

## Riassunto:

Data transf. coord.  $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$  e

sue inverse  $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$ ,

qta è CANONICA se  $\forall H(x, t)$ ,  $\exists K(\tilde{x}, t)$  t.c.

se  $x(t)$  soddisfa  $\dot{x} = E \nabla_x H$ , allora

$\tilde{x}(t) = \tilde{w}(x(t), t)$  soddisfa  $\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K$

Qto avviene quando  $\exists K$  t.c.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

$$\text{dove } \tilde{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}$$

Qto  $K(\tilde{x}, t)$  prende la forma

$$K = c \tilde{H} + K_0$$

con  $c$  cost.,  $\tilde{H} = H \circ w$ ,  $K_0$  Ham. coniugata a  $H=0$ .

Come si fa a capire se una transf. è  
canonica (senza applicare la def.)?



CRITERI di CANONICITA'

Possiamo ora dimostrare il primo CRITERIO di CANONICITA' :

Prop. La trasf. di coordinate  $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$

$$\tilde{\text{è CANONICA}} \iff \exists c \neq 0 \text{ t.c. } J E J^T = c E$$

con  $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

Dim. m.  $\Rightarrow$  : se è canonica, possiamo seguire dim. di prop. (\*) (lezione precedente)  
e concludere che  $\exists c \neq 0$  t.c.

$$- \tilde{J} E \tilde{J}^T E = c \mathbb{1}_{2m}, \text{ ovvero } \tilde{J} E \tilde{J}^T = c E;$$

molteplichiamo a sinistra per  $\tilde{J}$  e a destra per  $\tilde{J}^T$  e usiamo  $\tilde{J} \tilde{J}^T = \mathbb{1} \Rightarrow J E J^T = c' E$ , con  $c' = 1/c$ . //

$\Leftarrow$  : (più interessante perché ci dà un criterio di canonicità)

Dobbiamo dim che se  $\exists c$  t.c.  $J E J^T = c E$  allora  $\forall H$   
 $\exists K$  t.c.  $E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$  (\*) ↗ equiv. a  $\tilde{J} E \tilde{J}^T = c E$

Come abbiamo già visto:  $\nabla_x H = \tilde{J}^T \tilde{J}^{-T} \nabla_{\tilde{x}} H = \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}$

dove abbiamo usato  $(\nabla_{\tilde{x}} \tilde{H})_i = \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}$ .

$$\Rightarrow \tilde{J} E \nabla_x H = \tilde{J} E \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = E \nabla_{\tilde{x}} (c \tilde{H})$$

Se  $\exists K_0$  t.c.  $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ , allora  $\exists K$  che soddisfa (\*)  
e cioè  $K = c \tilde{H} + K_0$ .

Qto è vero grazie a lemmi 2 e 3 (vedi fine precedente lezione):

$$\exists k_0 \text{ s.t. } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} k_0 \iff \Lambda \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} (w(\tilde{x}, t), t) \right) \text{ è f.c.} \\ \text{Lemma 3} \quad \Lambda^T E + E \Lambda = 0$$

$$\Lambda_{ij} = \sum_{l=1}^{2m} \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial t \partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \right)_{ij} \text{ che soddisfa} \uparrow \\ \text{per Lemma 2.} //$$

Dato una trasf. canonica che soddisfa

$$J^T E J = E \quad (A) \quad J = \frac{\partial w'}{\partial \tilde{x}}$$

riusciamo sempre a trovare una trasf. canonica

$$\text{che soddisfa } J E J^T = E \quad (B) \quad J = \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}$$

Infatti, la composizione di trasf. canoniche è  
una trasform. canonica.

- $c$  è in genere una funt.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto c(t)$  ;  
essa è sempre  $\neq 0$  (perché  $c'' = |\det J| \neq 0 \quad \forall t$  per  
trasf. ben definite).

$\Rightarrow c(t)$  è def. positiva o def. negativa.

