

11

EFFETTI DEL SECONDO ORDINE

A. A. 2024-2025
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

Effetti del secondo ordine

INSTABILITA' DI ELEMENTI SNELLI

Consideriamo un pilastro soggetto ad una sollecitazione di compressione assiale. Nella realtà fisica è di fatto impossibile che tale compressione solleciti l'elemento con uno sforzo normale puro (in conseguenza delle imperfezioni nella geometria e nei materiali che compongono la sezione e di quelle nell'applicazione del carico).

Queste imprecisioni determinano quindi l'insorgenza di una componente flettente di sforzo nell'asta, che tende ad incurvarla (deformazione trasversale).

A causa degli spostamenti laterali, l'azione assiale induce quindi sollecitazioni flessionali aggiuntive, che aumentano al crescere della snellezza dell'elemento.

Tali sollecitazioni sono dette **EFFETTI DEL SECONDO ORDINE**

In elementi snelli, questi effetti possono determinare il collasso prematuro dell'elemento per **instabilità**.

IN GENERALE...

...l'instabilità dell'equilibrio riguarda le **membrature snelle soggette a compressione**, per le quali le **sollecitazioni aggiuntive associate agli spostamenti trasversali** dell'elemento (ovvero gli «effetti del second'ordine») assumono rilevanza (non sono, cioè, trascurabili).



CONCETTO DI SNELLEZZA:

Qualitativamente, si parla di membrature snelle quando le dimensioni delle sezioni trasversali sono molto piccole rispetto alla lunghezza.

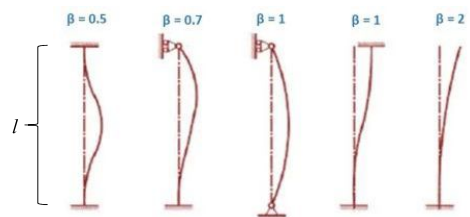
Quantitativamente, un elemento isolato e semplicemente compresso viene definito snello se la sua snellezza λ , definita come il rapporto tra la luce libera di inflessione l_0 e il raggio d'inerzia i , supera il valore limite λ_{lim} :

Snellezza $\lambda = \frac{l_0}{i}$ con $i = \sqrt{J/A}$ e $l_0 = \beta \cdot l$

J momento d'inerzia della sezione
 A area della sezione
 l lunghezza dell'elemento

N_{sd} azione assiale (di compressione)

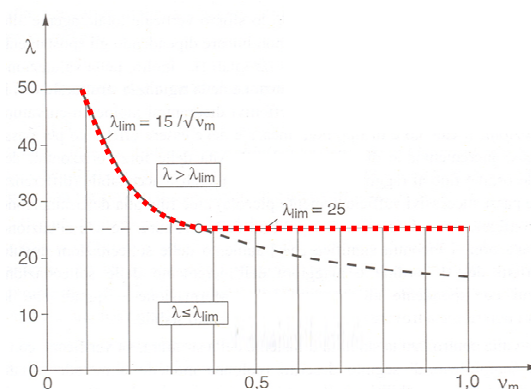
Snellezza limite $\lambda_{lim} = \max \left\{ \begin{array}{l} 25 \\ 15 \\ \sqrt{v_m} \end{array} \right\}$ con $v_m = \frac{N_{sd}}{f_{cd} A_c}$



Quindi l'elemento soggetto a compressione è snello se:

$$\lambda > \lambda_{lim} = \max \left\{ \begin{array}{l} 25 \\ 15 \\ \sqrt{v_m} \end{array} \right\}$$

Si attiva quindi anche una componente di sollecitazione flettente non trascurabile (elemento soggetto a **PRESSOFLESSIONE**)



In generale, nelle **membrature in c.a.**, caratterizzate solitamente da dimensioni delle sezioni trasversali non trascurabili rispetto alla loro lunghezza, il problema della **instabilità** dell'equilibrio è **meno importante** rispetto a quanto si rileva, ad esempio, nelle **strutture in acciaio**, generalmente **più snelle**.

Esistono però varie **tipologie strutturali in c.a.** nelle quali la **snellezza** raggiunge valori **elevati**, come ad esempio pile di ponti e viadotti, colonne di capannoni prefabbricati, telai caratterizzati da notevoli deformabilità.

Va considerato inoltre che la crescente utilizzazione di calcestruzzi ad alta resistenza ha portato alla progettazione di membrature con sezioni di dimensioni più contenute, rendendo più importante l'entità delle sollecitazioni del secondo ordine ed i conseguenti problemi di instabilità dell'equilibrio

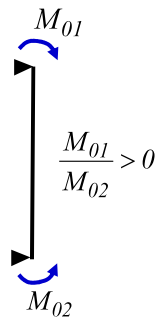
Le correnti NTC'18 (D.M. 17.01.2018) indicano un valore di snellezza limite anche per elementi soggetti anche a flessione.

In questo caso:

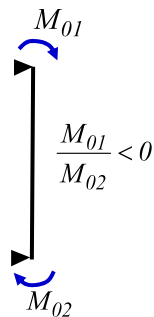
$$\lambda_{lim} = \frac{15.4 \cdot C}{\sqrt{\nu_m}} \quad \text{con} \quad \nu_m = \frac{N_{sd}}{f_{cd} A_c} \quad \text{e} \quad C = 1.7 - \frac{M_{01}}{M_{02}} \quad 0.7 \leq C \leq 2.7$$

ATTENZIONE AI SEGNI! →

Configurazione con
momenti d'estremità
di segno opposto



Configurazione con
momenti d'estremità
di segno concorde

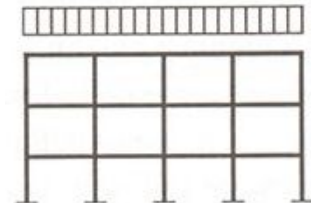


Fino a qui abbiamo sempre fatto riferimento a singole membrature.

Guardando invece all'intera struttura, gli effetti globali del second'ordine negli edifici possono essere trascurati se si ha:

$$P_{Ed} \leq 0.31 \cdot \frac{n}{n+1.6} \cdot \frac{\sum_i (E_{cd,i} I_{c,i})}{L^2}$$

0.12 ≤ < 1



con:

P_{Ed} = carico verticale totale (su elementi controventati e di controvento)

n = numero di piani

L = altezza totale edificio (sopra il vincolo ad incastro di base)

$E_{cd,i}$ = valore di calcolo del modulo elastico del calcestruzzo dell' i -esimo elemento di controvento

