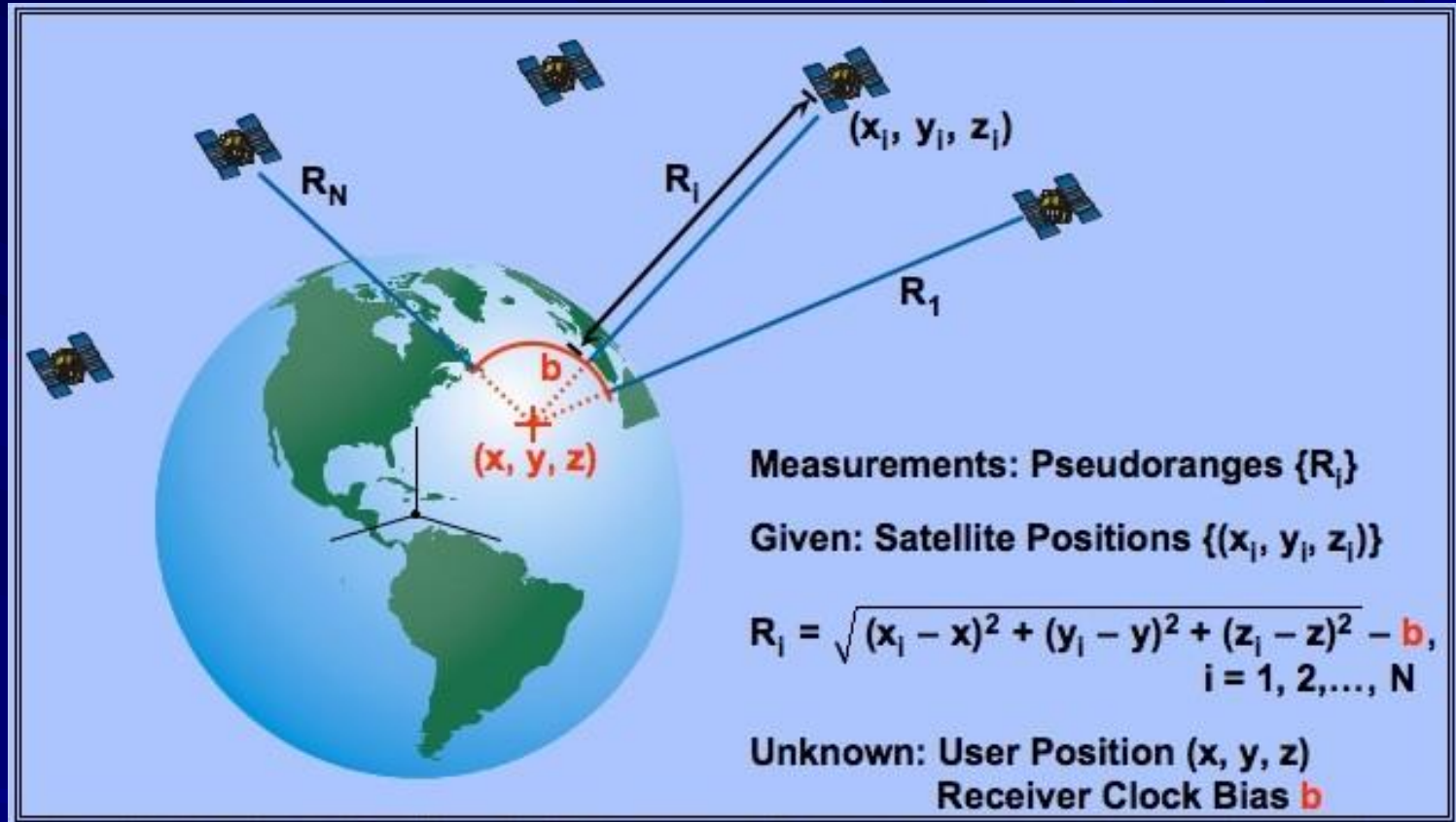


G.P.S. Global Positioning System

R. Cefalo

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università di Trieste

Posizionamento tridimensionale



Il principio su cui si basa è semplice: si tratta in effetti di un'intersezione in avanti spaziale al punto di coordinate incognite da un certo numero di satelliti (almeno 4 per il posizionamento tridimensionale) di posizione nota.

Struttura del Sistema

- Segmento spaziale
- Segmento di controllo
- Segmento utente

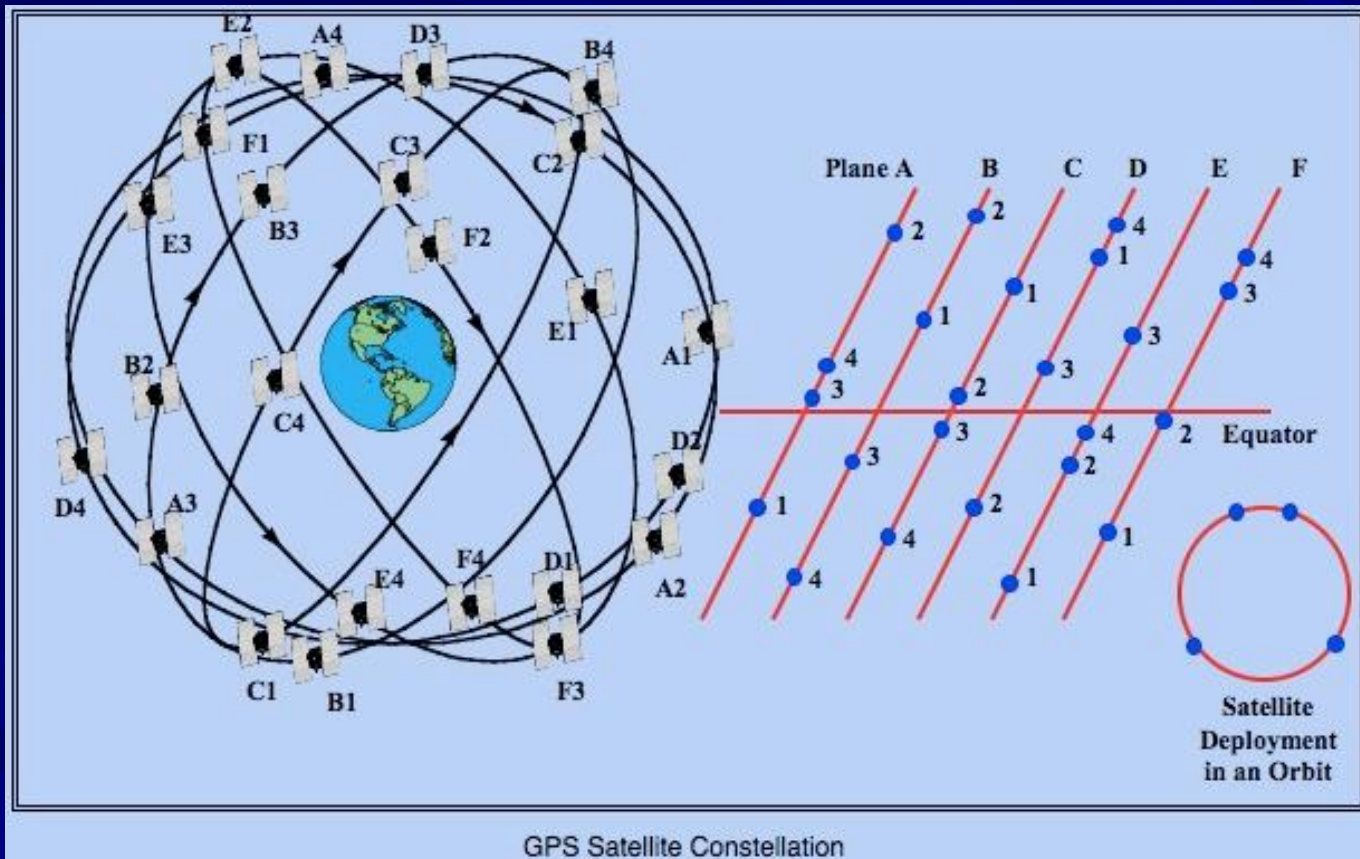
Segmento spaziale

- Il primo satellite GPS fu inviato nello spazio nel 1979.
- Attualmente la costellazione NAVSTAR della difesa statunitense è formata da 32 satelliti, 24 satelliti operativi, 6 di riserva, distribuiti su 6 orbite inclinate di 55 gradi rispetto al piano equatoriale e appartenenti a piani ruotati di 55 gradi rispetto ai piani adiacenti.
- Essi percorrono in circa 12 ore orbite quasi circolari ad un'altezza nominale di 20183 km

Tempo siderale e tempo sidereo

- A causa della differenza fra tempo siderale e tempo solare, i satelliti appaiono su un certo punto della Terra quattro minuti prima ogni giorno, cosicché il periodo di copertura viene anticipato di circa due ore ogni mese.
- I satelliti NAVSTAR costituiscono il **segmento spaziale** del sistema GPS.

