

TROTTOLA DI LAGRANGE

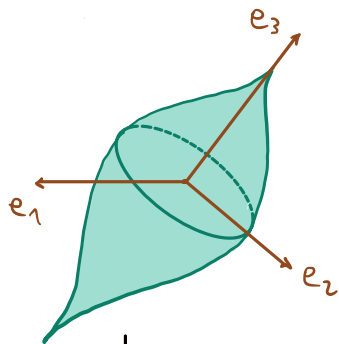
Abbiamo calcolato l' **ENERGIA CINETICA** rotazionale del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

Scegliendo gli assi principali d'inertia, abbiamo

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad \text{dove} \quad \bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$$

La TROTTOLA è un corpo rigido con una simmetria di rotazione attorno a un asse.



Con questa scelta di terna solidale ho

$$I_1 = I_2 \quad \text{e} \quad I_3$$

Ricordiamo: $\mathcal{I}_{ij} = - \sum_{a=1}^N m_a x_{ai} x_{aj} = \rho \int x_i x_j dx_i dx_j dx_k$

$$\Downarrow$$
$$\mathcal{I}_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

almeno uno di quei
integrali è $\int_{-r}^r x dx = 0$

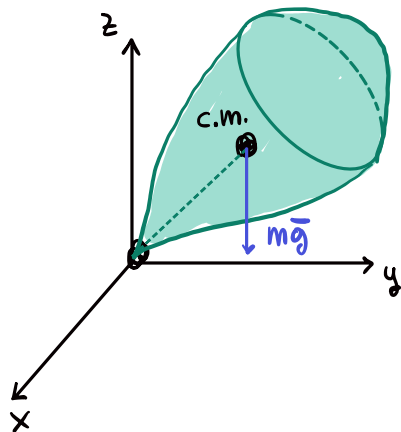
$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

Ricordiamo che

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi) \bar{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi) \bar{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \bar{e}_3$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)^2$$

Mettiamo la frotole con pto fisso in un campo gravitazionale costante



$$V = -mg z_{c.m.} = mgl \cos \theta$$

$$\Rightarrow L = \frac{I_1}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

- Ci sono due coordinate cicliche, φ e ψ $\rightarrow$ due cost. del moto

$$P_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 \quad \leftarrow M_3$$

$$P_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \dot{\varphi} \cos^2 \theta + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \quad \leftarrow M_z$$

$$= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + P_{\varphi} \cos \theta$$

- C'è anche en. totale

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta$$

$\leadsto$ 3 COSTANTI DEL MOTO in un sistema con $n=3$ gradi di libertà

- Da coord. cicliche $\rightarrow$ Lagrangiana ridotta:

troviamo $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ da sist. lineare

$$\begin{cases} P_{\varphi} - \cos \theta P_{\psi} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi} - \cos \theta P_{\psi}}{I_1 \sin^2 \theta} \\ I_3 \dot{\psi} = P_{\psi} - I_3 \dot{\varphi} \cos \theta \rightarrow \dot{\psi} = \frac{P_{\psi}}{I_3} - \frac{\cos \theta (P_{\varphi} - \cos \theta P_{\psi})}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{P_{\psi}}{I_3}$$

$$L^* = L|_{\dot{\psi}, \dot{\varphi} = \dots} = \dot{\varphi} P_{\varphi} - \dot{\psi} P_{\psi} =$$

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\theta} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

$$= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3}$$

$$- \frac{P_\psi (P_\psi - \cos \theta P_\psi)}{I_1 \sin^2 \theta} - \frac{P_\psi^2}{I_3} + \frac{P_\psi \cos \theta (P_\psi - \cos \theta P_\psi)}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\rightarrow - \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$L^* = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta - \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

$$~~-\frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3}~~$$

$$L^* = T_{eff} + V_{eff}$$

$$\text{con } T_{eff} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 \quad e$$

$$V_{eff}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

Vogliamo ora disegnare il grafico di V_{eff} per capire come si comporta qualitativamente il sistema:

- $V_{eff}(\theta)$ è una funzione continua per $0 < \theta < \pi$
- Agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} V_{eff}(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} V_{eff}(\theta) = +\infty$$

↳ Qto avviene se $P_\psi \neq P_\psi$. Se invece $P_\psi = P_\psi$, allora

$$V_{eff} = mgl \cos \theta + \frac{P_\psi^2}{2 I_1} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

e $\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{eff}(\theta) = mgl$ (si veda "Trottola addormentata" per lo studio di questo caso).

- Dai due pti sopra si conclude che $V_{eff}(\theta)$ ha un MINIMO ASSOL.
- Dobbiamo capire se ha altri pti stationari.