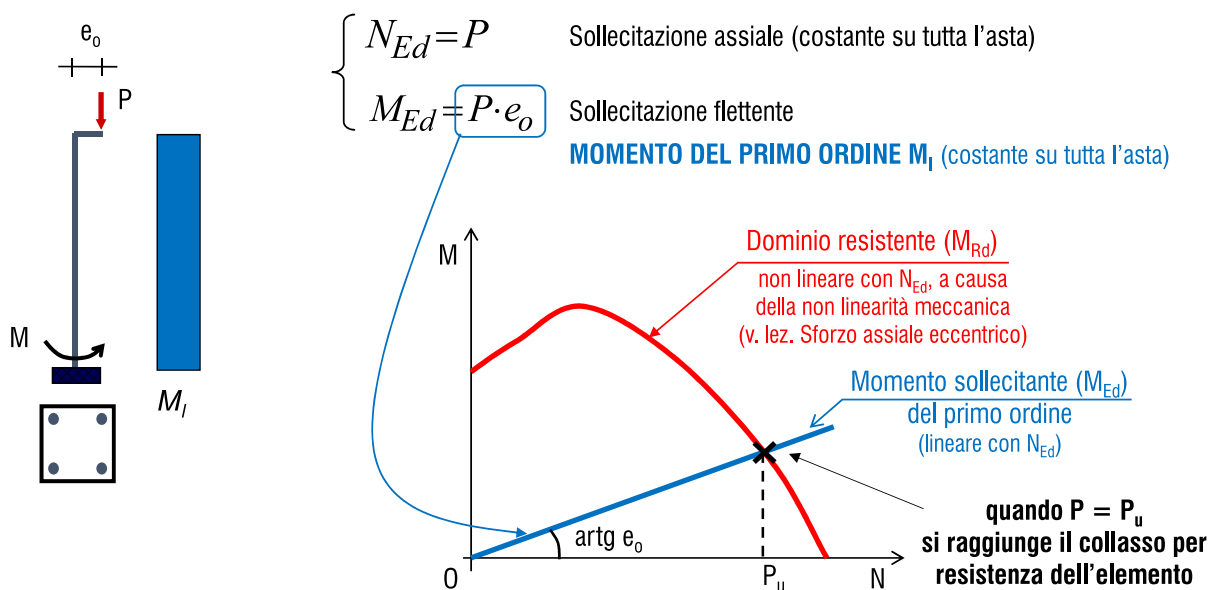
$I_{c,i}$ = momento d'inerzia dell' i -esimo elemento di controvento (valuto nell'ipotesi di sezione interamente reagente)

$E_{cd,i} \cdot I_{c,i}$ = rigidità flessionale dell' i -esimo elemento di controvento

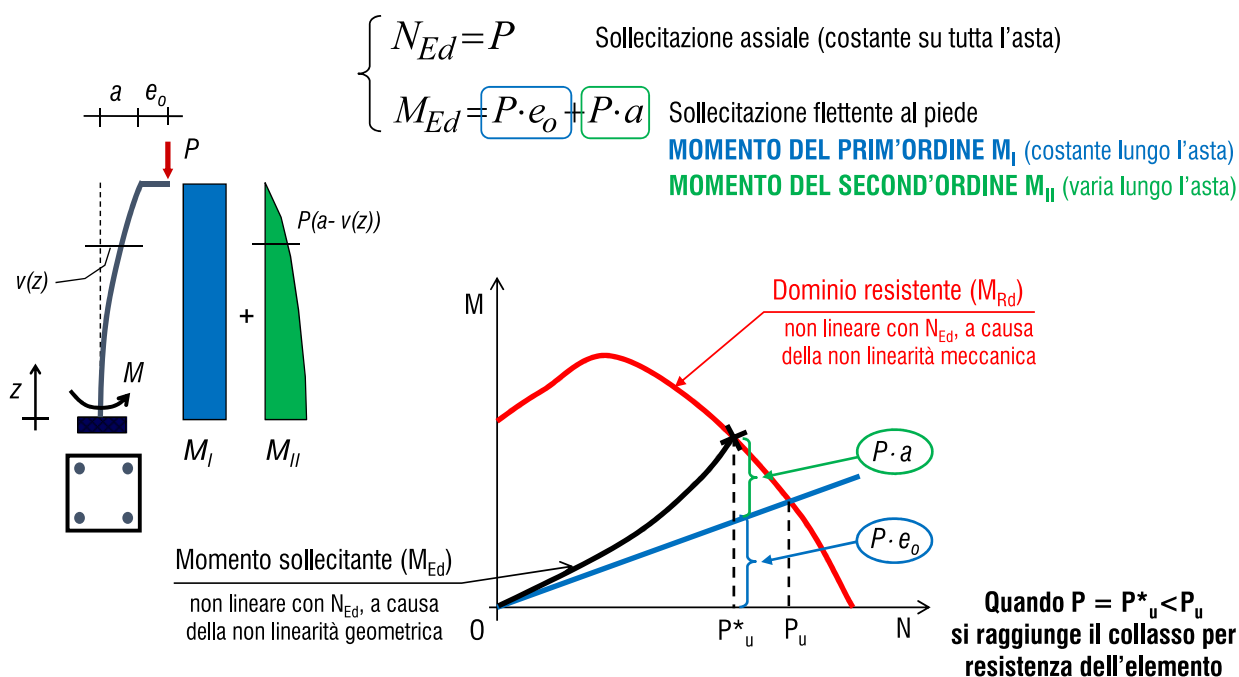


EFFETTI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE

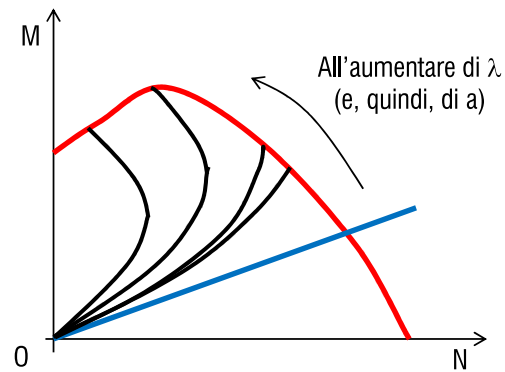
Si consideri un'asta incastrata al piede, con sezione costante, soggetta ad un carico assiale P eccentrico (eccentricità e_0). Assumendo l'asta indeformabile (le deformazioni trasversali sono trascurabili) si ha:



In realtà, l'asta si deforma lateralmente e di conseguenza si ha un incremento della sollecitazione flessionale (effetto del SECONDO ORDINE). **Nelle aste snelle questo incremento non può essere trascurato:**



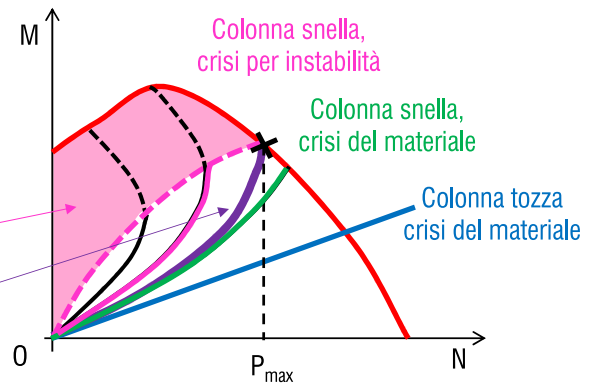
Quanto più l'elemento è snello, tanto più l'effetto del secondo ordine diventa importante e il collasso per raggiungimento della resistenza della sezione al piede avviene per un carico P inferiore.



Se però l'elemento è particolarmente snello, si raggiunge il **collasso per perdita dell'equilibrio (crisi per instabilità)** prima dell'esaurimento delle capacità di resistenza.