Segmento Spaziale



Costellazione NAVSTAR-GPS

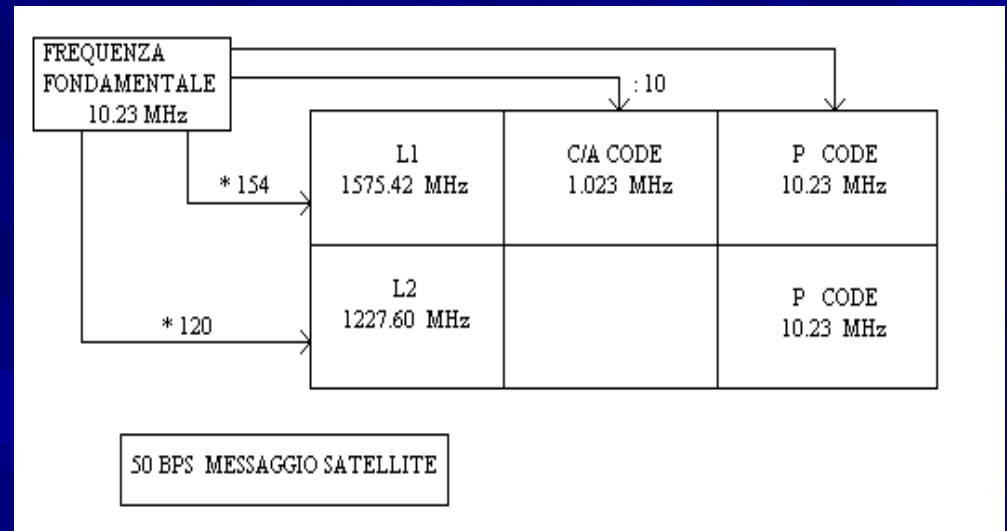
- La costellazione attuale dei satelliti GPS, che ha raggiunto con il lancio del satellite SVN 36/PRN 6, avvenuto il 10 marzo 1994, la completa operatività programmata, è composta da 24 satelliti operativi, appartenenti ai Blocchi IIR, IIR-M, III/IIIF.
- Per mantenere tale costellazione è previsto il lancio di due satelliti in media all'anno.
- I 20 satelliti previsti del Blocco III sostituiranno quelli del Blocco IIR quando non più operativi.

Satelliti NAVSTAR-GPS

- Tali satelliti, più pesanti ma meno costosi dei precedenti, hanno a bordo un orologio atomico all'idrogeno caratterizzato dall'avere una stabilità in frequenza (10^{-14} e 10^{-15} su un giorno) di almeno un ordine di grandezza superiore a quella degli attuali orologi atomici al cesio e rubidio.

Segnali trasmessi

- Ciascun satellite trasmette in continuazione due portanti radio:
L1 a 1575.42 MHz
L2 a 1227.60 MHz.



Tali frequenze sono ricavate dalla frequenza fondamentale di 10.23 MHz dell'oscillatore di alta stabilità del satellite, come mostrato nello schema.

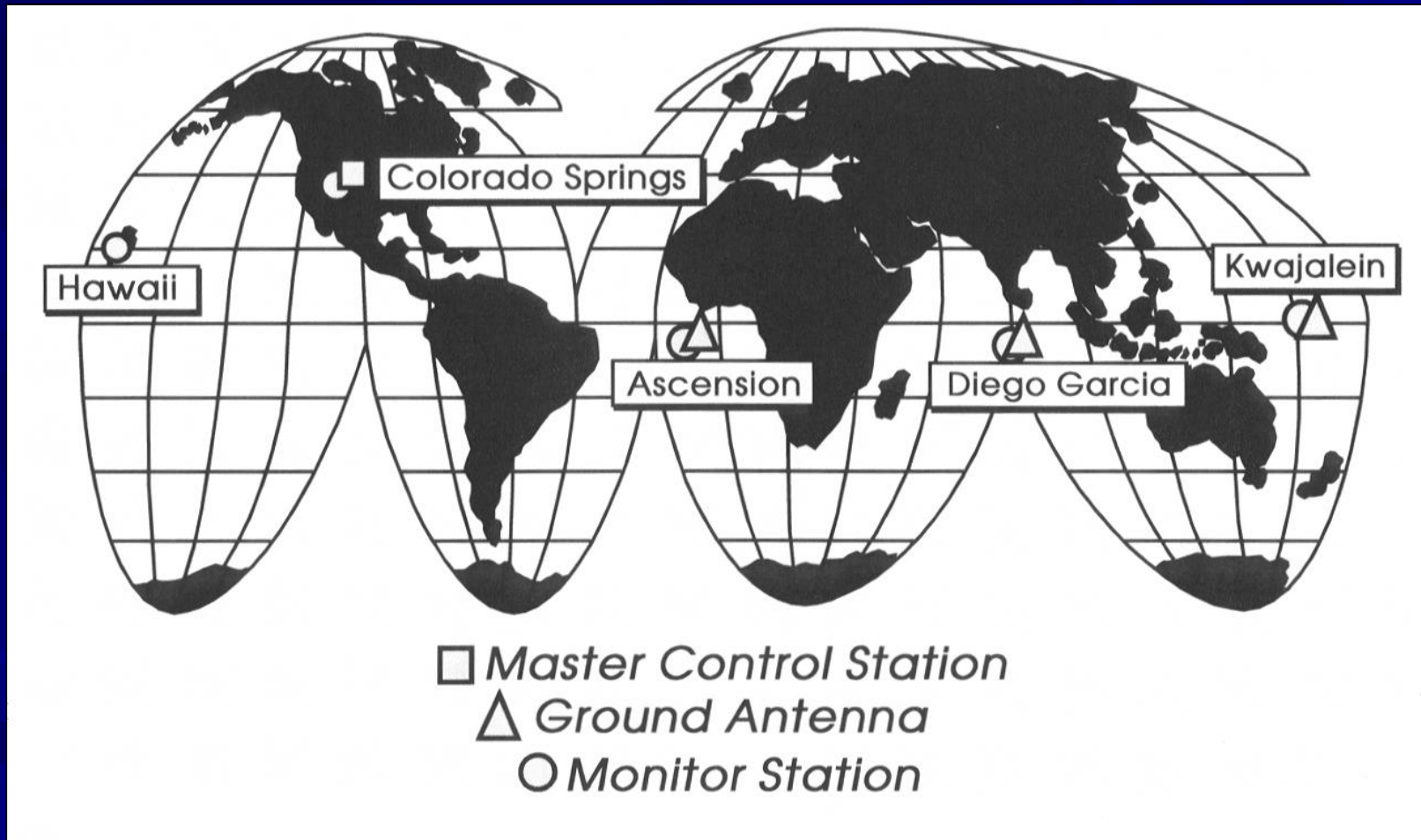
Codici C/A e P

- Le fasi delle portanti sono modulate da due codici pseudo-casuali (**codice C/A**, Coarse Acquisition, e **codice P**, Precise, o **Y** per la portante L1, solamente codice P o Y per la L2) e da un messaggio navigazionale.
- Le frequenze e le modulazioni sono controllate da orologi atomici (due al cesio e due al rubidio, con stabilità compresa fra 10^{-13} e 10^{-14} , per i satelliti del Blocco II, nuovi satelliti all'idrogeno) installati a bordo dei satelliti.

Segmento di Controllo

- Il sistema è controllato da stazioni monitor situate a Kwajalein, Diego Garcia, all'Isola di Ascension, alle Hawaii e ad una stazione master al Consolidated Space Operations Center a Colorado Springs, Colorado. Lo scopo di questo **segmento di controllo** è quello di monitorare lo stato di salute dei satelliti, determinare le loro orbite ed il comportamento degli orologi atomici, e di inviare il messaggio radio ai satelliti.

Segmento di Controllo



Segmento utente

- I ricevitori a Terra elaborano i codici e le fasi delle portanti e, nella maggior parte dei casi, estraggono anche il messaggio radio.
- L'introduzione, il 31 gennaio 1994, dell'Anti-Spoofing (AS), implica l'esclusione dell'utilizzo del codice P per gli utenti civili mediante crittografia dello stesso in codice Y.

