

ANGOLI DI EULERO - corpo rigido con pto fisso (possono essere usati anche rispetto c.m.)

Consideriamo una terne fissa $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$

La config. del corpo rigido è data da come si

dispone una terne solidale $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ rispetto

alla terne fissa $\Rightarrow$ qta è data da una ROTAZIONE $\in \text{SO}(3)$

$\Rightarrow$ sp. delle config. di un corpo rigido con pto fisso è

$$Q = \text{SO}(3)$$

(se non c'è pto fisso $Q = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$)
 $\uparrow$ posizione del c.m.

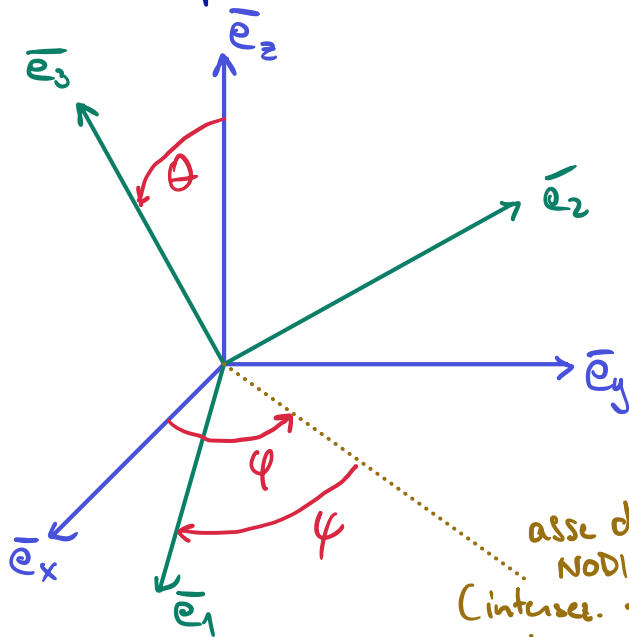
Vediamo come parametrizzare Q .

Si usano gl. ANGOLI d'EULERO

Θ : angolo tra $\bar{e}_3$ e $\bar{e}_z$ (rotazione)

Φ : angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_x$ (precessione)

Ψ : angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_1$ (rotazione propria)



asse dei NODI
 (intersez. tra piani
 12 e x_y)
 $= \langle \bar{e}_3, \bar{e}_z \rangle^\perp$

$$\bar{n} = \cos \Phi \bar{e}_x + \sin \Phi \bar{e}_y$$

e_x, e_y, e_z : terne FISSA
 e_1, e_2, e_3 : terne SOLDALE
 al corpo rigido

Θ, Φ, Ψ determinano una rotaz. in $\text{SO}(3)$ (che manda $e_{xyz} \rightarrow e_{kz}$)

Ogni angolo determina una rotazione indipendente.



Si parta con le terne sovrapposte:

- 1) si tenga $\bar{e}_3 = \bar{e}_z$ e si ruoti di angolo φ portandosi $\bar{e}_1$ a coincidere con l'asse dei nodi $\bar{n}$. (R_φ)
- 2) Si tenga fisso $\bar{e}_1$ e si ruoti di angolo θ . (R_θ)
- 3) Si tenga fisso $\bar{e}_3$ e si ruoti di angolo ψ . (R_ψ)

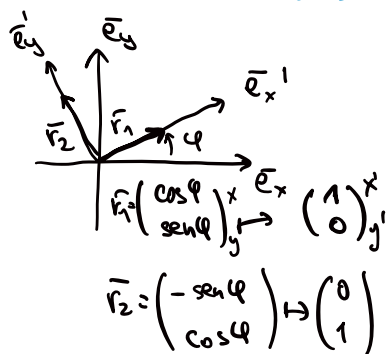
Individuiamo s.d.r. intermed. (SI VEDA DISEGNO NELLA PAGINA SUCCESSIVA)

$$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z \xrightarrow{\varphi} \bar{e}'_x, \bar{e}'_y, \bar{e}'_z \xrightarrow{\theta} \bar{e}''_x, \bar{e}''_y, \bar{e}''_z \xrightarrow{\psi} \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$$

Prendiamo vettore colonna $\bar{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (x, y, z component in base $\bar{e}_x \bar{e}_y \bar{e}_z$)

Componenti in base $\bar{e}'_x \bar{e}'_y \bar{e}'_z$ sono date da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Ora passiamo a s.d.r. $\bar{e}''_x, \bar{e}''_y, \bar{e}''_z$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