- Definiamo $g(x) = x + \frac{(P_e - P_\psi x)^2}{2\text{Im}gl(1-x^2)}$

Allora si ha $V_{eff}(\theta) = \text{Im}gl g(\cos\theta)$

- $x = \cos\theta$ è un buon cambiam. di coord perché $\cos\theta$ è monotono in $\theta \in [0, \pi[$;

- inoltre $V_{eff}(\theta)$ ha gli stessi pti stationari di $g(x)$;

in particolare $V_{eff}(\theta)$ ha un solo minimo in $\theta \in]0, \pi[$

se e solo se $g(x)$ ha un solo minimo in $x \in]-1, 1[$.

- Dimostriamo allora che $g(x)$ ha un solo minimo:

1) $g'(x) = 1 - \frac{(P_\psi - P_e x)(P_e - P_\psi x)}{\text{Im}gl(1-x^2)^2}$

$$g''(x) = \frac{(1+3x^2)P_e^2 - 2x(3+x^2)P_e P_\psi + (1+3x^2)P_\psi^2}{\text{Im}gl(1-x^2)^3}$$

- il denominatore di $g''(x)$ è POSITIVO $\forall x \in]-1, 1[$

- il numeratore di $g''(x)$ è anche POSITIVO $\forall x \in]-1, 1[$;

qto è meno ovvio, quindi vediamo il perché:

il numeratore (a meno di un fattore positivo è)

$$\left(\frac{P_e}{P_\psi}\right)^2 - 2 \frac{x(3+x^2)}{1+3x^2} \left(\frac{P_e}{P_\psi}\right) + 1 \quad (*)$$

Qto è un polinomio quadratico nella variabile p_φ/p_ψ .
 Siccome il coeff. di $(p_\varphi/p_\psi)^2$ è >0 , qto polinomio
 è identicam. positivo se il suo discriminante è negativo.
 Il discriminante di $a\xi^2 + b\xi + c$ è $\Delta = b^2 - 4ac$

Per (o) abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{x^2(3+x^2)^2}{(1+3x^2)^2} - 1 = - \frac{(1-x^2)^3}{(1+3x^2)^2} < 0 \quad \text{per } x \in]-1, 1[.$$

- siccome $g''(x) > 0 \quad \forall x$, questo vuol dire
 che $g(x)$ ha un solo pto stationario in $x \in]-1, 1[$.

2) C'è un altro modo per dimostrare che $V_{eff}(\theta)$ ha
 un solo pto stationario.

L'energia del sist. ridotto è

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{(p_\varphi - \cos \theta p_\psi)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} \quad (*)$$

$$= \frac{I_1}{2} \frac{\dot{x}^2}{1-x^2} + mgl x + \frac{(p_\varphi - x p_\psi)^2}{2I_1 (1-x^2)}$$

↑
 qui abbiamo usato $x = \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} \sin \theta$.

Ricordiamo che in
 E abbiamo trascurato
 il termine cost
 $\frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{2I_3}$; la vera
 En. sarebbe
 $E + p_\psi^2/2I_3$

La retta a En. costante interseca il grafico di $V_{eff}(\theta)$ e di $g(x)$
 nei pti x per cui $\dot{x} = 0$, che nei pti x che
 risolvono l'equazione

$$(E - mgl x)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1} (p_\varphi - p_\psi x)^2 = 0 \quad (**)$$

che è un' EQ. CUBICA, quindi con al massimo 3 soluzioni.

Siccome la retta a En. cost. interseca il grafico di $g(x)$ un numero pari di volte ($\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} V_{eff} = +\infty$), allora le soluzioni di (*) in $x \in]-1, 1[$ saranno al max 2 e quindi c'è un solo pto di minimo.

Chiamiamo θ^* ($x^* = \cos \theta^*$) il valore di θ in cui $V_{eff}(\theta)$ è minimo.

Domanda: MIN θ^* giace prima o dopo di $\pi/2$?

$$g(x) = x + \frac{(P_\phi - x P_\psi)^2}{2 I_{1mgL}(1-x^2)} \leadsto g'(x) = 1 + \frac{P_\phi - x P_\psi}{I_{1mgL}(1-x^2)} \left[-P_\psi + \frac{x(P_\psi - x P_\phi)}{1-x^2} \right]$$

- $\theta^* = \pi/2$ è pto di equilibrio qndo $g'(0) = 0$, cioè

$$\text{per } 1 - \frac{P_\phi P_\psi}{I_{1mgL}} = 0 \rightarrow P_\phi P_\psi = I_{1mgL}$$