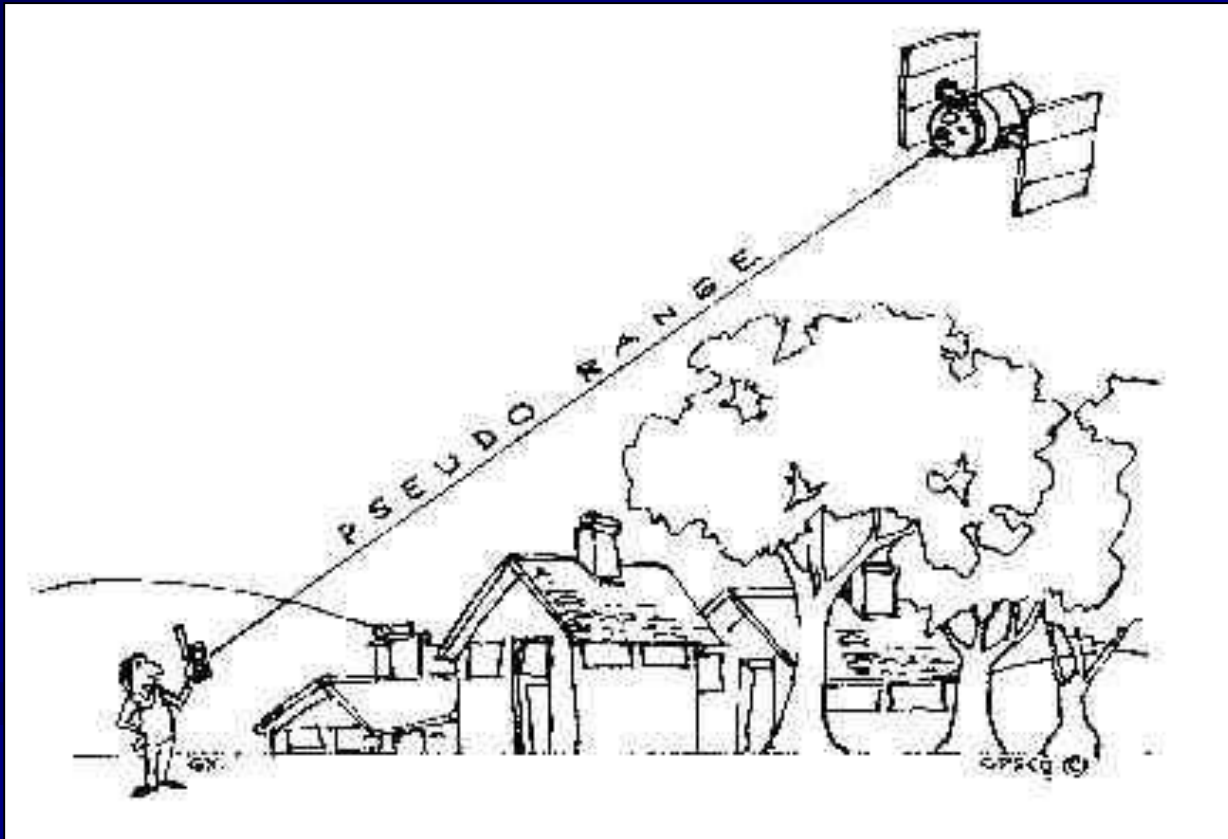
Strumenti GPS



Modalità di acquisizione ed elaborazione dei dati - gli algoritmi

- Metodologie di acquisizione dei dati GPS
 - dati pseudorange Stand-alone, registrati da un unico ricevitore di tipo navigazionale (in grado cioè di registrare le misure di codice)
 - metodologie differenziali sui dati pseudorange, che richiedono l'utilizzo dei dati registrati da un secondo ricevitore
 - dati di fase (registrati da due ricevitori di tipo geodetico).

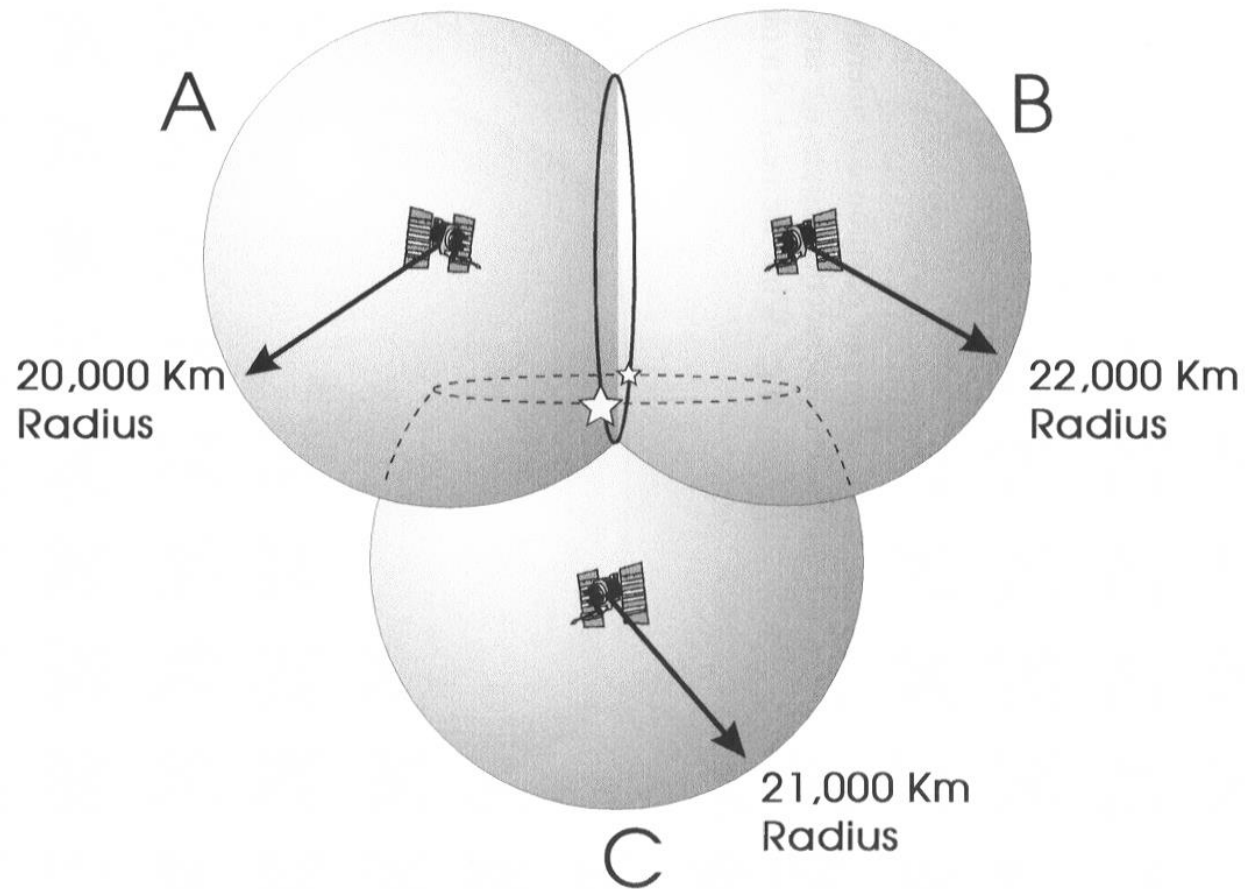
Pseudorange Stand-Alone



Posizionamento tridimensionale

- La soluzione del posizionamento tridimensionale di un punto può essere vista, da un punto di vista geometrico, come l'intersezione di tre sfere di raggio pari alla distanza satellite-punto a terra. L'intersezione delle tre sfere è rappresentata da due punti, indicati con una stella * in Figura.
- E' intuitivo che, per poter scegliere fra queste due possibili posizioni quella effettiva del punto P a terra è necessario utilizzare le informazioni provenienti da un quarto satellite.

Intersezione di tre sfere



GPS pseudorange assoluto - misure di codice

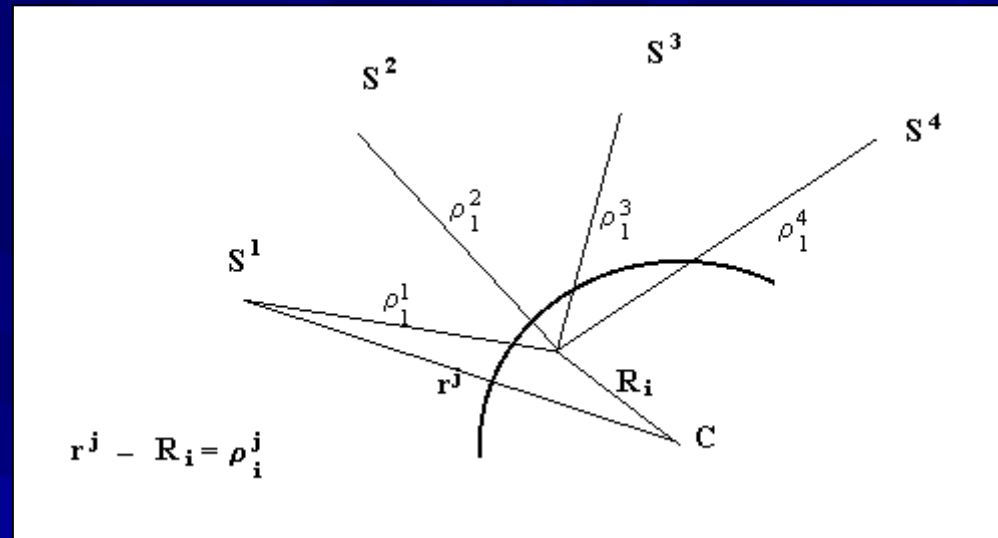
- Il sistema consente di posizionare un punto sulla superficie terrestre rispetto ad un sistema di riferimento assoluto, geocentrico (**ECEF**, Earth Centered, Earth Fixed).
- La precisione nel posizionamento per il metodo navigazionale assoluto è di **10-15 m.**

GPS pseudorange Stand-Alone

Principio di misura

- Il principio su cui si basa tale metodologia è sostanzialmente fondato sulla misura **dell'intervallo di tempo Δt** che il segnale inviato da un **satellite**, semplificato come un **impulso viaggiante alla velocità delle onde elettromagnetiche**, impiega per coprire la **distanza Satellite -Terra**, ed essere quindi captato dal ricevitore posizionato nel punto di cui si vogliono conoscere le coordinate.