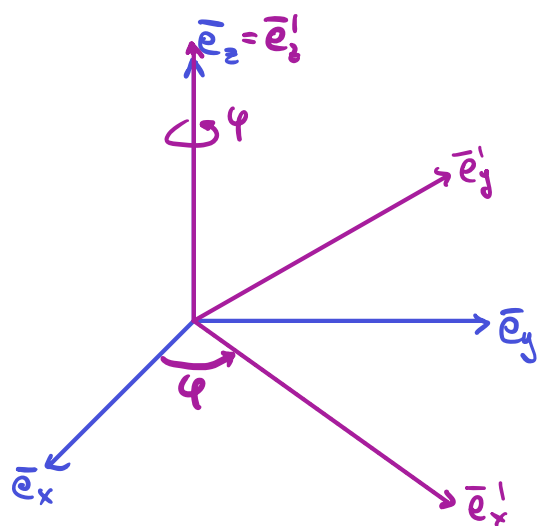
Infine andiamo a $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

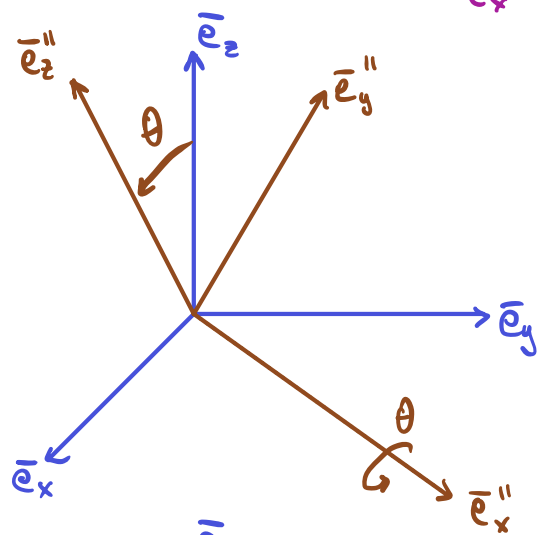
$$R_\psi R_\theta R_\varphi = R_\psi \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \equiv R_{\varphi\theta\psi}$$

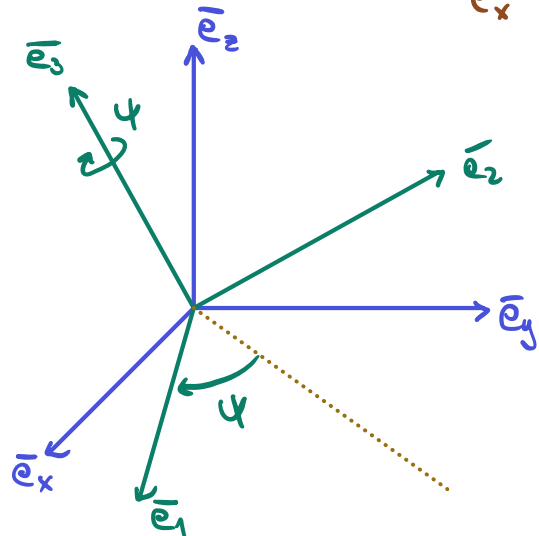
La trasf. inversa è data dalla trasposta, essendo pte matrice una matrice di $SO(3)$ ($OO^T = O^T O = \mathbb{1}$).



Rotazione di angolo φ
attorno a $\bar{e}_z = \bar{e}'_z$.
(R_φ)



Rotazione di angolo θ
attorno a $\bar{e}_x = \bar{e}''_x$.
(R_θ)



Rotazione di angolo ψ
attorno a $\bar{e}_y = \bar{e}_y$.
(R_ψ)

Osservazione: C'è un altro modo semplice per capire come gli angoli θ, φ, ψ determinano come sono messi i vettori $\bar{e}_{1,2,3}$ rispetto alla base $\bar{e}_{x,y,z}$:

- θ e φ determinano univocamente $\bar{e}_3$ (coord. polari);
- $\bar{e}_1$ ed $\bar{e}_2$ stanno su piano $\perp \bar{e}_3$, su cui giace anche l'asse dei nodi; l'angolo ψ mi dice dove sta $\bar{e}_1$, e quindi anche $\bar{e}_2 \perp (\bar{e}_1, \bar{e}_3)$.

Siamo ora in grado di calcolare le componenti di $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$:

Prendiamo come esempio $\bar{e}_1$: le sue componenti nella base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; per ottenere le componenti nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ dobbiamo applicare $R_{\psi\theta\varphi}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_{\psi\theta\varphi}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Qto restituisce la prima riga della matrice $R_{\psi\theta\varphi}$. Lo stesso si può fare per $\bar{e}_2$ e $\bar{e}_3$.

Otteniamo quindi $\dot{\bar{e}}_i$ facendo le 'derivate temporali' di qte componenti, il che ci permette di calcolare $\bar{\omega}$ dalla formula

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_i \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i \rightsquigarrow \bar{\omega} \text{ in s.d.r. } \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z.$$

Per avere $\bar{\omega}$ in s.d.r. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ basta applicare $R_{\psi\theta\varphi}$

Facendo questo, otteniamo:

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi) \bar{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi) \bar{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \bar{e}_3$$

Qto è un conto lungo. Si può procedere diversamente;

Riprendiamo eq. $\dot{\bar{u}} = \bar{\omega} \times \bar{u}$:

$$\dot{u}_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_j u_k = \sum_k \left(\sum_j \epsilon_{ijk} \omega_j \right) u_k \equiv \Omega_{ik} u_k$$

con $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ ← determinata da 3 parametri

→ possiamo quindi scrivere $\dot{\bar{u}} = \Omega \bar{u}$ (*)

dove Ω è una matrice 3×3 ANTISIMMETRICA

La (*) ci dice che in un tempo infinitesimo δt , $\bar{u}(t)$ varia come
 $\bar{u} \mapsto \bar{u} + \delta \bar{u}$ con $\delta \bar{u} = \Omega \bar{u} \delta t$.