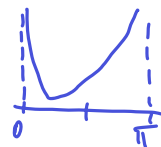
- $\theta^* = \pi/2 - \epsilon \leadsto x = \epsilon \ll 1$ è pto di equilibrio per

$$0 \approx 1 + \frac{P_\phi - \epsilon P_\psi}{I_{1mgL}} [-P_\psi + \epsilon P_\phi] \approx 1 + \frac{1}{I_{1mgL}} (-P_\phi P_\psi + \epsilon (P_\psi^2 + P_\phi^2))$$

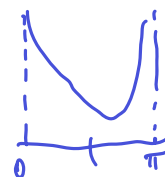
$$\Rightarrow I_{1mgL} = P_\phi P_\psi - \epsilon (P_\psi^2 + P_\phi^2) \leadsto \epsilon = \frac{P_\phi P_\psi - I_{1mgL}}{P_\psi^2 + P_\phi^2}$$

Quindi:

$$x^* > 0 \quad (\theta^* < \pi/2) \quad \text{se} \quad P_\phi P_\psi > I_{1mgL}$$



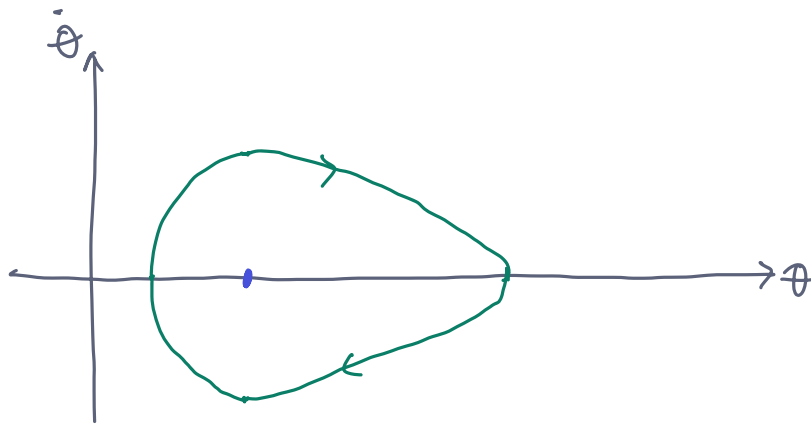
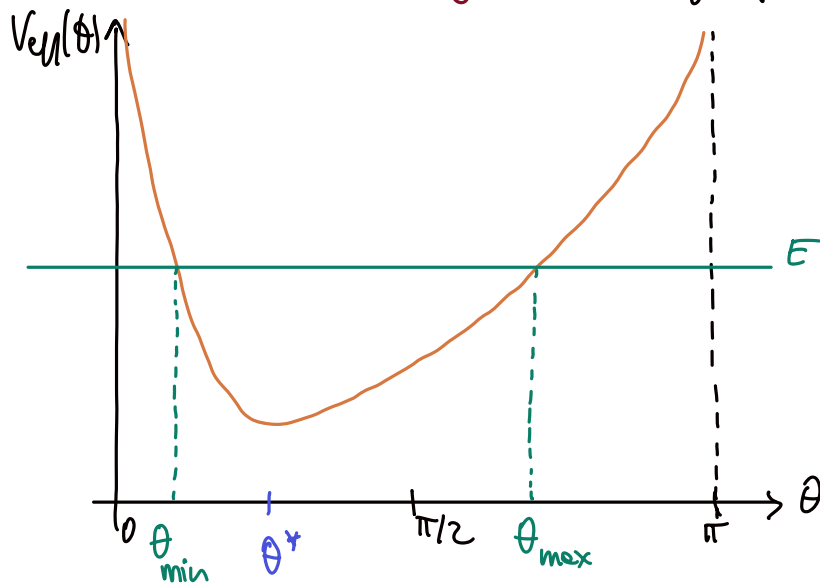
$$x^* < 0 \quad (\theta^* > \pi/2) \quad \text{se} \quad P_\phi P_\psi < I_{1mgL}$$



- Osservazione: $g(x) = x + \frac{(P_\phi - x P_\psi)^2}{2 I_{1mgL}(1-x^2)} \rightarrow$ se $x^* \geq 0$ ($\theta^* < \pi/2$), allora

$g(x)$ è def. positiva; infatti $g(x) \geq g(x^*) > 0$

Consideriamo il caso $P_\phi P_\psi > I_1 m g l$: il grafico del potenziale efficace è



- c'è un solo pto di equil. per il problema ridotto
corrispondente all'energia minima $\Rightarrow$ moto con inclinaz. asse cost.
- A en. superiore il moto avviene tra due valori $\theta_{min}, \theta_{max}$
 $\Rightarrow$ l'inclinazione dell'asse fa moto pendolo tra θ_{min}
e θ_{max} . $\rightarrow$ MOTO DI **NUTAZIONE**

Vediamo ora il moto di PRECESSIONE (φ). Abbiamo che (prendiamo P_φ e $P_\psi > 0$)

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \frac{P_\varphi - P_\psi x}{I_1 (1-x^2)}$$

Se $\theta = \theta^* \rightarrow \dot{\varphi} = \omega_\varphi \Rightarrow \varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$
cost.