Posizionamento tridimensionale



$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{(XP_1 - XS^1)^2 + (YP_1 - YS^1)^2 + (ZP_1 - ZS^1)^2} = \rho_1^1 \\
 2) \quad & \sqrt{(XP_1 - XS^2)^2 + (YP_1 - YS^2)^2 + (ZP_1 - ZS^2)^2} = \rho_1^2 \\
 3) \quad & \sqrt{(XP_1 - XS^3)^2 + (YP_1 - YS^3)^2 + (ZP_1 - ZS^3)^2} = \rho_1^3 \\
 4) \quad & \sqrt{(XP_1 - XS^4)^2 + (YP_1 - YS^4)^2 + (ZP_1 - ZS^4)^2} = \rho_1^4
 \end{aligned}$$

- dove XP_1 , YP_1 , ZP_1 rappresentano le tre coordinate incognite del punto P_1
- XS^j , YS^j , ZS^j rappresentano le tre coordinate note del satellite S^j
- $\rho_1^1, \rho_1^2, \rho_1^3, \rho_1^4$ sono le quattro distanze Satellite – punto a Terra;

- esprimendo le distanze ρ_{ij} come:

$$\rho_{ij} = v_{ij} \Delta t$$

ci si ridurrebbe, una volta misurati gli intervalli di tempo, ad un sistema di quattro equazioni indipendenti, in quattro incognite (vedi oltre), immediatamente risolvibile.

- In realtà la situazione è più complessa per i motivi che seguono:

Codici

- innanzitutto i satelliti non emettono semplici impulsi ma treni di onde quadre; tali onde hanno una frequenza di 1 MHz (**CODICE C/A, Coarse Acquisition**) e di 10 MHz (**CODICE P, Precise**), alle quali corrispondono lunghezze d'onda di circa 300 metri, e rispettivamente di 30 metri;
- queste onde quadre non sono sequenze di transizioni regolarmente alternate on-off, off-on, bensì esse seguono codici casuali.

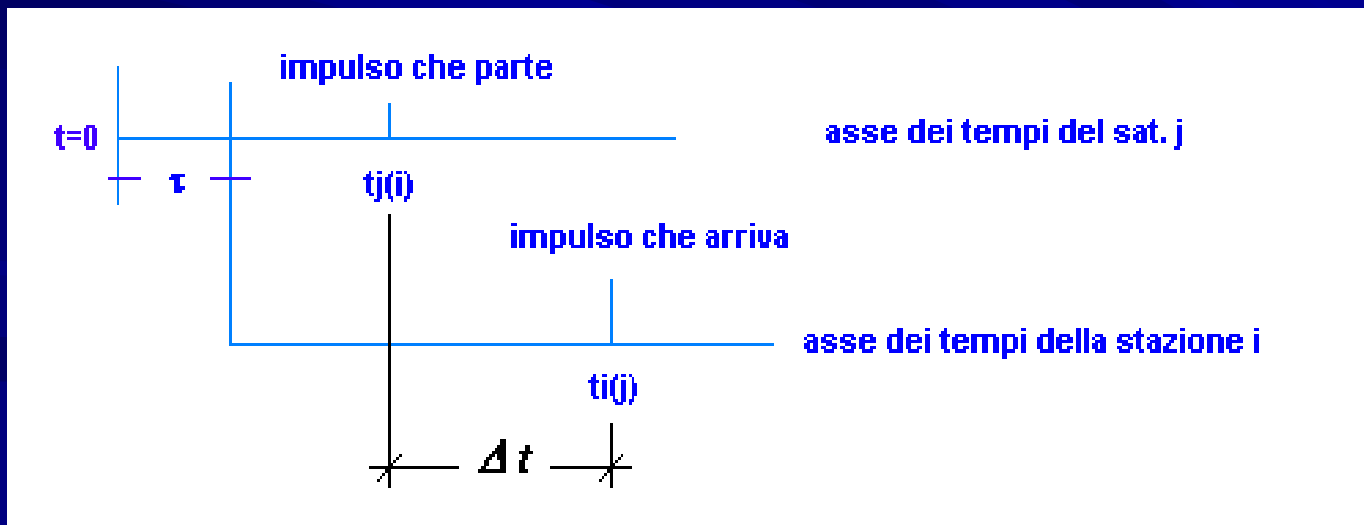
Struttura dei segnali trasmessi

- Le onde quadre sono sovrainposte come modulazione di fase alle sinusoidi portanti (L1 ed L2)
- la frequenza della sinusoide L1 è di **1575.42 MHz**, con una lunghezza d'onda di circa **190 mm**;
- la frequenza della L2 è di **1227.60 MHz**, con lunghezza d'onda di **240 mm**

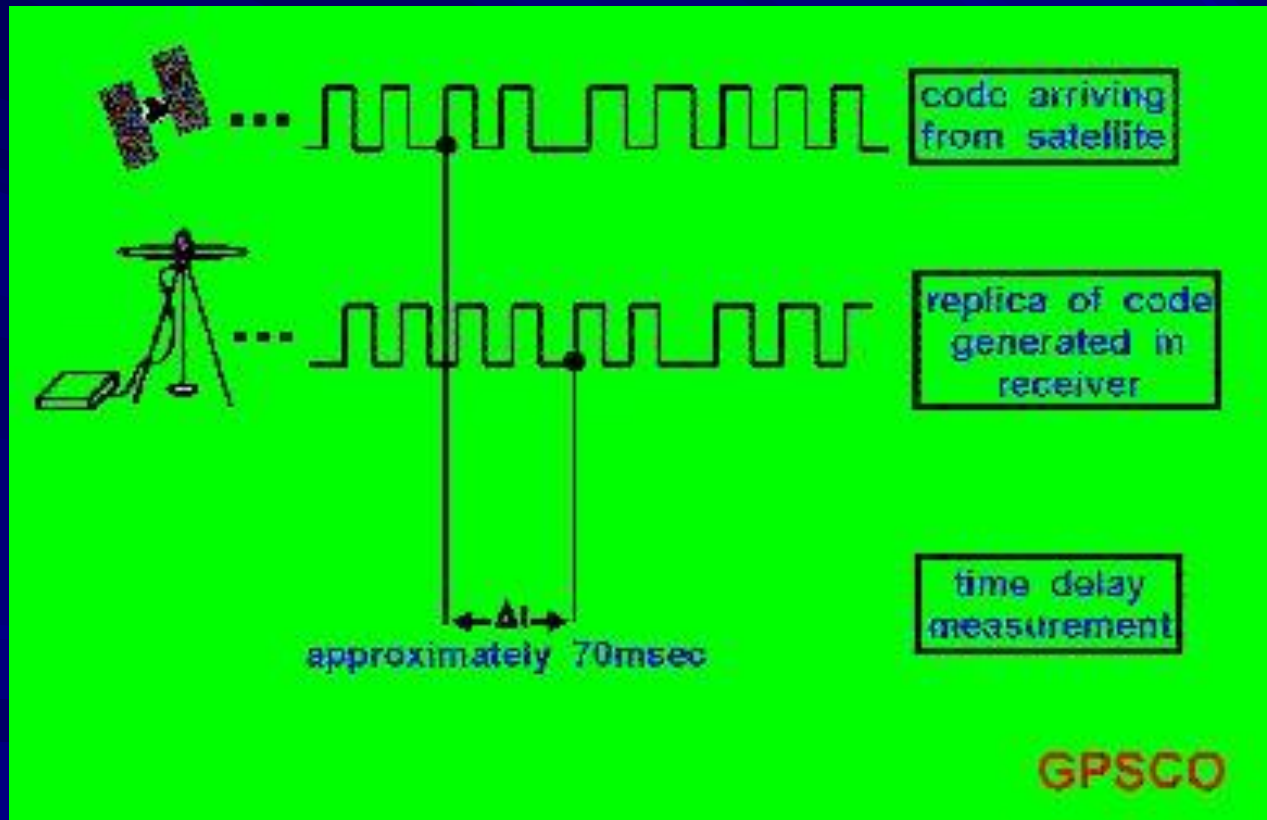
- Malgrado questa struttura complessa dei segnali emessi dai satelliti, con questo sistema (navigazionale) si possono assimilare i fronti d'onda ad impulsi che transitano dai satelliti alle antenne a Terra con una successione di 1 MHz (codice C/A) o di 10 MHz (codice P).
- Nel ricevitore a terra viene generata una copia del codice con la stessa frequenza di quello emesso dal satellite S_j .
- I due segnali vengono confrontati, con tecniche di correlazione che permettono di ottenere il valore di Δt