ZONA DI EQUILIBRIO
INSTABILE

$$\lambda = \lambda^*$$



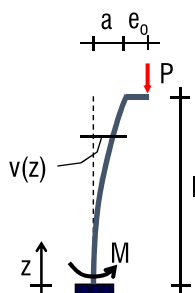
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



9

TRACCIAMENTO DELLE CURVE $M_{Ed}(N_{Ed})$

Per determinare le curve $M_{Ed}(N_{Ed})$ è necessario valutare come varia a con P . Scriviamo pertanto l'equilibrio alla rotazione tra forze interne ed esterne rispetto ad una generica sezione lungo l :



$$M_{int}(z) = M_{ext}(z)$$

$$M_{ext}(z) = \underline{P \cdot e_0} + \underline{P \cdot (a - v(z))}$$

Somma dei momenti di I e II ordine

$$M_{int}(z) = K(v''(z)) \cdot v''(z)$$

Il momento flettente nella generica sezione è il prodotto della curvatura $\varphi = v''(z)$ per la rigidezza flessionale $K(\varphi)$ - [v. Eq.ne linea elastica]

Otteniamo un'equazione differenziale:

$$K(v''(z)) \cdot v''(z) + P \cdot v(z) = P \cdot [e_0 + a]$$

Metodi risolutivi:

- Procedura iterativa → Metodo Generale
- Procedure semplificate → Metodo Colonna Modello
Metodo Stato Equilibrio



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



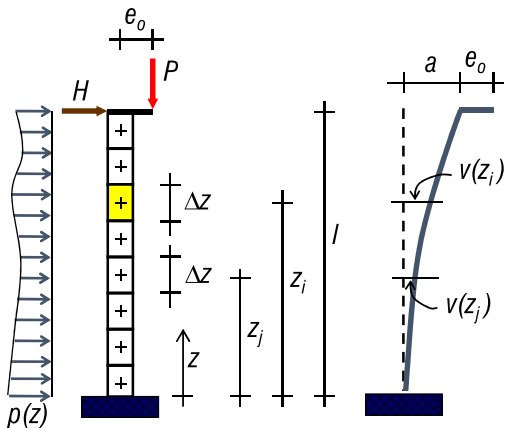
10

METODO GENERALE - Procedimento iterativo che conduce al rispetto di equilibrio e congruenza in ogni concio

Consideriamo una generica asta di lunghezza l incastrata al piede, soggetta ad un carico assiale P in sommità eccentrico (e_0), un carico orizzontale H in sommità ed un carico variabile distribuito lungo l'altezza $p(z)$.

Discretizziamo l'elemento in un numero finite n di conci di altezza Δz .

Passo (1): assunto che, in ogni sezione, il momento sia pari al **momento di primo ordine** M_I ;



$$M^{(1)}(z_i) = M_I(z_i)$$

Per calcolarlo, mi posiziono in una generica sezione i e scrivo l'eq. alla rotazione delle forze esterne al di sopra

$$M_I(z_i) = P \cdot e_0 + H \cdot (l - z_i) + \int_{z_i}^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

Al passo (1), lo spostamento laterale v nella generica sezione i sarà dato dalla somma degli spostamenti di tutti i conci dalla base a i :

$$v^{(1)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

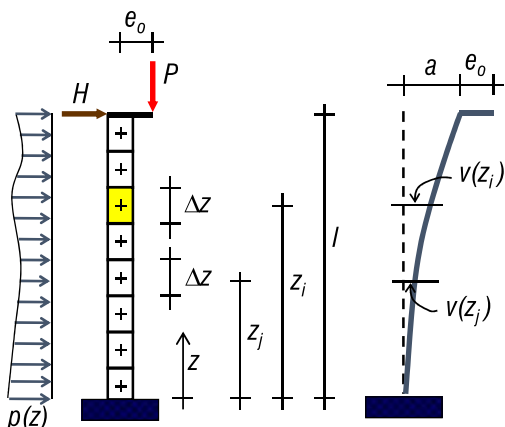
Rotazione della sezione j

$$\text{In sommità sarà: } v^{(1)}(l) = a^{(1)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$



Passo (2): assunto che, in ogni sezione, il momento sia pari a

- il **momento di primo ordine** M_I (già calcolato al passo 1, non varia)
- + il **momento di second'ordine** M_{II} generato dallo spostamento $v^{(1)}(z_i)$ (calcolato al passo 1)



$$M^{(2)}(z_i) = M_I(z_i) + M_{II}(z_i)$$

Ovvero

$$M^{(2)}(z_i) = M_I(z_i) + N \cdot [a^{(1)} - v^{(1)}(z_i)]$$

Calcolati al precedente passo (1)

Al passo (2), lo spostamento laterale v nella generica sezione i sarà dato dalla somma degli spostamenti di tutti i conci dalla base a i :

$$v^{(2)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(2)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

$$\text{In sommità sarà: } v^{(2)}(l) = a^{(2)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(2)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$



Generico

passo (k): assunto che, in ogni sezione, il momento sia pari a

- il **momento di primo ordine** M_I (già calcolato al passo 1, non varia)
- +
 - il **momento di second'ordine** M_{II} generato dallo spostamento $v^{(k-1)}(z_i)$ (calcolato al passo precedente)

$$M^{(k)}(z_i) = M_I(z_i) + M_{II}(z_i)$$

Ovvero

$$M^{(k)}(z_i) = M_I(z_i) + N \cdot [a^{(k-1)} - v^{(k-1)}(z_i)]$$

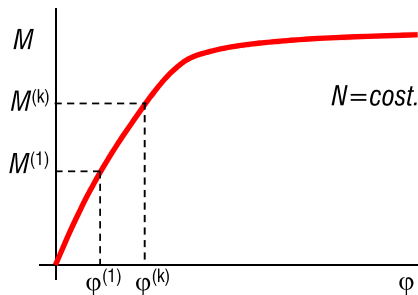
Calcolati al precedente
passo (k-1)

Lo spostamento laterale v nella generica sezione i

$$v^{(k)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

In sommità sarà:

$$v^{(k)}(l) = a^{(k)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$



Si prosegue così per passi successivi, fino a quando le differenze in termini di inflessione (a) e, quindi di momento (M), non scendono al di sotto di una prefissata tolleranza rispetto al passo precedente.

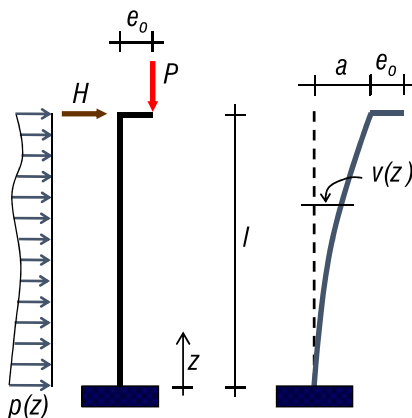
$$\frac{a^{(k)} - a^{(k-1)}}{a^{(k)}} \leq \varepsilon_a$$

$$\frac{M^{(k)} - M^{(k-1)}}{M^{(k)}} \leq \varepsilon_M$$



METODO della COLONNA MODELLO - Applicabile a: elementi isostatici (o riconducibili a tali) con sezione trasversale costante e sforzo normale costante lungo l'asse

Si assegna a priori la forma semplificata della **deformata** come **semionda di senoide** avente ampiezza indeterminata « a ». La semplificazione connessa alla **scelta di una deformata di tipo predefinito** non determina una grave imprecisione e, grazie a tale assunzione, la deformata della colonna, cui sono connessi gli effetti del II ordine, dipende solo dall'ampiezza « a » dello spostamento in sommità.