- $\dot{\varphi}$ si annulla in $x_0 = P_\varphi / P_\psi$ con $x_0 = \cos \theta_0$.

inoltre:
$$\begin{cases} \text{in } x > x_0 \ (\theta < \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) < 0 \\ \text{in } x < x_0 \ (\theta > \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) > 0 \end{cases}$$

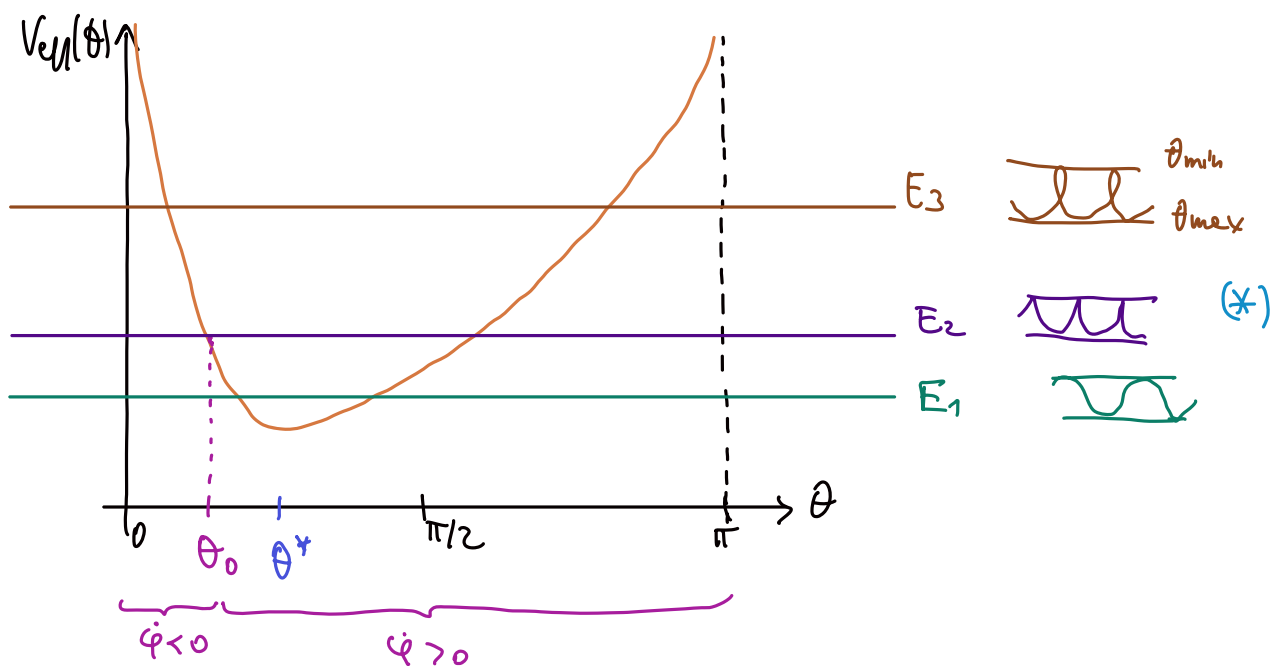
- Cerchiamo di capire dove si trova θ_0 rispetto al min θ_* :

- Se $\theta_0 < \theta_*$, allora $V'_{eff}(\theta_0) < 0$ ($g'(x_0) > 0$)

- Se $\theta_0 > \theta_*$, allora $V'_{eff}(\theta_0) > 0$ ($g'(x_0) < 0$)

Valutiamo allora $g'(x) = 1 + \frac{(P_\psi - x P_\varphi)}{I_1 \sin^2(1-x^2)} \left[-P_\psi + x \frac{(P_\varphi - x P_\psi)}{(1-x^2)} \right]$ in $x_0 = P_\varphi / P_\psi$:

$$g'(x_0) = 1 + 0 > 0 \Rightarrow \theta_0 < \theta_*$$



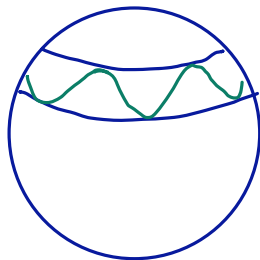
(*) In questo caso θ_0 è pto in cui sia $\dot{\theta}$ che $\dot{\varphi}$ si annullano.