Principio di misura

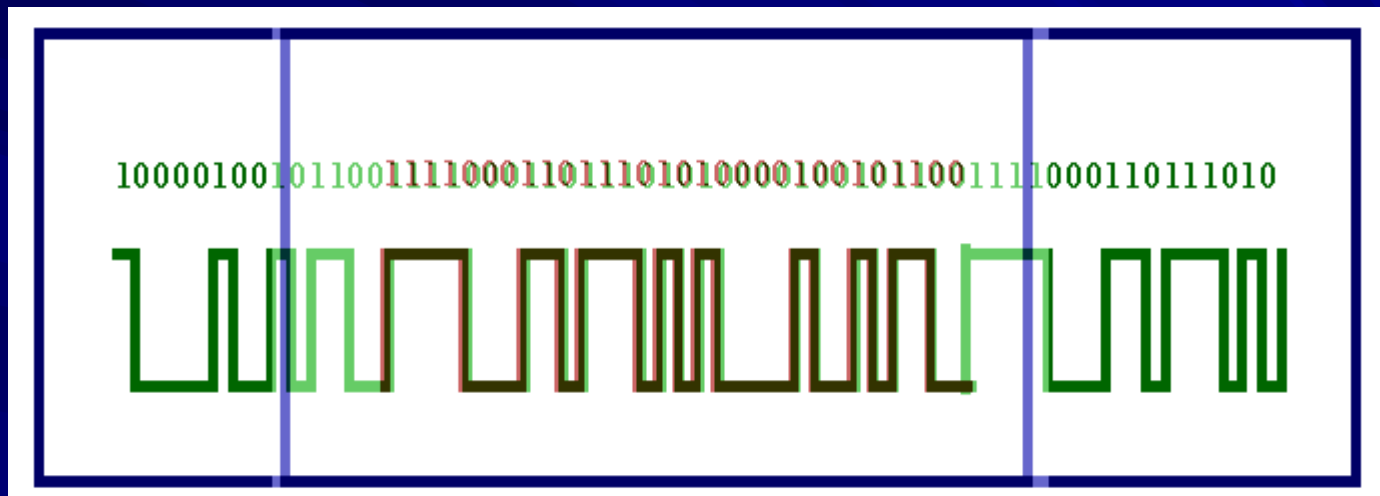
Sia $t_j(i)$ l'istante nel quale uno di questi impulsi parte dal satellite j , misurato nel sistema di riferimento del satellite j . Sia $t_i(j)$ l'istante nel quale tale impulso raggiunge la stazione i a Terra; $t_i(j)$ è misurato da un ricevitore collegato all'antenna i :



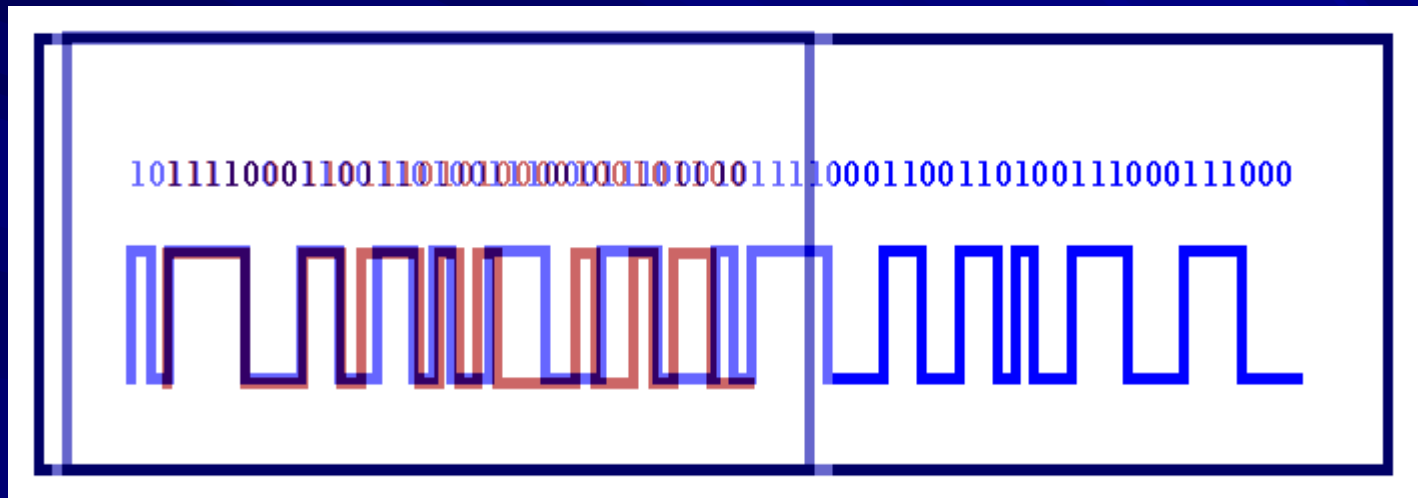
Confronto fra il segnale in arrivo e quello generato dal ricevitore



Sovrapposizione

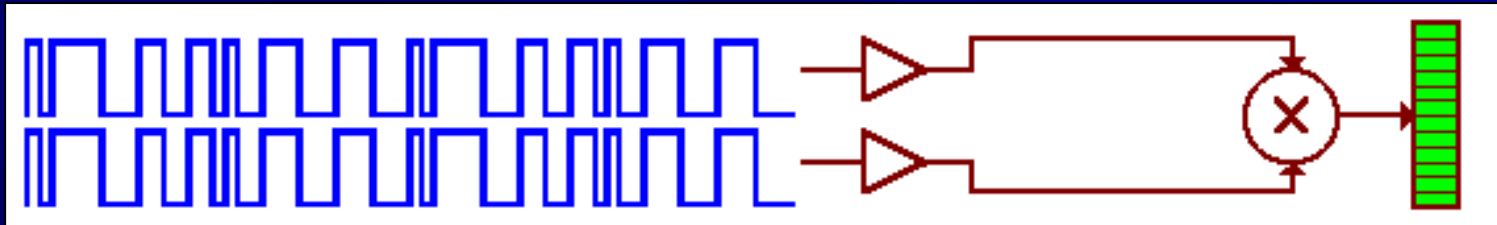


Sovrapposizione fra il segnale inviato dal satellite S_i e quello ricevuto presso la stazione P_i (il segnale generato nel ricevitore viene centrato su quello ricevuto dal satellite S_i)



Esempio di sovrapposizione fra due segnali con diverso codice PRN, senza sovrapposizione

Ricerca del massimo di correlazione



Ricerca del massimo di correlazione fra due segnali

Distanza satellite – punto a terra

■ La distanza satellite-antenna è:

$$\rho_i^j = v_i^j (t_{i(j)} - (t_{j(i)})_i)$$

dove: $(t_{j(i)})_i$ è l'istante in cui l'impulso parte dal satellite misurato nell'asse dei tempi della stazione i;

$(t_i)_j$ l'istante in cui l'impulso arriva alla stazione i;

v_i^j la velocità media di propagazione della portante fra il satellite S^j e l'antenna nella stazione P_i .