Deformata:

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_o}\right) \quad \text{con } l_o = \beta \cdot l$$

Rotazione (derivata prima della deformata):

$$v'(z) = a \cdot \frac{\pi}{l_o} \sin \frac{\pi z}{l_o}$$

Curvatura (derivata seconda della deformata):

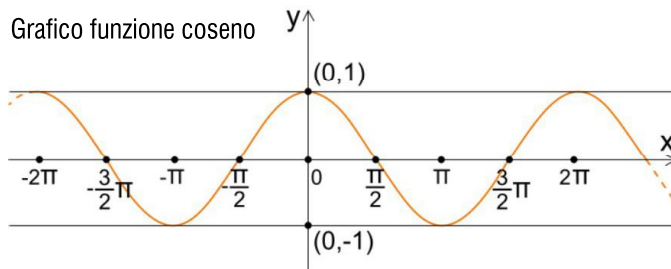
$$v''(z) = a \cdot \frac{\pi^2}{l_o^2} \cos \frac{\pi z}{l_o}$$

Nella sezione di base ($z=0$, $\cos \pi z/l_o = 1$),
chiamando la curvatura $\varphi_0 = v''(0)$:

$$a = \frac{l_o^2}{\pi^2} \varphi_0$$



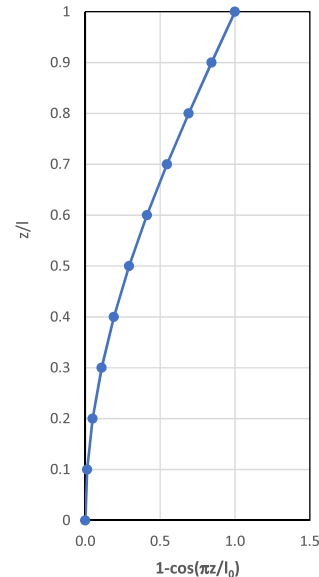
Grafico funzione coseno



Esempio: $v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_0}\right)$

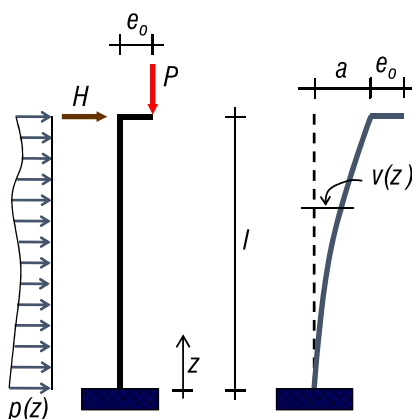


z/l	z/l_0	$\cos(\pi z/l_0)$	$1 - \cos(\pi z/l_0)$
0	0	1.000	0.000
0.1	0.05	0.988	0.012
0.2	0.1	0.951	0.049
0.3	0.15	0.891	0.109
0.4	0.2	0.809	0.191
0.5	0.25	0.707	0.293
0.6	0.3	0.588	0.412
0.7	0.35	0.454	0.546
0.8	0.4	0.309	0.691
0.9	0.45	0.156	0.844
1	0.5	0.000	1.000

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

15

Calcolo il momento delle generato dalle forze esterne (equilibrio alla rotazione rispetto alla base):



$$M_e = M^I + M^{II}$$

Momento del primo ordine

$$M^I = P \cdot e_0 + H \cdot l + \int_0^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

Momento di secondo ordine

$$M^{II} = P \cdot a$$

$$M^{II} = \frac{P \cdot l_0^2}{\pi^2} \cdot \varphi_0 \approx \frac{P \cdot l_0^2}{10} \cdot \varphi_0$$

Nella sezione di base si dovrà verificare che $M_e(N, \varphi_0) \leq M_i(N, \varphi_0)$

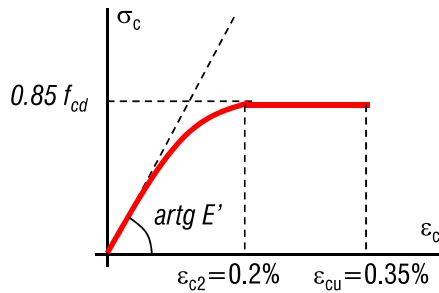
Per eseguire le verifiche, dobbiamo quindi calcolarci i diagrammi $M_\varphi - N$

M_e Momento esterno (sollecitante)
 M_i momento interno

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

16

Per calcolare i diagrammi $M_f\text{-}\varphi\text{-}N$ dobbiamo innanzitutto definire quali sono i **legami costitutivi** dei materiali calcestruzzo e acciaio (v. lez.03 Caratteristiche dei materiali)

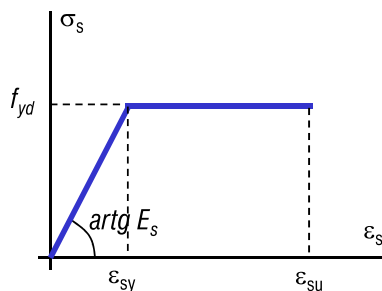


Per il calcestruzzo

$$\sigma_c = 0.85 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \cdot f_{cd} \quad \text{per } \varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$$

$$\sigma_c = 0.85 f_{cd} \quad \text{per } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad E' = 850 \cdot f_{cd} \quad (<< E_c)$$



Per l'acciaio delle barre d'armatura

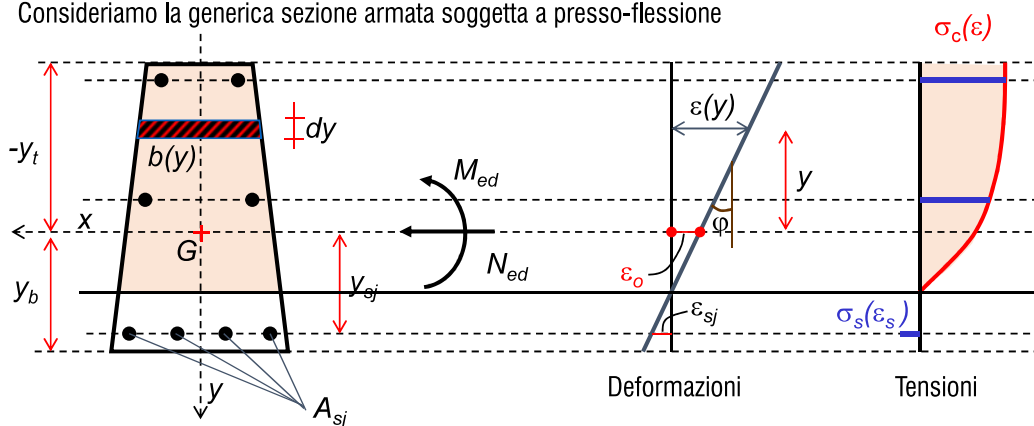
$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{per } \varepsilon_s < \varepsilon_{sy}$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{per } \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad E_s = 200 \text{ GPa}$$



Consideriamo la generica sezione armata soggetta a presso-flessione



Equilibrio alla traslazione:

$$N = \int_{-y_t}^{y_b} b(y) \cdot \sigma_c(\varepsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m A_{sj} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{sj})$$

Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro G:

$$M = \int_{-y_t}^{y_b} y \cdot b(y) \cdot \sigma_c(\varepsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m y_{sj} \cdot A_{sj} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{sj})$$



Per la VERIFICA della SEZIONE CRITICA (ovvero la sezione al piede), si riportano le curve del **momento interno** M_i e del **momento esterno** M_e su uno stesso diagramma $M-\varphi$ (valutate per una fissata azione assiale $N=P$)