Possiamo rappresentare i tre casi E_1, E_2, E_3 come moti sulla sfera:

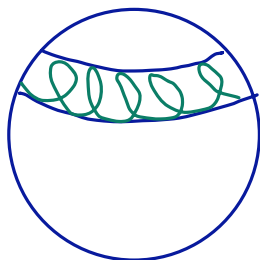
E_1) Per θ permessi, $\dot{\varphi}$ ha segno definito ($\forall t$). Infatti si può dimostrare che

$$P_{\varphi} > P_{\varphi} \cdot \max_{\theta} |\cos \theta|$$

$\rightarrow \dot{\varphi}(t)$ avanza sempre



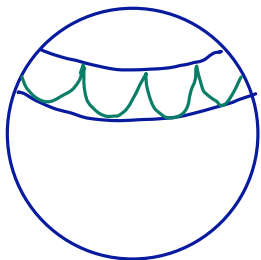
E_3) $\dot{\varphi}$ si annulla quando $\cos \theta_0 = P_{\varphi}/P_{\varphi}$



$\hookrightarrow \dot{\varphi}$ ha segno opposto per θ_{min} e θ_{max}

Dal grafico di v_{eff} , si vede che per la maggior parte dei valori di θ permessi, $\dot{\varphi}$ è positivo $\rightarrow$ indicazione che la media temporale di $\dot{\varphi}(t)$ è positiva e quindi la frottola avanza.

E_2) In questo caso $\theta_0 = \theta_{min}$ (punto più alto toccato dalla frottola), cioè avviene $P_{\varphi} = P_{\varphi} \cos \theta_0$.



Questo caso è il più comune in pratica, quando si cerca di avere alto valore di $\dot{\varphi}_0$ e invece $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0 \ll 1$.

Come sono legate le cost. del moto coi dati iniziali?

$$1) P_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = I_3 \omega_3$$

$$2) P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \dot{\psi} \cos^2 \theta + I_3 \dot{\varphi} \cos \theta$$
$$= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + P_\psi \cos \theta$$

$$3) E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{(P_\theta - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

Dati iniziali: $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$

→ quando posizioniamo la trottola per poi lasciarla andare, abbiamo dati iniziali con $\dot{\varphi}_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ ← ricadiamo nel caso E_2

$$\Rightarrow \dot{\psi}_0 = \frac{P_\psi}{I_3} \quad (\text{da 1})$$

$$\cos \theta_0 = \frac{P_\theta}{P_\psi} \quad (\text{da 2})$$

← lo chiamo con nome θ_0 perché è proprio pto in cui $\dot{\varphi}_0 = 0$

← qta relazione non vale sempre (solo nel caso E_2)
quando $\dot{\theta}_0 = 0$
→ E, P_ψ, P_θ in generale sono cost. del moto indipendenti



$$P_\psi = I_3 \dot{\psi}_0$$

$$P_\theta = I_3 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = P_\psi \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow P_\theta P_\psi = I_3^2 \dot{\psi}_0^2 \cos \theta_0$$

> $I_1 mgl$ per $\dot{\psi}_0$ suff. grande

Nota: φ_0 e ψ_0 sono irrilevanti (conseguenza delle simmetrie del sistema).

TROTTOLA DORMIENTE E RISVEGLIO

Osservazione: la trottola, dopo essere stata lanciata, si stabilizza con l'asse di rotazione verticale e ruota mostrando piccolissime oscillazioni: la rotazione è praticamente stationaria ("trottola dormiente"). Ad un certo punto la trottola si risveglia, cominciando un moto di nutazione e precessione sempre più accentuato, finché la trottola cade.

Vediamo come potevamo prevederlo.

- Con un lancio ben fatto $\theta_0 = 0$ e $\dot{\psi}_0 \gg \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0 \Rightarrow P_\phi \approx P_\psi$

- Quando $P_\phi = P_\psi$, V_{eff} non esplode più a $\theta = 0$:

$$V_{eff} = mgl \cos \theta + \frac{P_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2}{2I_1 (1 + \cos \theta) (1 - \cos \theta)}$$
$$= mgl \cos \theta + \frac{P_\phi^2}{2I_1} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

- Troviamo il minimo:

$$V'_{eff}(\theta) = -mgl \sin \theta + \frac{P_\phi^2}{2I_1} \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \right) =$$
$$= \sin \theta \left[-mgl + \frac{P_\phi^2}{I_1} \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} \right]$$