Distanza satellite – punto a terra

- Indicando con τ l'asincronismo fra la stazione ed il satellite, si ha:

$$\left(t_{j(i)}\right)_i = t_{j(i)} - \tau$$

$$\rho_i^j = v_i^j \left(t_{i(j)} - t_{j(i)} + \tau \right)$$

Risoluzione del sistema

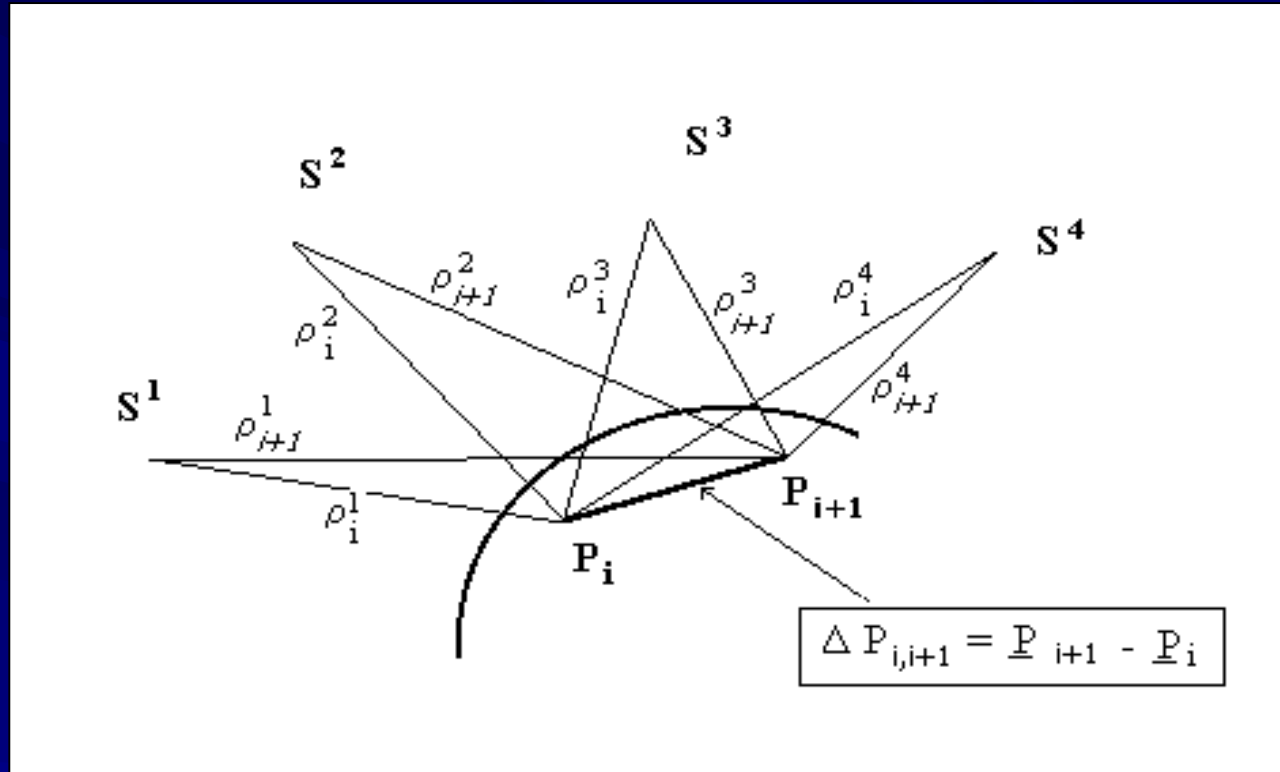
- Per determinare tali incognite e se si vuole la risoluzione in tempo reale, è necessario che tutte le osservazioni avvengano in una sola epoca; se non vi è tale necessità, l'osservazione può durare molte epoche, cioè anche diversi minuti.
- Ponendo, per semplicità, nota la velocità di propagazione, se m è il numero dei punti incogniti a terra ed n il numero dei satelliti, dato che viene effettuata un'osservazione per ogni coppia stazione-satellite, il numero delle osservazioni è $m \cdot n$.

Posizionamento 3D

- Si dimostra che il numero minimo di satelliti, indipendentemente dal numero di stazioni, è 4.
- Se le coordinate dei satelliti sono note, per risolvere il problema deve essere $n = 4$, il che significa che le stazioni devono ricevere i segnali di almeno 4 satelliti.

- Il sincronismo degli orologi dei satelliti è dell'ordine di qualche nanosecondo
- orologi atomici, al cesio, al rubidio ed all'idrogeno, dotati di un'elevatissima stabilità.
- Gli orologi di tutti i satelliti si possono considerare, al livello di approssimazione detto, sincronizzati fra di loro: si possono pertanto considerare uguali i τ_j dei diversi satelliti, mentre rimane nel sistema risolutivo l'incognita τ_i relativa all'asincronismo fra i satelliti e la stazione a Terra, la quale, normalmente, è dotata di orologio al quarzo, con livello di sincronizzazione pari a $10^{-6} \div 10^{-7}$.

Differential GPS (DGPS)



Il concetto di DGPS (GPS differenziale)

DGPS

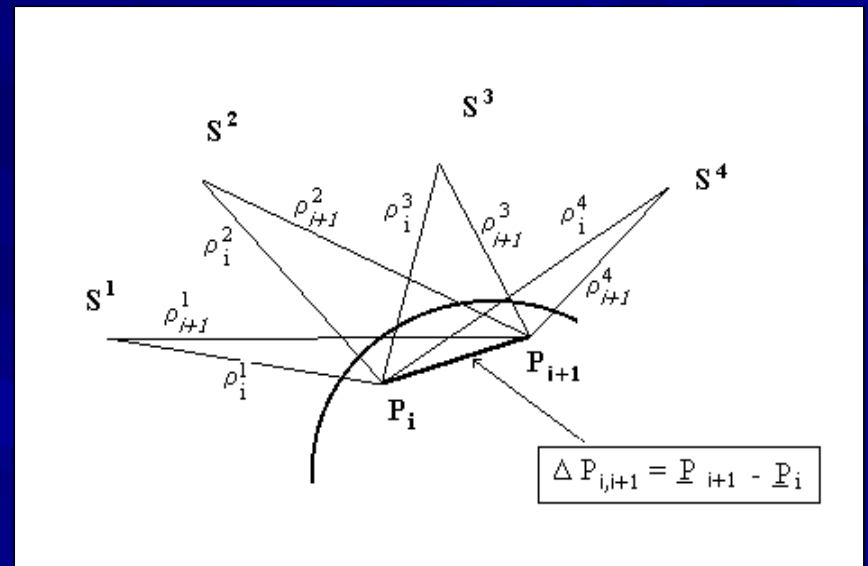
- La metodologia differenziale viene utilizzata, anche in assenza della SA, per ridurre gli errori sistematici presenti nelle osservazioni registrate da un singolo ricevitore.
- Essa si attua sfruttando le misure pseudorange registrate contemporaneamente da due ricevitori e può essere eseguita sia in post-elaborazione che in tempo reale.

DGPS

- Il GPS differenziale può essere ottenuto in diversi modi: come **soluzione del sistema alle differenze doppie degli pseudorange**, come differenziale di pseudorange o come differenziale di coordinate.
- Inoltre si può eseguire un differenziale **pseudorange lisciato con le misure di fase** in modo tale che gli errori metrici delle misure di codice vengano attenuati dalla maggior precisione delle misure interferenziali.

Differenziale ottenuto come soluzione del sistema alle differenze doppie

- Si considerano **due stazioni** che osservano contemporaneamente un gruppo di satelliti (almeno 3 per un posizionamento bidimensionale, almeno 4 per il posizionamento tridimensionale) e **si suppongono note le coordinate di una delle due stazioni.**



- Nel sistema di equazioni indipendenti analizzate per il metodo assoluto si introducono i diversi asincronismi τ_{ij} relativi ai satelliti:

$$\rho_i^j = v_i^j \left(t_{i(j)} - t_{j(i)} + \tau_i^j \right)$$

ρ_i^j modulo del vettore unente il satellite j al ricevitore a terra i

v_i^j velocità media di propagazione del segnale; poiché esso attraversa gli strati ionosferici e troposferici, la velocità dipende dalle condizioni fisiche di tali mezzi;

$t_{j(i)}$ istante in cui il baricentro (o altro punto determinato) del treno di onde quadre lascia il satellite j;

$t_{i(j)}$ istante in cui tale baricentro arriva all'antenna del ricevitore i.

Differenza prima

τ_i^j asincronismo fra l'orologio sul satellite j e quello nel ricevitore a terra i che misura.