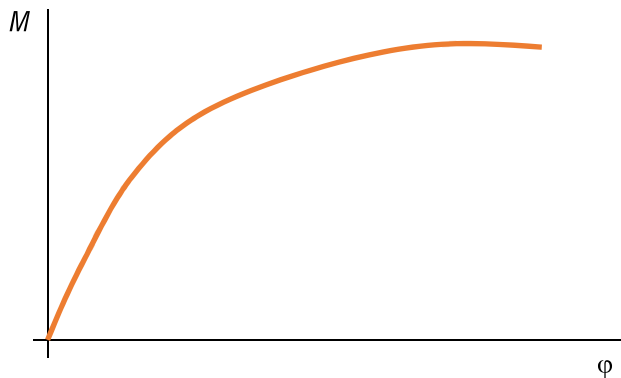


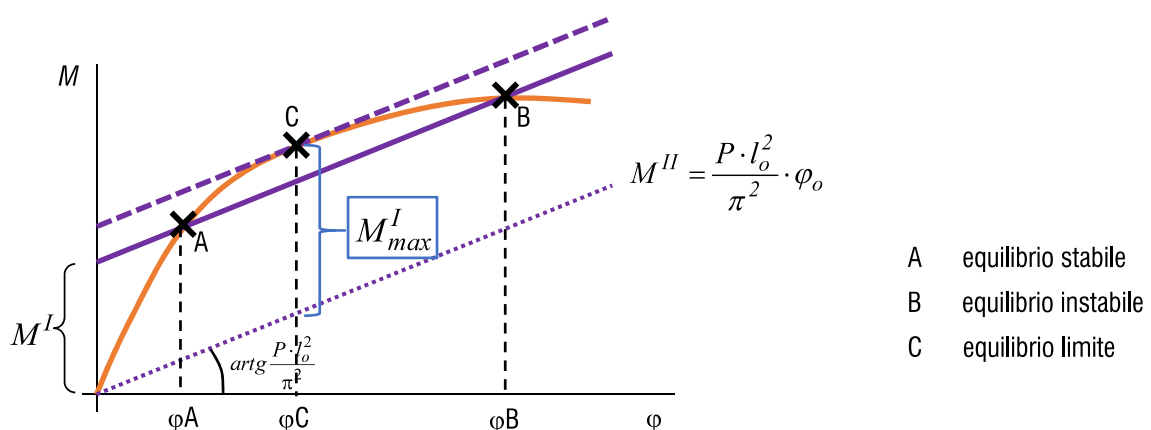
Diagramma $M-\varphi$ del MOMENTO INTERNO

Relazione non lineare, articolata in 3 fasi:

- Fase lineare (calcestruzzo e acciaio lavorano in regime elastico)
- Fase non lineare crescente (il calcestruzzo in trazione è fessurato, ciò comporta una degrado di rigidezza)
- Fase pseudo-plastica (snervamento dell'acciaio e crisi del cls in compressione, aumento della curvatura senza grande aumento del momento).

Il punto di picco della curva indica il momento resistente ultimo. Segue degrado di resistenza

Per la VERIFICA della SEZIONE CRITICA (ovvero la sezione al piede), si riportano le curve del **momento interno** M_i e del **momento esterno** M_e su uno stesso diagramma $M-\varphi$ (valutate per una fissata azione assiale $N=P$)



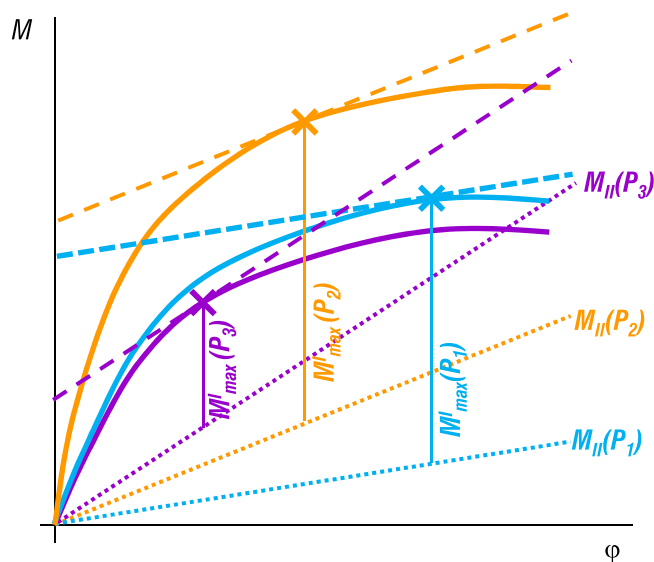
Il metodo consente di determinare il **massimo momento del primo ordine**

$$M^I_{max} = \max(M_i - M^{II})$$

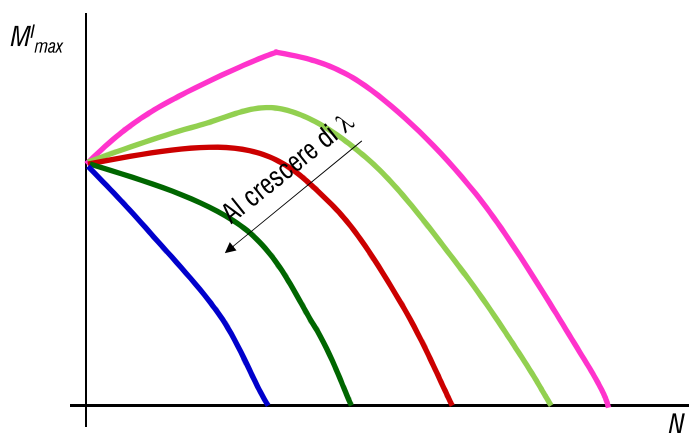
DOMINI DI INTERAZIONE

Consideriamo ora diversi valori di P (ossia di N) e tracciamo i rispettivi diagramma di M_e e M_i e calcoliamo i relativi momenti massimi di primo ordine M_{max}^I .

In un diagramma $M-\phi$, avremo curve di M_e e M_i differenti per valori differenti di N , quindi anche differenti valori di M_{max}^I :



Possiamo anche rappresentare come varia M_{max}^I al variare di N , per un determinato valore di λ .

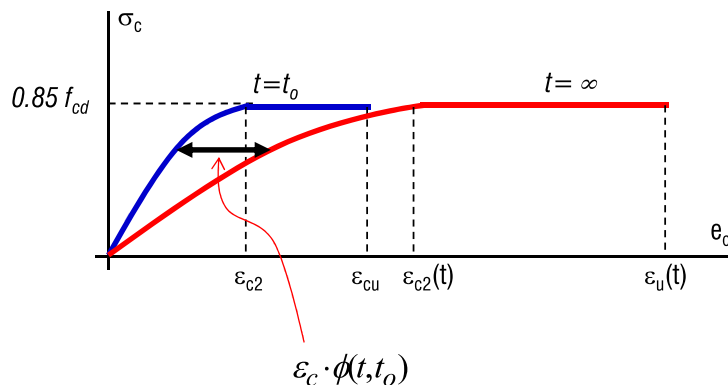


Influenza della viscosità

La viscosità è un fenomeno che determina un incremento delle deformazioni nel calcestruzzo rispetto al valore istantaneo (iniziale), per effetto dei carichi agenti per una lunga durata (v. lez. Caratteristiche materiali).

La viscosità causa quindi un incremento delle deformazioni flessionali, aumentando perciò gli effetti di 2° ordine.

