathbb{1}_{2n} \Rightarrow \nabla_{\tilde{x}} (K - c \tilde{H} - K_0) = 0$$

$\uparrow$  Lemma 4 (vedi ultime pagine)

$$\Rightarrow K = c \tilde{H} + K_0 \quad (\text{a meno di una cost. irrillevante}).$$

LEMMI utili per le dimostrazioni precedenti.

Lemma 1. Localmente,  $\vec{v}$  è gradiente di una funt.  $F$   
(abb.  $\vec{v} = \vec{\nabla} F$ ) se e solo se il suo ROTORE è nullo,  
cioè  $\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0$ . (Forme chiuse sono localmente  
esatte e viceversa.)

Lemma 2. Se  $\tilde{J}$  è t.c.  $\tilde{J}^T E \tilde{J} = c E$ , allora

$$B = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \quad \text{soddisfa} \quad B^T E + E B = 0, \text{ cioè}$$

$E B$  è simmetrica.

Dim. Dimostriamo che  $E \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}$  è simmetrica:

differentiamo  $\tilde{J}^T E \tilde{J} = c E \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E \tilde{J} + \tilde{J}^T E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} = 0$$

moltiplichiamo  
 $(\tilde{J}^T)^{-1}$  a sin. e  
 $\tilde{J}^{-1}$  a des.

$$\rightarrow \underbrace{\tilde{J}^{-T} \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E}_{\text{"}} + E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} = 0$$

$$- \left( E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} \right)^T //$$

Lemma 3. Dato camp. vett.  $\bar{v}(x, t)$ , pto può essere scritto come  $\bar{v} = E \nabla_x F$ , ptegle  $F(x, t)$ ,  
 $\Leftrightarrow \Omega \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  soddisfa  $\Omega^T E + E \Omega = 0$   
 cioè  $E \Omega$  simm.

Dim.  $\Rightarrow$ :  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_k E_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \Leftrightarrow \Omega = E (\partial^2 F) \Rightarrow E \Omega \text{ è simm.}$

$\Leftarrow$ :  $\bar{u} \equiv E \bar{v} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = E \Omega \text{ simm.}$

$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \xRightarrow{\text{Lemma 1}} \text{f.t.c. } \bar{u} = -\nabla_x F \Rightarrow \bar{v} = E \nabla_x F //$

Lemma 4. Sia  $A(x, t)$  matrice  $2n \times 2n$  (con  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ )

Se  $\forall$  funt. regolare  $F(x, t)$ , il campo vett.  $A \nabla_x F$  è IRROTAZIONALE (cioè ha rotore nullo  $\Leftrightarrow$  (localm.)  $= \nabla_x(\dots)$ ) allora  $\exists$  funt.  $a(t)$  t.c.  $A = a(t) \mathbb{1}$ .

Dim.  $A \nabla_x F$  irrotaz.  $\forall F \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l A_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l A_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F \quad (1)$

Prendiamo  $F = x_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} \quad (1)$

"  $F = x_i^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ii} x_i) \quad (2)$

$(2) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} x_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ii} x_i) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} \right) x_i + A_{ji} - \left( \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} \right) x_i - A_{ii} \delta_{ij}$

$(1) \Rightarrow A_{ji} = A_{ii} \delta_{ij} \quad (3) \Rightarrow A \text{ è matrice diagonale}$

$$\text{Inoltre } (1), (3) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ii} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = 0 \quad \mu \quad j \neq i$$

$$\Rightarrow A_{ij}(x, t) = a_i(x_i, t) \delta_{ij}$$

Mettiamo in (o) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l a_j(x_j, t) \delta_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l a_i(x_i, t) \delta_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_j(x_j, t) \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_i(x_i, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow \mu \quad i \neq j \quad \left[ a_j(x_j, t) - a_i(x_i, t) \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow a_j(x_j, t) = a_i(x_i, t) \quad i \neq j$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 indep. de  $x_i$       indep. de  $x_j$

$$\Rightarrow a_i(x_i, t) = a(t) \quad \forall i //$$