La differenza fra due osservazioni eseguite da due stazioni a terra i ed i_{+1} rispetto uno stesso satellite S^j (differenza prima) è data da :

$$\rho_i^j - \rho_{i+1}^j = v_i^j (t_{i(j)} - t_{j(i)} + \tau_i^j) - v_{i+1}^j (t_{i+1(j)} - t_{j(i+1)} + \tau_{i+1}^j)$$

Differenza seconda

- La differenza fra 2 equazioni alle differenze prime calcolate rispetto due satelliti S_j, S_{j+1} fornisce l'equazione alle differenze seconde espressa da:

$$\begin{aligned} \left(\rho_i^j - \rho_{i+1}^j \right) - \left(\rho_i^{j+1} - \rho_{i+1}^{j+1} \right) = & v_i^j \left(t_{i(j)} - t_{j(i)} + \tau_i^j \right) - v_{i+1}^j \left(t_{i+1(j)} - t_{j(i+1)} + \tau_{i+1}^j \right) + \\ & - v_i^{j+1} \left(t_{i(j+1)} - t_{j+1(i)} + \tau_i^{j+1} \right) + v_{i+1}^{j+1} \left(t_{i+1(j+1)} - t_{j+1(i+1)} + \tau_{i+1}^{j+1} \right) \end{aligned}$$

- Ipotesizzando uguali le velocità di propagazione dei segnali, ed essendo gli orologi di tutti i satelliti sincronizzati al nanosecondo, gli asincronismi riferiti alla stessa stazione a terra si possono ritenere uguali e quindi i termini:

$$V_i^j \tau_i^j \text{ e } V_i^{j+1} \tau_i^{j+1}, \quad V_{i+1}^j \tau_{i+1}^j \text{ e } V_{i+1}^{j+1} \tau_{i+1}^{j+1}$$

si eliminano algebricamente

Determinazione della baseline

- di conseguenza nell'equazione risultante rimangono come incognite solo le tre **componenti tridimensionali Δx , Δy , Δz** del vettore fra i due punti a terra, note che siano le coordinate dei satelliti.
- Poiché in realtà le velocità non sono uguali tra loro, pur non variando di molto, deve essere aggiunto un **termine d'errore ε** che tenga conto dell'approssimazione fatta.

Equazione di osservazione

- L'equazione di osservazione così ottenuta assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \left(\rho_i^j - \rho_{i+1}^j\right) - \left(\rho_i^{j+1} - \rho_{i+1}^{j+1}\right) = & v_i^j (t_{i(j)} - t_{j(i)}) - v_{i+1}^j (t_{i+1(j)} - t_{j(i+1)}) + \\ & -v_i^{j+1} (t_{i(j+1)} - t_{j+1(i)}) + v_{i+1}^{j+1} (t_{i+1(j+1)} - t_{j+1(i+1)}) + \varepsilon \end{aligned}$$

La soluzione di un sistema di almeno **tre equazioni alle differenze seconde**, corrispondenti all'osservazione di almeno quattro satelliti, fornisce le differenze fra le coordinate delle due stazioni i ed $i+1$ ovvero le componenti tridimensionali del vettore **baseline** unente le due stazioni e quindi, note le coordinate di una di esse, le coordinate dell'altro punto a terra.

Differenziale di pseudorange - in differita ed in tempo reale

- Questa metodologia si applica calcolando le correzioni sulle misure pseudorange come differenza fra i valori pseudorange misurati (affetti da errori) e quelli calcolati in base alle coordinate dei satelliti (effemeridi) e quelle, note, della stazione master ed applicando tali correzioni alle misure pseudorange registrate dal secondo ricevitore.

- Disponendo di un collegamento radio-modem fra i due ricevitori oppure tramite telefonia cellulare e modem è possibile inviare le correzioni calcolate presso il master al ricevitore mobile, che può quindi navigare con le informazioni di posizione corrette in tempo reale

- L'equazione di osservazione alla stazione master (i) è data da:

$$\rho_{i(\text{teorico})}^j - v_i^j \Delta t_{i(\text{misurato})}^j = \tau_i^j v_i^j + \varepsilon_i^j$$

$$\tau_i^j v_i^j + \varepsilon_i^j = R_{i(\text{calcolato})}^j \quad \text{correzione RTCM}$$

Correzioni RTCM

■ *RTCM* (Radio Technical Commission Maritime)

ε_i^j errore dovuto a fluttuazioni della velocità nella stazione i-esima.

Il termine $R_{i(\text{calcolato})}^j$ rappresenta la correzione pseudorange sulla distanza fra la stazione i ed il satellite j che viene inviata, epoca per epoca, per mezzo dell'opzione "RTCM output" del ricevitore master al ricevitore mobile.

Correzioni RTCM

- L'equazione di osservazione alla stazione mobile (i+1) è data dunque da:

$$\rho_{i+1(teorico)}^j = v_{i+1}^j \Delta t_{i+1(misurato)}^j + \tau_{i+1}^j v_{i+1}^j + \varepsilon_{i+1}^j$$

$$\rho_{i+1}^j = v_{i+1}^j \Delta t_{i+1(misurato)}^j + R_i^j + (\tau_{i+1}^j - \tau_i^j) v_{i+1}^j + \Delta \varepsilon$$

ε_{i+1}^j errore dovuto a fluttuazioni della velocità nella stazione $i+1$;

$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{i+1}^j - \varepsilon_i^j$ differenza d'errore tra le due stazioni a terra.

Risolvendo un sistema di 4 equazioni di questo tipo per $j = 1,2,3,4$ ed ipotizzando nell'ambito delle approssimazioni navigazionali che per $j = 1,2,3,4$

E per le due stazioni P_i e P_{i+1} sia:

si determinano in tempo reale le coordinate del veicolo mobile **corrette con correzioni RTCM**.

$$\begin{aligned}\tau_i^j &= \tau_i^{j+1} \\ \tau_i^{j+1} &= \tau_i^{j+2} \\ \tau_i^{j+2} &= \tau_i^{j+3} \\ \tau_i^{j+3} &= \tau_{i+1}^{j+4}\end{aligned}$$

- Per ottenere il posizionamento differenziale tridimensionale del ricevitore mobile il ricevitore master e quello mobile devono vedere contemporaneamente almeno 4 satelliti.
- La scomparsa o comparsa su uno dei due ricevitori di ulteriori satelliti non provoca brusche variazioni di precisione sul calcolo delle coordinate del mobile, come può invece avvenire utilizzando il differenziale sulle coordinate.

Differenziale di coordinate

- Se non si dispone degli algoritmi per il calcolo in tempo reale delle coordinate dei satelliti, è possibile eseguire in tempo reale una correzione differenziale operando direttamente sulle coordinate geografiche e sul valore della quota ellissoidica calcolate, epoca per epoca, dal ricevitore sulla base delle misure pseudorange.

- Le correzioni sulle coordinate vengono ottenute come differenza fra le coordinate fisse e note a priori che vengono impostate sul ricevitore *master* e quelle calcolate dal ricevitore stesso ad ogni epoca di acquisizione. Tali correzioni vengono quindi inviate al ricevitore mobile (*rover*) che calcola le coordinate corrette relative alla sua posizione lungo la traiettoria percorsa.

- Non è necessario che i due ricevitori vedano la medesima costellazione di satelliti ma, in questo caso, la precisione degrada e, se uno dei due ricevitori acquisisce un nuovo satellite, questo può provocare delle variazioni improvvise sulla precisione delle coordinate del ricevitore *rover*.
- In questo caso la traiettoria del *rover*, elaborata utilizzando il differenziale eseguito sulle coordinate, a causa della temporanea comparsa o scomparsa sul ricevitore master di un satellite, può presentare una discontinuità.

Precisioni ottenibili

- Queste metodologie differenziali permettono di ottenere precisioni metriche $\sigma_{pl.} = 2-5 \text{ m}$
- precisioni superiori si possono ottenere utilizzando una classe di ricevitori cosiddetti “sub-metrici” (ricevitori “sub-meter”) che, grazie ad innovazioni tecnologiche sulla circuiteria interna consentono di raggiungere scarti quadratici medi (sqm) pari a 70 cm.

- la determinazione sperimentale della precisione è tuttavia affetta da errori che dipendono: dalla distanza tra il ricevitore *rover* ed il *Master*, in dipendenza della correlazione in distanza delle fluttuazioni della rifrattività atmosferica e dall'entità delle riflessioni dei segnali GPS da superfici circostanti l'antenna.
- Tali errori sono in generale diversi da punto a punto e non sono quindi eliminabili con gli algoritmi alle differenze.