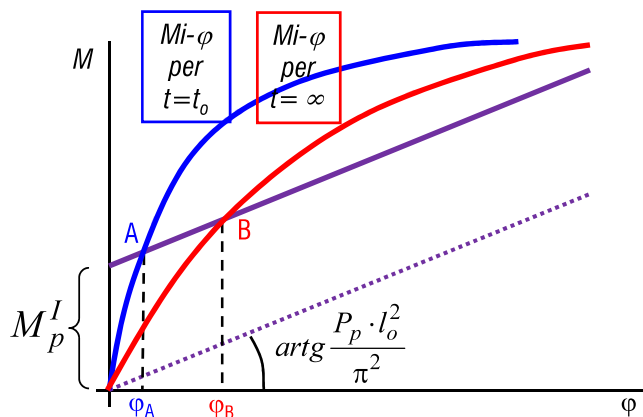
Un metodo approssimato per valutare questi effetti si basa sull'ipotesi di considerare per il calcestruzzo una legge costitutiva variata proporzionalmente al coefficiente di viscosità («stiriamo» orizzontalmente diagramma costitutivo)



$$\varepsilon_{c2}(t) = \varepsilon_{c2} \cdot [1 + \phi(t, t_0)]$$

$$\varepsilon_{cu}(t) = \varepsilon_{cu} \cdot [1 + \phi(t, t_0)]$$

La viscosità incide quindi sul diagramma M_i del momento interno



P_p quota di carico permanente

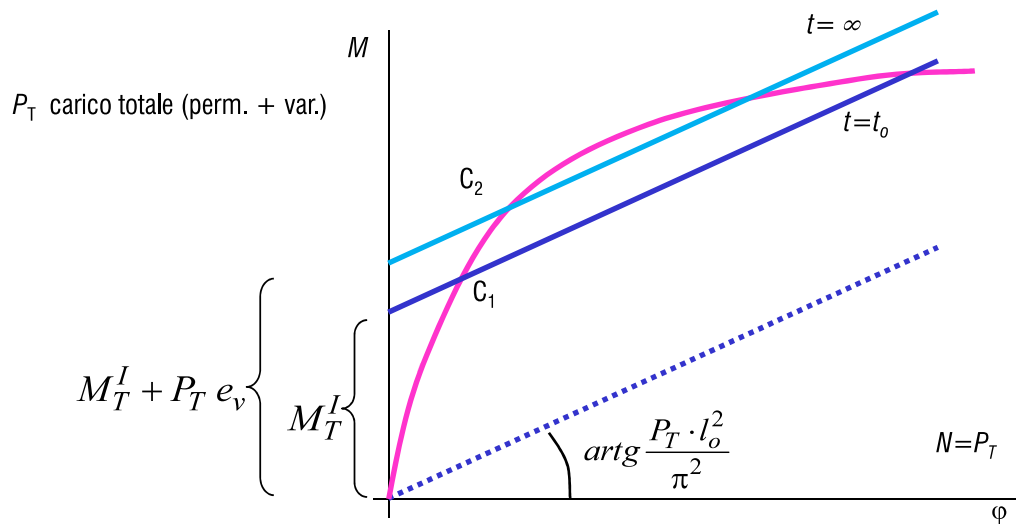
$$N = P_p$$

Posso considerare gli effetti della viscosità come quelli di un'eccentricità aggiuntiva e_v

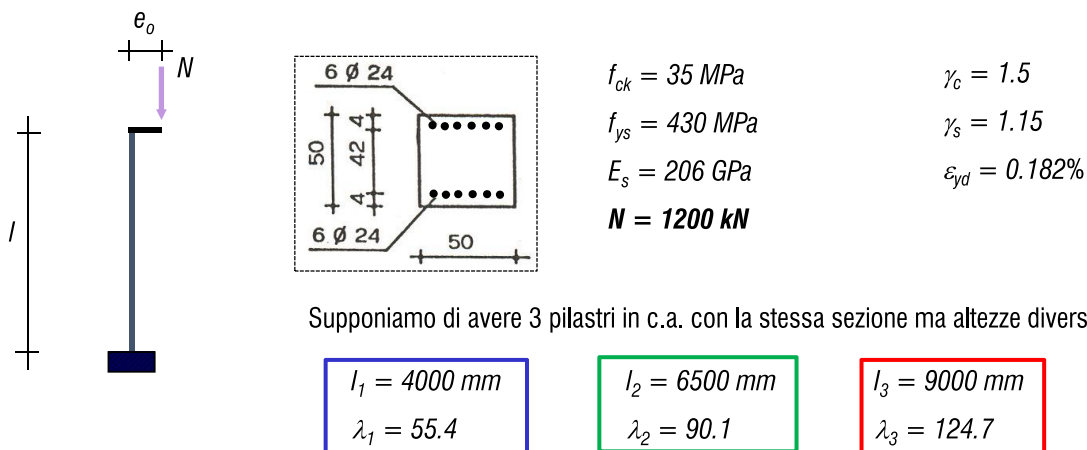
$$e_v = \frac{l_o^2}{\pi^2} \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$$

Più semplicemente, è possibile definire e_v sulla base di un'analisi viscoelastica lineare (Model Code 1990)

$$e_v = \frac{M_p^I}{N_p} \cdot \left[\exp \left(\frac{N_p}{N_E - N_p} \cdot \phi(t, t_0) \right) - 1 \right]$$



Esempio di applicazione del metodo colonna modello

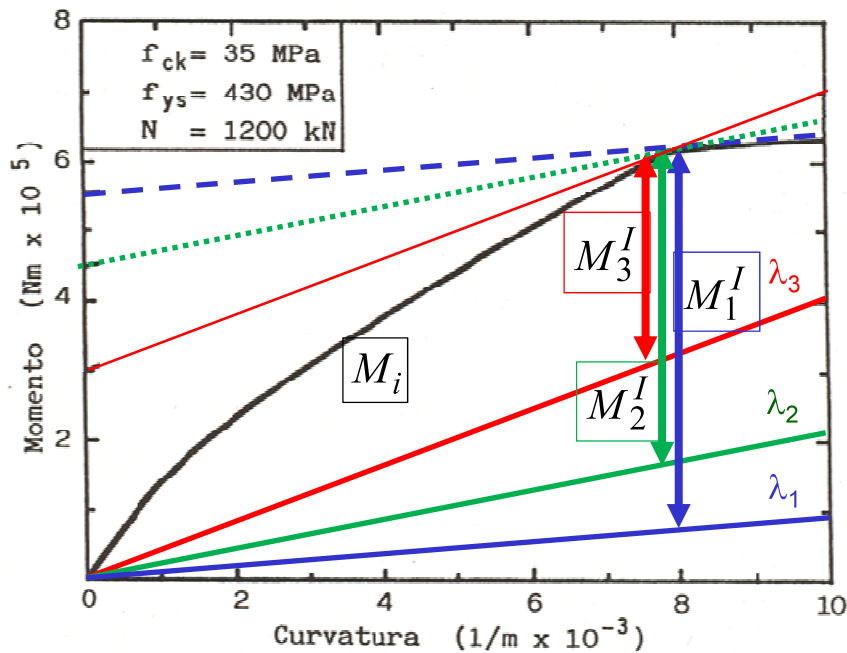


$$\lambda = \beta l / i, \text{ con } \beta = 2 \text{ (mensola) e } i = \sqrt{J/A} = 144.34 \quad (J = bh^3/12 \text{ e } A=bh)$$

Fissato un valore di N , ricaviamo il diagramma dei momenti interni $M_i - \phi$ (che sarà uguale per i 3 pilastri)

e determiniamo il momento max. di 1° ordine per i tre casi $M_{max}^I = \max(M_i - M^II)$





$$M_1^I = 552 \text{ kNm}$$

$$M_2^I = 450 \text{ kNm}$$

$$M_3^I = 300 \text{ kNm}$$

$$M^II = \frac{P \cdot l_o^2}{\pi^2} \cdot \varphi_o$$

$$e_0 = 460 \text{ cm}$$

$$e_0 = 37.5 \text{ cm}$$

$$e_0 = 250 \text{ cm}$$

Calcoliamo l'eccentricità per i 3 casi ($M^I = P \cdot e_0$)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



