Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 9

Prof. Valentina Beorchia

12 maggio 2025

1. Si consideri una curva regolare $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ e mai nulla $w : I \to \mathbb{R}^3$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. La superficie regolare S data dalla parametrizzazione

   $$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u,v) = \alpha(u) + v\,w(u)$$

   si chiama *superficie rigata*, la curva $\alpha(I)$ si dice *direttrice* e le rette affini $\alpha(u_0) + v\,w(u_0)$ per $u_0 \in I$ sono dette *generatrici*.

   Si determinino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S in un generico punto, nonché la sua curvatura Gaussiana.

2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare esia $p \in S$. Su dimostri che se $H \ni p = \varphi(u_0, v_0)$ è un qualunque piano affine con giacitura contenente il versore normale

   $$N(u_0, v_0) = \frac{\partial_u\varphi(u_0,v_0) \wedge \partial_v\varphi(u_0,v_0)}{\|\partial_u\varphi(u_0,v_0) \wedge \partial_v\varphi(u_0,v_0)\|},$$

   cioè un piano *normale* alla superficie in p, allora H è diverso dal piano tangente a S in un opportuno intorno di p in $H \cap S$, e che in particolare la curva $H \cap S$ è regolare in un intorno di $p \in S$.

3. Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondale, nonché la curvatura gaussiana in un generico punto, della sella di scimmia parametrizzata da

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u,v) = (u, v, u^3 - 3v^2u).$$

4. Sia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ ed invertibile con inversa continua. Si consideri $S = \varphi(U)$ dove $U = (0, 1) \times (0, \pi)$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ con $\varphi(u, v) = (u \cos v, u, f(v))$.

   (a) Si dimostri che S è una superficie regolare e φ è una parametrizzazione locale.

   (b) Si calolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

5. Fissato $a \neq 0$, sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare parametrizzata da $\sigma(u) = (\cos u, \sin u, au)$. L'elicoide retto S costruito a partire da essa è l'unione delle rette che passano per $\sigma(u)$ e che intersecano perpendicolarmente l'asse delle z, ed è parametrizzato da $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$.

   (a) Per ogni $p \in S$, si determini una base del piano tangente $T_P S$.

   (b) Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

   (c) Si calcolino curvatura Gaussiana e curvatura media dell'elicoide.

   (d) Si verifichi che l'elicoide è una superficie rigata e si dica se è sviluppabile o meno.