$\Rightarrow \theta = 0$ è pto di equilibrio, assieme a θ^* con

$$\downarrow$$
$$V_{eff}(0) = mgl$$

$$\cos \theta^* = \frac{P_\phi^2}{mgl I_1} - 1$$

Controlliamo quale delle configurazioni è stabile

$$V''_{eff}(\theta) = \cos \theta \left[-mgl + \frac{P_\phi^2}{I_1} \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} \right] + \sin \theta (\dots)$$

$$\rightarrow V''_{eff}(0) = -mgl + \frac{P_\phi^2}{4I_1}$$

$$P_\phi = I_3 \dot{\psi} \cos \theta$$

Ricordiamo $P_\phi = I_3 \dot{\psi} \cos \theta_0 \leadsto$ se $\dot{\psi}_0$ è suff. grande, $V''_{eff}(0) > 0 \rightarrow$ PTO STAB.

Quindi:

- Se partiamo da θ vicino a $\theta=0$, θ oscilla attorno allo zero con frequenza $V''_{eff}(0) \rightsquigarrow$ trottole ha moto periodico stazionario: le piccole oscillazioni vengono smorzate dall'attrito.
- Ma non manco che possa il kump, l'attrito riduce $\dot{\psi}$ e quindi $P_\psi = P_\psi$, finché $\theta=0$ non è più stabile: ogni perturbazione allontana trottole dalla rotazione stazionaria (ora instabile)
 - $\rightarrow$ compare un moto di nutazione che diventa sempre più ampio mentre P_ψ diminuisce (la trottole si è risvegliata)

TROTTOLE CON SPIN (P_ψ) MOLTO GRANDE

Ora lanciamo la trottole con condizioni iniziali ($t=0$):

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_0 \text{ molto grande}$$

θ_0 qui sta per $\theta(t)$ al tempo $t=0$; per coincidere anche con angolo μ cui $\dot{\psi}=0$

Ricordiamo

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mglx)(1-x^2) + \frac{1}{2I_1} (P_\psi - xP_\psi)^2 \quad (*)$$

e valutiamole a $t=0$:

$$0 = (E - mglx_0)(1-x_0^2) + \frac{1}{2I_1} (P_\psi - x_0P_\psi)^2$$

$\rightarrow x_0$ è una soluzione di qta equazione cubica.

Possiamo riscrivere (*) come

$$E = \underbrace{\frac{I_1}{2} \frac{\dot{x}^2}{1-x^2}}_{(A)} + mglx + \underbrace{\frac{(P_\psi - xP_\psi)^2}{2I_1(1-x^2)}}_{(B)}$$

• A $t=0$ $A=0$ e $B=0 \rightsquigarrow E = mgl \cos \theta_0$

• A e B sono DEFINITI POSITIVI

Siccome l'energia si conserva, all'aumentare del tempo si accendono i termini A e B e $mg \cos \theta$ deve diminuire
 $\Rightarrow \theta$ aumenta (trattola scende), cioè θ_0 corrisponde alla circonferenza superiore

Inoltre, ricordando $\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$, si ha

$$- \cos \theta_0 = P_\varphi / P_\psi \quad (\text{da } \dot{\varphi}_0 = 0)$$

$$E = mg \cos \theta_0 + \frac{P_\psi^2}{2I_3}$$

$$- \cos \theta_0 = \frac{E}{mg} \quad (\text{da } E = mg \cos \theta_0)$$

Usando quanto detto finora, risolviamo (*) con $\dot{x} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= mg(x_0 - x)(1 - x^2) - \frac{P_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x)^2 = \\ &= (x_0 - x) \left(mg(1 - x^2) - \frac{P_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x) \right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 &= mg(x_0 - x)(1 - x^2) - \frac{P_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x)^2 = \\ &= (x_0 - x) \left(mg(1 - x^2) - \frac{P_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x) \right) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Qta equazione ci dà} \\ \text{i PONTI DI INVERSIONE} \\ (\dot{x} = 0) \end{array}$$

altre radici sono soluzioni di qta eq. di 2° grado

$$mg(x - x_0) \left(x^2 - Kx - 1 + Kx_0 \right) = 0 \quad K \equiv \frac{P_\psi^2}{2I_1 mg} \gg 1$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[K \pm \sqrt{K^2 + 4 - 4Kx_0} \right] =$$

$$= \frac{K}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{K^2} - \frac{4x_0}{K}} \right] \approx \begin{array}{l} \text{espandiamo fino al secondo ordine} \\ \sqrt{1+\epsilon} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \end{array}$$

$$\approx \frac{K}{2} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2}{K^2} - \frac{2x_0}{K} - \frac{16x_0^2}{K^2} + O\left(\frac{1}{K^3}\right) \right) \right]$$