Cioè, in un tempo δt , il vettore ruota di un angolo infinitesimo $|\bar{\omega}| \delta t$ attorno all'asse $\bar{\omega}$.

Se componiamo due rotazioni: $R_1 = 1 + \Omega_1$ $R_2 = 1 + \Omega_2$

$$R_1 R_2 = 1 + \underbrace{(\Omega_1 + \Omega_2)}_{\text{matrice relativa a } \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}$$



Scomponiamo $\bar{\omega} = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_B$; allora $\Omega = \Omega_A + \Omega_B$
cioè vuol dire scomporre rotaz. infinitesime attorno a $\bar{\omega}$
di angolo $|\bar{\omega}| \delta t$ in una rotaz. infinitesima attorno a $\bar{\omega}_A$
di angolo $|\bar{\omega}_A| \delta t$ e una attorno a $\bar{\omega}_B$ di angolo $|\bar{\omega}_B| \delta t$

Tornando alla frizione.

Un $\bar{\omega}$ generica può essere scomposta come $(\bar{e}_2, \bar{n}, \bar{e}_3 \text{ sono generam. vett. indipendenti.})$

$$\bar{\omega} = \omega_\varphi \bar{e}_2 + \omega_\theta \bar{n} + \omega_\psi \bar{e}_3$$

Cioè variazione di terza solidale alla frizione si scompone
in una rotaz. infinitesima $\omega_\varphi \delta t$ attorno a $\bar{e}_2$,

di $\omega_\theta \delta t$ attorno a $\bar{n}$ e di $\omega_\psi \delta t$ attorno a $\bar{e}_3$.

(Qte rotaz. non commutano fra loro, ma a livello infinitesimo è irrilevante).

Viste le coordinate scelte, gli angoli saranno rispettivamente $\dot{\psi} \delta t$, $\dot{\theta} \delta t$ e $\dot{\varphi} \delta t \Rightarrow$

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{e}_z + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\psi} \bar{e}_3$$

Per scrivere le componenti del vett. $\bar{\omega}$ nel s.d.r. $e_1 e_2 e_3$,

ci serve sapere le comp. di $\bar{e}_z$, $\bar{n}$ e $\bar{e}_3$ in tale base.

$\rightarrow$ dobbiamo applicare $R_{\varphi\theta\psi}$ alle loro comp. nel s.d.r. $e_x e_y e_z$

$$\text{dove } R_{\varphi\theta\psi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\theta \sin\psi & \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \cos\theta \sin\psi & \sin\theta \sin\psi \\ -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\theta \cos\psi & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi & \sin\theta \cos\psi \\ \sin\varphi \sin\theta & -\cos\varphi \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nella base $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$

$$\bar{e}_z = R_{\varphi\theta\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = R_{\varphi\theta\psi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \cos\psi - \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \sin\psi} + \sin^2\varphi \cos\psi + \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \sin\psi} \\ -\cancel{\cos^2\varphi \sin\psi} - \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \cos\psi} - \sin^2\varphi \sin\psi + \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \cos\psi} \\ \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \sin\theta} - \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{e}_z + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\psi} \bar{e}_3 &= (\dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\psi) \bar{e}_1 + \\ &+ (\dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\psi) \bar{e}_2 \\ &+ (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \bar{e}_3 \end{aligned}$$

(*)

Ora possiamo calcolare l' **ENERGIA CINETICA** rotazionale del corpo rigido (a tutto pto fisso, o c.m.)

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

Siccome T è uno scalare, posso calcolarlo in un pl. ort. di rif. ortogonali come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{I}_{ij} \omega_i \omega_j$$

Di solito conviene scegliere s.d.b. solide $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ lungo gli assi principali d'inerzia. In qto caso, in qto s.d.b.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{I}_i \omega_i^2 \quad \text{dove} \quad \bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$$

Osservazione: Quando $\mathcal{I}_{ij}$ sono le componenti di $\mathcal{I}$ rispetto una base solida, esse sono costanti (cioè non dipendono da come il corpo si muove nello spazio). Per qto motivo è utile sapere le componenti di $\bar{\omega}$ rispetto alla base solida, così in $\bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \sum_{ij} \omega_i \mathcal{I}_{ij} \omega_j$ $\mathcal{I}_{ij}$ sono dei numeri caratteristici del corpo rigido.