27

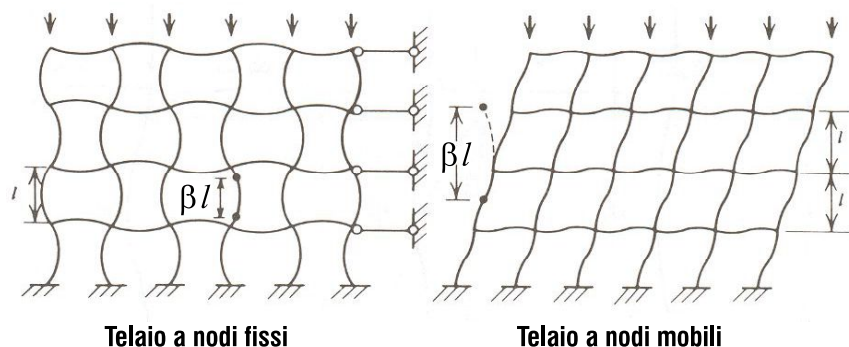
EFFETTI DEL SECONDO ORDINE SU TELAI

Per le strutture composte da più aste (telai) si possono avere due tipi di effetti del II ordine:

- se esiste uno spostamento relativo Δ tra i due estremi della colonna, il carico verticale N provoca incrementi di momento per effetto dello spostamento laterale: **effetti del II ordine "globali"**;
- inoltre il carico assiale N induce rispetto alla deformata della linea d'asse momenti aggiuntivi: **effetti del II ordine "locali"**.

Il primo effetto è caratteristico delle **strutture a nodi mobili**, in quanto si verifica quando gli spostamenti laterali sono importanti; ad esso si sovrappone l'effetto locale. Per i **telai a nodi fissi** invece è presente solo l'effetto di instabilità locale.

I metodi risolutivi visti in precedenza possono essere utilizzati anche per verificare i piedritti di strutture intelaiate, facendo riferimento ad una lunghezza equivalente di libera inflessione $l_o = \beta l$

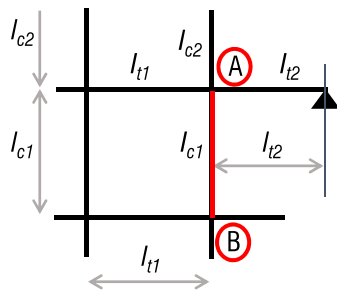


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



28

La lunghezza di libera inflessione l_o può essere ricavata mediante metodo grafico, utilizzando i **nomogrammi** proposti da Jackson e Moreland a partire dai valori k_A e k_B che rappresentano il grado di vincolo all'estremità della colonna:



$$l_o = \beta \cdot l$$

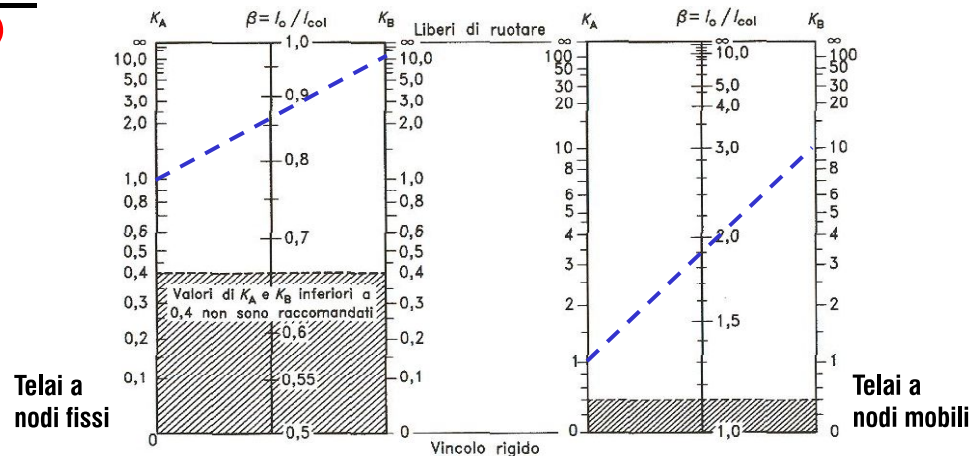
$$k_A (o k_B) = \frac{\sum EI_c / l_c}{\sum \alpha EI_t / l_t}$$

E modulo elastico cls

I_c, I_t momenti d'inerzia di colonne e travi che concorrono nel nodo in esame

l_c, l_t lunghezza di colonne e travi

α Coefficiente che dipende dal vincolo all'altra estremità della trave in considerazione ($\alpha=1.0$ per vincolo elastico o rigido, $\alpha=0.5$ per estremo libero di ruotare, $\alpha=0$ per mensola)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



29

La lunghezza di libera inflessione l_o può essere ricavata anche utilizzando le formule seguenti, una volta calcolati k_A e k_B :

Telai a nodi fissi
$$\beta = \min \begin{cases} 0.7 + 0.05 \cdot (k_A + k_B) \\ 0.85 + 0.05 \cdot k_{\min} \end{cases} \quad (\leq 1.0)$$

Telai a nodi mobili
$$\beta = \frac{40 - k_A - k_B}{40} \cdot \sqrt{\frac{2 + k_A + k_B}{2}} \quad \text{per } \frac{k_A + k_B}{2} < 2$$

$$\beta = 0.9 \cdot \sqrt{\frac{2 + k_A + k_B}{2}} \quad \text{per } \frac{k_A + k_B}{2} \geq 2$$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

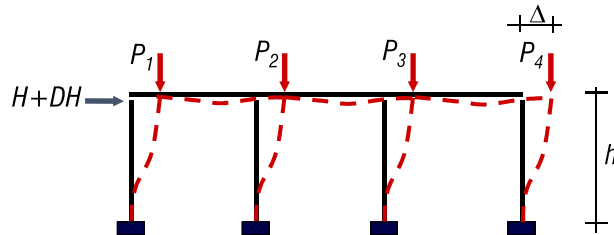


30

METODO P-Δ per TELAI A NODI SPOSTABILI

Il metodo P-Δ è applicabile a telai a maglie rettangolari e rappresenta un procedimento iterativo che sostituisce al momento del II ordine prodotto sulle colonne dai carichi verticali P_i (dovuto agli spostamenti nodali Δ), quello prodotto dalla una forza orizzontale fittizia equivalente di piano DH (che si somma a quella orizzontale H eventualmente presente):

Caso telaio ad 1 piano



- si parte calcolando Δ come spostamento ottenuto da un'analisi lineare del 1° ordine
- si calcola poi DH come

$$DH = \frac{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \cdot \Delta}{h}$$

- si ripete poi di nuovo con l'aggiunta della forza $H+DH$ e si ricava un nuovo valore dello spostamento Δ ed una nuova DH;
- si procede così fino a convergenza.