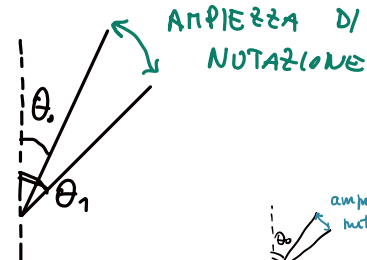
$$= \frac{K}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{2x_0}{K} + \frac{2}{K^2}(1 - x_0^2) \right) \right] \quad K - x_0 + \dots \gg 1 \quad (\text{esclusa})$$

$$= \begin{cases} K - x_0 + \dots \gg 1 & (\text{ESCLUSA perché } |x| \leq 1) \\ x_0 - \frac{(1 - x_0^2)}{K} + \dots \approx \cos \theta_0 - \frac{\sin^2 \theta_0}{K} \equiv x_1 \end{cases}$$

L'eq. diventa $mg l (x - x_0)(x - x_1)(x - K + x_0) = 0$.

Le due soluzioni accettabili sono

$$x_0 = \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad x_1 = \cos \theta_0 - \frac{\sin^2 \theta_0}{K}$$



↳ L'AMPIEZZA DELLA NUTAZIONE è

$$x_0 - x_1 = \frac{\sin^2 \theta_0}{K} \Rightarrow$$

Tanto più la trottola gira veloce (K grande), tanto minore (e quindi meno visibile) è l'ampiezza della nutazione

Nota: il pto di equilibrio del potenziale efficace sarà tra θ_0 e θ_1 .

Ora ricaviamo la FREQUENZA DELLA NUTAZIONE:

- partiamo da $\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mglx)(1 - x^2) - \frac{1}{2I_1} (p_\psi - x p_\phi)^2$, il cui membro di destra può essere riscritto come (a);

- siccome $x_0 \approx x_1$, possiamo approssimare

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = - \underbrace{K mgl}_{p_\phi^2 / 2 I_1} (x - x_0)^2$$

- deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$I_1 \dot{x} \ddot{x} = - \frac{p_\phi^2}{I_1} (x - x_0) \dot{x} \leadsto \ddot{x} = - \underbrace{\left(\frac{p_\phi}{I_1} \right)^2}_{= \omega^2 \gg 1} (x - x_0) \approx - \left(\frac{p_\phi}{I_1} \right)^2 \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \omega t$$

↑
ampiezza

centro di intervallo di oscillazione

$$\frac{p_\phi}{p_\psi} = \cos \theta_0$$

Infine consideriamo la PRECESSIONE

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - \cos \theta p_\psi}{I_1 \sin^2 \theta} = \frac{p_\phi}{I_1} \frac{(x_0 - x)}{1 - x^2} \approx \frac{p_\phi}{I_1} \frac{x_0 - x}{\sin^2 \theta_0} \approx \underbrace{\frac{p_\phi}{I_1 \sin^2 \theta_0}}_{\sim 1/p_\psi \ll 1} \cdot \left(\frac{x_0 - x_1}{2} \right) (1 - \cos \omega t)$$

$\Rightarrow \dot{\phi}_{\text{media}} \text{ è PICCOLA}$

$$*: x - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 - x_1}{2} \cos(\omega t) \Rightarrow x_0 - x = \frac{x_0 - x_1}{2} (1 - \cos \omega t)$$

Extra: vediamo il caso particolare in cui $p_\psi p_\phi = I_1 m g l$

Quando questo avviene, il minimo di V_{eff} è a $\theta = \pi/2$ ($x=0$)

$$g(x) = x + \frac{(p_\phi - x p_\psi)^2}{2 p_\phi p_\psi (1-x^2)} = \frac{p_\phi^2 - 2x p_\phi p_\psi + x^2 p_\psi^2 + 2x p_\phi p_\psi - 2x^3 p_\phi p_\psi}{2 p_\phi p_\psi (1-x^2)}$$

