Lezione 6 maggio 2025

martedì 6 maggio 2025 09:10

Visto: $N : f(U) \subseteq S \to S^2$

$$N = N(u,v) = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}$$

$$dN_p : T_pS \to T_{N(p)} S^2 = T_pS$$

è autoaggiunto $\Rightarrow$ $-dN_p$ è autoagg.

Def.: k_1 e k_2 autovalori di $-dN_p$

si chiamano **CURV. PRINC.** in p

e se $\{e_1, e_2\}$ base ortonormale di T_pS formata da autovettori

allora $Span(e_1) \subseteq \mathbb{R}^3$, $Span(e_2) \subseteq \mathbb{R}^3$

DIREZ. PRINC.

Nella base $\{e_1, e_2\}$ la matrice

$-dN_p$ sarà diagonale

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} ; \text{ nella base } \{\partial_u f, \partial_v f\} = \mathcal{B}_f$$

$$M^{\mathcal{B}_f}_{\mathcal{B}_f}(-dN_p) = \underline{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Supponiamo $k_1 \geq k_2$.

Def.: $K(p) := \det(-dN_p) = k_1 k_2$

CURVATURA GAUSSIANA di S in p

$$H(p) := \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(-dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

CURVATURA di S in p.

OSS.: $K(p)$ e $H(p)$ sono invarianti

risp. alla scelta di una base di T_pS.

Infatti: se scelgo 2 basi diverse, le

matrici che rappr. $-dN_p$ sono SIMILI,

quindi hanno stesso polinomio caratteristico.

Esercizio: Data una matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$P_M(x) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{pmatrix}$$

$$= \underline{x^2 - \mathrm{Tr}(M)\, x + \det M}$$

$Q(x) = ax^2+bx+c$, $c = Q(0)$

dove $\mathrm{Tr}(M) = a_{11} + a_{22}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Tr}(M)$ è invariante per similitudine

OSS.: Se cambio orientazione di S,

cioè una scelta di un campo di versori normali, quindi $-N$

si ha $k_1, k_2 \leadsto -k_1, -k_2$

$$\Rightarrow (-k_1)\cdot(-k_2) = k_1 \cdot k_2$$

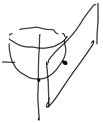
$e_1, e_2 \leadsto \pm e_1, \pm e_2$

$\Rightarrow$ direz. principali $\mathrm{Span}(e_1) = \mathrm{Span}(-e_1)$
$\mathrm{Span}(e_2) = \mathrm{Span}(-e_2)$

$H(p) \leadsto -H(p)$

Def.: • se $K(p) > 0$: p si dice PUNTO ELLITTICO

e $k_1 \neq k_2$ (es. ellissoide)

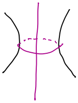


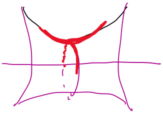
$z = x^2 + y^2$

• se $K(p) < 0$: p si dice PUNTO IPERBOLICO

(es: iperboloide

paraboloide iperbolico





- se $K(p) = 0$: se $k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow -dN_p$ è endo
  $= k_1 \cdot k_2$ NULLO

P si dice PUNTO PLANARE

se $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$,
$k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$

P PUNTO PARABOLICO

- $k_1 = k_2$: P si dice OMBELICO

* * *

SIGNIFICATO GEO. di k_1 e k_2

Cons. Forma quadrica assoc. a $-dN_p$:

Def.: $II_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$

$$II_p(v) := -dN_p(v) \cdot v$$

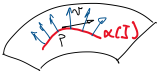
SECONDA FORMA FOND. di S in P

Cosa rappres. i valori di $II_p(v)$?