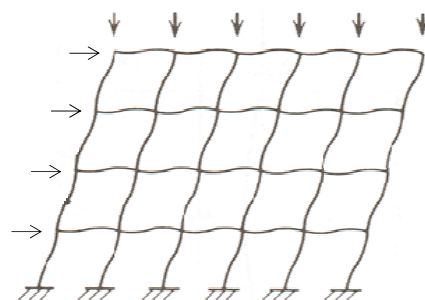
Caso telaio a più piani

- si calcola lo spostamento d'interpiano relativo al piano i-esimo ($\Delta_i - \Delta_{i-1}$) attraverso un'analisi lineare del 1° ordine;
- si calcola poi la forza orizzontale di piano fittizia ΔH_i

$$\Delta H_i = \frac{\sum_{j=1}^n N_{i-1,j} \cdot (\Delta_i - \Delta_{i-1})}{h_i} - \frac{\sum_{j=1}^n N_{i,j} \cdot (\Delta_{i+1} - \Delta_i)}{h_{i+1}}$$

con $N_{i,j}$ sforzo assiale sul pilastro j al piano i;

- si ricalcolano di nuovo gli spostamenti relativi di interpiano con l'aggiunta delle forze ΔH_i e si ricava un nuovo valore degli spostamenti Δ_i ed una nuova ΔH_i ;
- si procede così fino a convergenza.



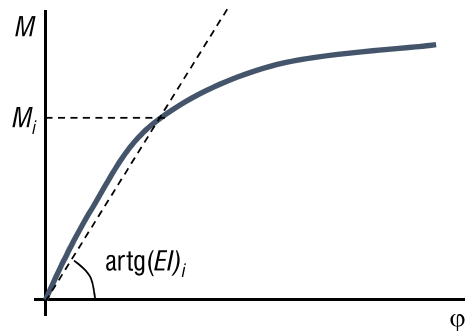
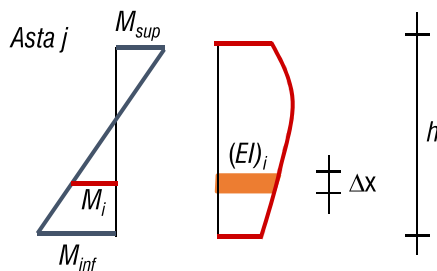
Effetto della non linearità meccanica

Si noti che, al crescere del livello di sollecitazione la rigidezza secante EI varia a causa della non linearità meccanica dei materiali.

Pertanto, per un'analisi più accurata che tenga conto di questo, ad ogni passo del processo iterativo, una volta definite le sollecitazioni sugli elementi, si determinano i valori delle rigidezze secanti dedotte dai legami momento-curvatura $M-\varphi$.

Essendo peraltro le rigidezze elementari EI variabili lungo l'asta a causa del valore variabile della sollecitazione, si può far riferimento per ciascuna asta ad una rigidezza elementare media equivalente $(EI)_{eq}$ pari a:

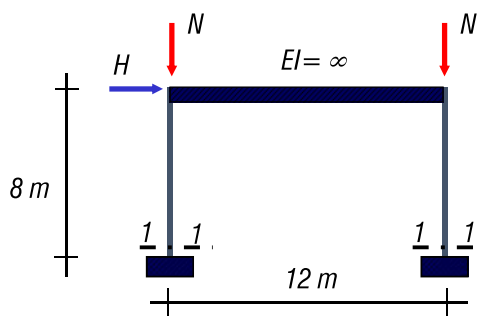
$$(EI)_{eq,j} = \frac{h}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{\Delta x}{(EI)_i} \right)}$$



o in via ancora più semplificata, assumendo per le travi un'inerzia ridotta $(EI)_{eq} = 0.5EI_v$.



Esempio: portale a nodi spostabili



N (kN)	900
H (kN)	39.24
fys (MPa)	430
fck (MPa)	35
gamma_s	1.15
gamma_c	1.5
f_yd (MPa)	374
0.85 fcd	19.8
E_s (MPa)	206000
E_cm (MPa)	33500

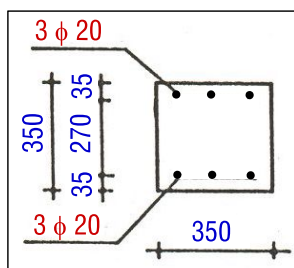
Parametri caratteristici

I_c (mm⁴) 1250520833

$E_{cm} I_c$ (Nmm²) 4.18924E+13

$E_{cm} I_c / 2$ (Nmm²) 2.09462E+13

SEZ. 1-1



$$\Delta = (H h^3 / 12EI) / (\eta_c)$$

$$H = (N + N) \Delta / h$$

Numero di colonne

Per tenere conto della non-linearità meccanica, teniamo conto, in prima battuta, di una rigidezza dimezzata

$$\Delta(\text{passo1}) = (39.24 \cdot 10^3 \cdot 8000^3 / 12 \cdot 2.09462E+13) / 2 = 39.97 \text{ mm}$$

$$H(\text{passo1}) = 2 \cdot 900 \cdot 10^3 \cdot 39.97 / 8000 = 8993 \text{ N}$$



Passo 1		Passo 4	
Delta (mm)	39.97	Delta (mm)	51.70
DH (kN)	8.99	DH (kN)	11.63
Passo 2		Passo 5	
Delta (mm)	49.12	Delta (mm)	51.81
DH (kN)	11.05	DH (kN)	11.66
Passo 3		Passo 6	
Delta (mm)	51.22	Delta (mm)	51.84
DH (kN)	11.53	DH (kN)	11.66

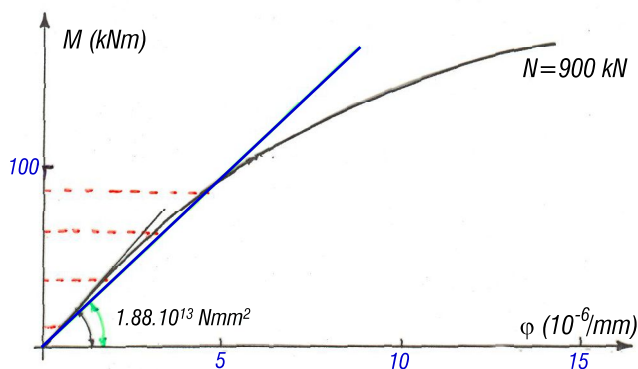
Stabilizzato H, si calcola il relativo momento (equilibrio alla rotazione)

$$M = H h / 2 / n_c = (39.24 + 11.66) \cdot 8 / 2 / 2 = 101.8 \text{ kNm}$$

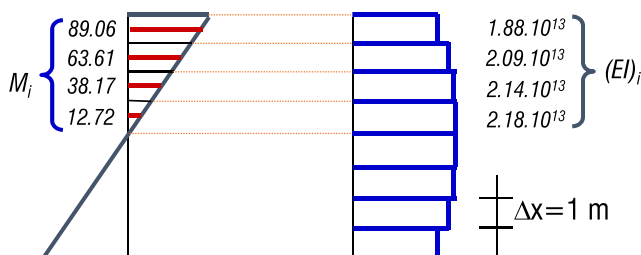
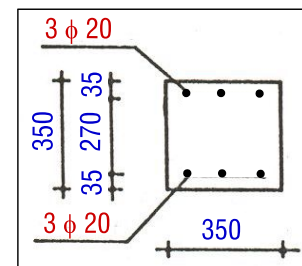
Mmax (kNm) 101.8



Si verifica la "bontà" della rigidezza equivalente adottata:



SEZ. 1-1



$$(EI)_{eq} = \frac{h}{\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\Delta x}{(EI)_i} \right)} = 2.07 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$(EI)_{eq} = 2.07 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2 \approx 2.09 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Verifica O.K.



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.