$$= \tilde{g}(x) - \frac{x^3}{1-x^2}$$

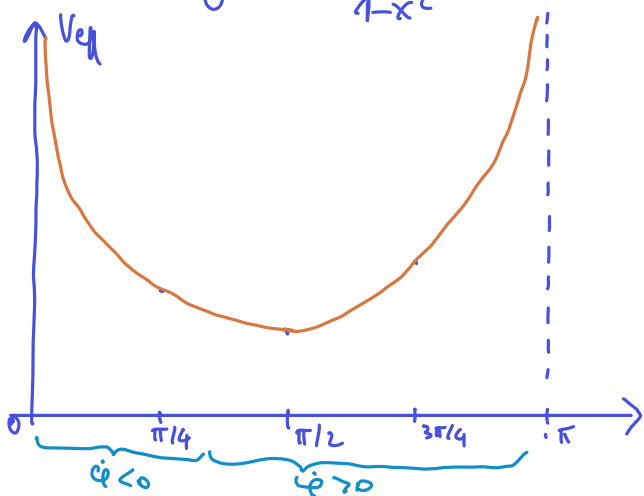
$$\text{con } \tilde{g}(x) = \frac{p_\phi^2 + x^2 p_\psi^2}{2 p_\phi p_\psi (1-x^2)} \quad \text{funct. pari in } x \rightarrow -x$$

$$g(0) = \frac{p_\phi}{2 p_\psi}$$

$$g(1/2) = \tilde{g}(1/2) - 1/6 \quad (\theta = \pi/4)$$

$$\updownarrow$$

$$g(-1/2) = \tilde{g}(-1/2) + 1/6 \quad (\theta = 3\pi/4)$$



In questo caso $\theta_0 < \theta^*$. Il potenziale non è simmetrico e la regione di θ in cui $\dot{\phi} > 0$ è più estesa di quella in cui $\dot{\phi} < 0$. In media la frottola si muove con $\dot{\phi}_{media} > 0$.

Extra: Caso $P_\psi = 0$ ($P_\psi P_\psi < I_1 mgl$)

$\vec{N}_i$

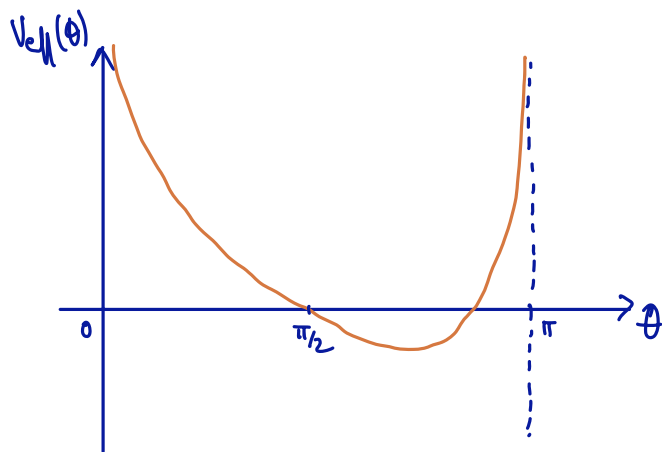
Qto può essere ottenuto mettendo la trottola inizialmente in posizione orizzontale  $\psi > 0 \rightarrow P_\psi > 0$

Il potenziale diventa

$$V(x) = mgl \left(x + \frac{x^2 P_\psi^2}{2I_1 mgl (1-x^2)} \right) = mgl x \left(1 + \frac{P_\psi^2}{2I_1 mgl} \frac{x}{1-x^2} \right)$$

Esso ha due zeri:

$$x=0 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad x = \tilde{x} < 0 \quad (\theta > \pi/2)$$



- Affinchè il minimo coincida con $\pi/2$, bisogna prendere il limite $P_\psi^2 \gg 2I_1 mgl$, per cui avremo uno zero doppio, cioè un minimo.
- Ma qto limite vuol dire sostanzialmente spegnere la gravità.

Extra (da riguardare a fine corso):

HAMILTONIANA delle trottole.

Hamiltoniana delle trottole: $H = P_\theta \dot{\theta} + P_\psi \dot{\psi} + P_\varphi \dot{\varphi} - L$

$$H = \frac{P_\theta^2}{2I_1} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + \frac{(P_\varphi - \cos\theta P_\psi)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + mgl \cos\theta$$

Si vede immediatamente che il sistema è integrabile:

H, P_ψ, P_φ sono 3 cost. del moto in involuzione.

$\{M_3, M_2\} = 0$ M_2 è comb.lin. di M_1, M_3 (quindi sembrerebbe impossibile che commutano, ecc.)
con
coeff. che dipendono dalle coordinate libere

Extra: espressioni utili durante la trattazione delle trottole:

$$P_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta = P_\psi / I_3$$

$$P_\varphi = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + P_\psi \cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

$$E = \underbrace{\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos\theta + \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta}}_{V_{eff}(\theta)} \Leftrightarrow \frac{I_1}{2} \dot{x}^2 = (E - mgl x)(1 - x^2) - \frac{1}{2I_1} (P_\varphi - x P_\psi)^2$$