Ricordo: ogni $v = \alpha'(0)$

con $\alpha : I \to S$ t.c. $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$

REGOLARE



$$\mathbb{II}_p(\alpha'(0)) = -\underbrace{dN_p(\alpha'(0))}_{\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dt}\left(N(\alpha(t))\right)\Big|_{t=0}}} \cdot \alpha'(0)$$

Posso supp. che α sia PLA

$\alpha = \alpha(s)$

$\underbrace{N(\alpha(s))}_{= N(s)}$ restr. di N alla curva $\alpha(I)$

Trucco: $N(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \quad \forall s \in I$

$$(N(s) \cdot \alpha'(s))' = 0$$

$$= N(s) \cdot \alpha''(s) + N'(s) \cdot \alpha'(s) = 0$$

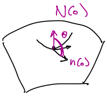
$$\Longrightarrow \; -N'(s) \cdot \alpha'(s) = N(s) \cdot \alpha''(s) \quad ⊛$$

$N'(s) = -\frac{d}{ds}(N(\alpha(s)))$

$N(s) = N(\alpha(s))$

$$⊛ \quad \mathbb{II}_p(\alpha'(0)) = N(0) \cdot \underbrace{\alpha''(0)}_{= k(0)\, n(0)}$$

$$= N(0) \cdot \underbrace{k(0)}_{\geq 0} n(0)$$



$$= k(0) \underbrace{\|N(0)\|}_{=1} \underbrace{\|n(0)\|}_{1} \cos\theta = k(0) \cos\theta$$

Def.: $k_n := k(0)\,(n(0) \cdot N(0))$

CURVATURA NORMALE di α in $\alpha(0)$

OSS.: $k_n = \mathbb{II}_p(v)$

$v = \alpha'(0)$

$\Rightarrow$ k_n dipende solo da v, e non da α

$\Rightarrow$ tutte le curve reg. su S passanti per p e con $\alpha'(0) = v$ e $\|v\| = 1$ hanno stessa curvatura normale

questo si chiama Teo. di MEUSNIER

OSS. $v \in T_pS$, $\|v\| = 1$

$\{e_1, e_2\}$ base ortonormale di autovettori di $-dN_p$

$$v = \cos\vartheta \, e_1 + \sin\vartheta \, e_2$$

$$k_n = II_p(v) = -dN_p(v) \cdot v$$

$$= -dN_p(\cos\vartheta \, e_1 + \sin\vartheta \, e_2) \cdot (\cos\vartheta \, e_1 + \sin\vartheta \, e_2)$$

$$= (\cos\vartheta \, k_1 e_1 + \sin\vartheta \, k_2 e_2) \cdot (\cos\vartheta \, e_1 + \sin\vartheta \, e_2)$$

$$= \underbrace{k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta} \qquad (k_1 \geq k_2)$$

FORMULA DI EULERO per k_n

OSS.: se $\vartheta = 0, \pi$, cioè $v = \pm e_1$

$\Rightarrow II_p(\pm e_1) = k_1$

se $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, cioè $v = \pm e_2$

$II_p(\pm e_2) = k_2$

Inoltre: $k_n = \underline{\cos^2\vartheta \, k_1 + \sin^2\vartheta \, k_2}$

$k_1 \geq k_2$

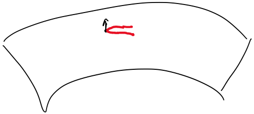
$$k_2 \big(\underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{=1}\big) \le k_n \le k_1 \big(\underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{1}\big)$$

$$\Longrightarrow \quad k_2 \le k_n \le k_1$$

k_2 è il MIN di $\mathrm{II}_p : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

k_1 è il MAX di $\mathrm{II}_p : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

OSS. : Se invece di k_n cons. k curvatura usuale, questa non è limitata superiormente



OSS.:
$$\begin{array}{ccc} k_1 \cos^2\vartheta & + & k_2 \sin^2\vartheta \\ \| & & \| \\ k_1 \cos^2(\pi-\vartheta) & + & k_2 \sin^2(\pi-\vartheta) \end{array} \quad =$$

$$\cos(\pi-\vartheta) = \underbrace{\cos\pi}_{=(-1)} \cos\vartheta + \underbrace{\sin\pi}_{=0} \sin\vartheta$$

$$= -\cos\vartheta$$

$$\sin(\pi-\vartheta) = \underbrace{\sin\pi}_{=0} \cos\vartheta - \cos\pi \sin\vartheta = \sin\vartheta$$