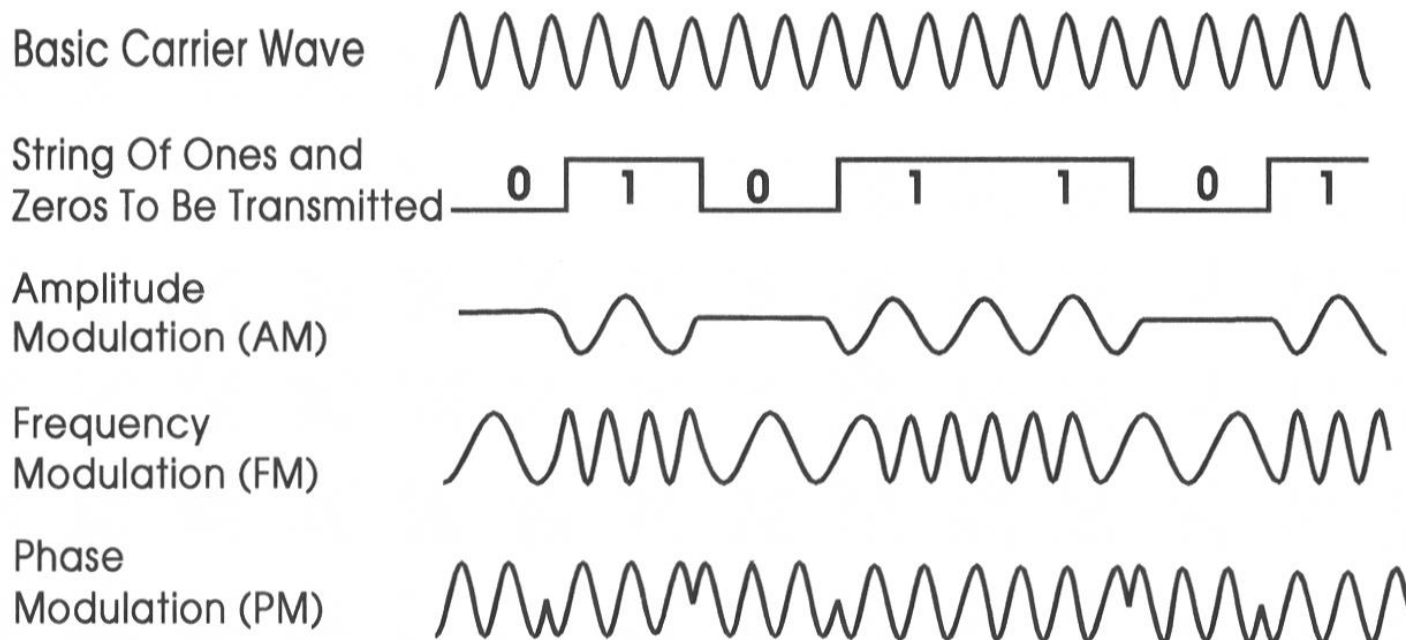
GPS interferenziale - misure di fase

- La modalità interferenziale prevede la **misura del ritardo di fase** della portante L1 (o delle due portanti L1 ed L2), accumulato nel percorso satellite - antenna a terra, e calcolato rispetto una sinusoide di uguale frequenza generata nel ricevitore della stazione stessa.
- Per far ciò viene eseguita una **correlazione incrociata** fra il segnale C/A o quello P generati nel ricevitore e l'onda ricevuta (procedura che consente comunque di ottenere gli pseudorange e quindi le coordinate del punto incognito)

- Eseguita tale correlazione, **il segnale generato localmente è centrato su quello ricevuto**: è allora possibile sottrarre dalla portante ricevuta il segnale ricevuto nel ricevitore.
- Ottenuta la portante pura, la sua fase viene confrontata con quella di una sinusoide della stessa frequenza generata localmente, il che può essere fatto solo sulla L1 o su entrambe le portanti.

- Il sistema di misura di fase risolve un ciclo di fase (2π) in circa 360 parti cosicché la distanza satellite - stazione viene misurata con **un'incertezza strumentale dell'ordine del mm.**

Modulazione di fase



Portante pura, sequenza del codice binario C/A, e modulazioni della portante in ampiezza, frequenza e modulazione di fase

GPS interferenziale

- La differenza di fase che viene misurata nella stazione i-esima fra la locale copia e la portante emessa dal satellite è data da:

$$\Delta\varphi = 2\pi f \cdot \frac{\rho_i^j}{v_i^j} - \varphi_i + \varphi^j$$

- Dalla quale si ricava l'espressione della distanza terra-satellite:

$$\rho_i^j = N_i^j \lambda_i^j + k_i^j \lambda_i^j + \frac{\varphi_i}{2\pi} \lambda_i^j - \frac{\varphi^j}{2\pi} \lambda_i^j$$

essendo:

λ	lunghezza d'onda media della portante;
N	numero intero di lunghezze d'onda comprese tra il satellite e la stazione a terra, detto "ambiguità"
k	frazione di lunghezza d'onda, misurata a partire dall'istante iniziale, $0 < k < 1$;
φ_j	fase della portante in partenza dal satellite;
φ_i	fase della sinusoide di riferimento.

Differenza prima

- La differenza fra due osservazioni eseguite all'epoca t_0 dalle stazioni a terra i e $i+1$ al satellite j è detta **differenza prima** ed è priva del termine relativo alla fase del satellite:

$$\rho_i^j - \rho_{i+1}^j = (\lambda N_i^j + \lambda k_i^j + \frac{\varphi_i}{2\pi} \lambda) - \left(\lambda N_{i+1}^j + \lambda k_{i+1}^j + \frac{\varphi_{i+1}}{2\pi} \lambda \right)$$

Differenze seconde

- L'equazione alle **differenze seconde** delle osservazioni eseguite in un'epoca generica t da due stazioni a terra i ed $i+1$ rispetto due satelliti S_j , S_{j+1} è data da:

$$\rho_i^j - \rho_i^{j+1} - \rho_{i+1}^j + \rho_{i+1}^{j+1} = (N_i^j - N_i^{j+1} - N_{i+1}^j + N_{i+1}^{j+1})\lambda + \\ + (n_i^j - n_i^{j+1} - n_{i+1}^j + n_{i+1}^{j+1})\lambda + (k_i^j - k_i^{j+1} - k_{i+1}^j + k_{i+1}^{j+1})\lambda + \varepsilon$$

con:	k_{ij}	variazione di frazione di ciclo, termine misurato;
	n_{ij}	variazione di cicli avvenuta a seguito dello spostamento dei satelliti sull'orbita fra l'istante t_0 e t , termine misurato;
	ε	termine d'errore che tiene conto di tutte le componenti di errore non differenziate (errori ionosferici, troposferici, di orologio, d'orbita etc.)

- L'equazione alle differenze seconde contiene come incognite, oltre alle coordinate delle stazioni, la combinazione delle ambiguità.

Differenza tripla

- Eseguendo un'ulteriore differenziazione di due differenze seconde calcolate per due epoche successive t e $t+1$, si ottiene la cosiddetta ***differenza tripla***, che, nell'ipotesi non venga perduto il contatto con i satelliti (*cycle slip*), è priva del termine relativo alle ambiguità:

Differenza tripla

$$\begin{aligned} & \left[\rho_i^j - \rho_i^{j+1} - \rho_{i+1}^j + \rho_{i+1}^{j+1} \right]_{t+1} - \left[\rho_i^j - \rho_i^{j+1} - \rho_{i+1}^j + \rho_{i+1}^{j+1} \right]_t = \\ & \left[\left(n_i^j - n_i^{j+1} - n_{i+1}^j + n_{i+1}^{j+1} \right) \lambda + \left(k_i^j - k_i^{j+1} - k_{i+1}^j + k_{i+1}^{j+1} \right) \lambda \right]_{t+1} \\ & - \left[\left(n_i^j - n_i^{j+1} - n_{i+1}^j + n_{i+1}^{j+1} \right) \lambda + \left(k_i^j - k_i^{j+1} - k_{i+1}^j + k_{i+1}^{j+1} \right) \lambda \right]_t + \varepsilon^* \end{aligned}$$

- Tre equazioni alle differenze triple consentono di calcolare le coordinate della stazione i rispetto alla stazione $i+1$, ovvero le componenti cartesiane x , y , z del vettore “baseline” fra le due stazioni.
- Questo calcolo viene utilizzato nell'elaborazione statica di una base fra due o più ricevitori

- Con una serie di iterazioni ai minimi quadrati vengono calcolate le coordinate approssimate che vengono inserite nel set di equazioni alle differenze seconde per il calcolo, anche qui con procedura ai minimi quadrati sul set di osservazioni, dei valori delle ambiguità.
- Tali valori vengono quindi approssimati ai valori interi e successivamente utilizzati per ricalcolare le componenti del vettore fra le due stazioni.

Pseudorange lisciato con le misure di fase - Phase smoothed pseudorange

- Come osservabili vengono utilizzate sia le misure pseudorange che le misure di fase.
- Lo pseudorange lisciato di fase all'epoca t_i è un filtro costituito da una combinazione lineare dello pseudorange all'epoca t_i con peso w_1 e dello pseudorange lisciato a t_{i-1} calcolato per l'epoca t_i , utilizzando la differenza di fase nell'intervallo $(t_i - t_{i-1})$ con un peso w .

■ Inizio delle osservazioni: $w1 = 1.00$ $w2 = 0.00$
($w1 + w2 = 1$)

·
·
·

■ Dopo circa 100 misure $w1 = 0.01$ $w2 = 0.99$

Se durante le osservazioni interviene un cycle slip, i pesi vengono posti a:

$w1 = 1.00$ $w2 = 0.00$

cioè il filtro viene reinizializzato.