- Possiamo prod. comporre la trasf. canonica (A) con  
 $p'' = \alpha p' \quad q'' = \beta q' \quad \alpha = \beta = \sqrt{|c|} \quad \tilde{x} = \sqrt{|c|} \tilde{x}'$

$$\Rightarrow \bar{w}''(\tilde{x}, t) = \sqrt{|c|} \bar{w}'(\tilde{x}', t)$$

$$J''_{ij} = \frac{\partial w''_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{|c|} \frac{\partial w'_i}{\partial \tilde{x}'_j} = \sqrt{|c|} J'_{ij}$$

$$\Rightarrow J'' E J'^T = |c| J' E J'^T = (\text{sgn } c) J' E J'^T = (\text{sgn } c) E$$

- Se  $c > 0$  la composizione  $w''(\tilde{x}, t)$  soddisfa  
 $J'' E J''^T = E$  (cioè la sua  $c=1$ )

- Se  $c < 0$ , allora  
 $J'' E J''^T = -E$

possiamo comporre  $\bar{w}''$  con la trasf. canonica

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \bar{x}'' \quad \leadsto \quad w_i(\tilde{x}, t) = \sum_k \underset{\substack{\mathbb{I} \\ I}}{I_{ik}} w_k''(\tilde{x}, t)$$

$$\rightarrow J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_k I_{ik} \frac{\partial w_k''}{\partial \tilde{x}_j} = (I J'')_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J E J^T = I J'' E J''^T I = -I E I \stackrel{\uparrow}{=} E$$

↳ Possiamo sempre e comporre una data generica trasf. canonica con particolari trasf. canoniche in modo che la composizione sia una trasf. can. con  $c=1$ .

→ Possiamo quindi restringerci al caso  $c=1$  e ottenere tutte le trasf. canoniche (con  $c$  generica) attraverso la composizione data.

Se  $c=1$ , la trasformazione è detta **TRASF. CANONICA UNIVALENTE**.

Le trasf. di coord. t.c. lo Jacobiano  $J$  soddisfa  $J E J^T = E$

sono dette **TRASFORMAZIONI SIMPLETTICHE**, le

matrici  $A$  t.c.  $A E A^T = E$  sono dette **MATRICI SIMPLETTICHE**  
 $A \in \text{Sp}(2n)$

[Le matrici ORTOGONALI sono l.c.  $O O^T = \mathbb{1}$ , cioè  $O \mathbb{1} O^T = \mathbb{1}$ .  $O \in \text{SO}(n)$ ]

## ESEMPIO.

Riprendiamo la trasformazione 3) tra gli esempi dati in precedenza e applichiamo a sistemi a  $n=1$  grado di lib.

$$\begin{cases} p = \tilde{p} \\ q = \tilde{q} + \alpha t \tilde{p} \end{cases} \xrightarrow[\text{completo}]{\text{in formalism}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + \alpha t \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \underset{w(\tilde{x})}{\equiv}$$

$$K(\hat{p}, \hat{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2 \rightarrow K_0 = -\frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

1) Verifichiamo che è canonica:  $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{J} = J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J \in J^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \text{transf.} \\ &\Rightarrow \text{e' canonica} \\ &\Rightarrow C=1 \end{aligned}$$

2) Troviamo  $K_0$ .  $K_0$  è t.c.  $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ , cioè

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t) = -E \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t)$$

Sappiamo che  $\tilde{w}_i(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x}_i$ ; applichiamo  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$

$$\rightarrow \sum_j \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\tilde{J} \frac{\partial w}{\partial t}$$

Qui abbiamo  $\frac{\partial W}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix}$

Quindi  $K_0$  è soluz. di eq.

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0 = -E \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè  $\begin{cases} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_1} = -\alpha \tilde{x}_1 & \rightarrow K_0 = -\alpha \frac{\tilde{x}_1^2}{2} \\ \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_2} = 0 & \rightarrow K_0 \text{ è funz. solo di } \tilde{x}_1 \end{cases}$

Quindi, la transf. è canonica con  $c=1$  e  $K_0 = -\alpha \frac{\tilde{x}_1^2}{2}$

$$\Rightarrow K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = c H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

cioè quanto riportato nell' ES 3) .

# TRASF. CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

Ricordiamo:

$$\{f, g\} = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{\partial g}{\partial p_l} - \frac{\partial f}{\partial p_l} \frac{\partial g}{\partial q_l} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

P.d. P. fondamentali:  $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

Def. Una trasf. di coord.  $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$  PRESERVA LE PAR. DI POISSON se  $\forall f(\bar{x}, t), g(\bar{x}, t)$  e indicando  $F(\tilde{x}, t) = f(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$  e  $G(\tilde{x}, t) = g(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$ , si ha

$$\{f, g\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t) = \{F, G\}(\tilde{x}, t)$$

Prop. Tutte le parentesi di Poisson sono preservate SE E SOLO SE sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali, cioè se

$$\{w_i, w_j\} = E_{ij}$$

$$\text{ovvero } \{u_n, u_k\} = 0$$

$$\{v_n, v_k\} = 0$$

$$\{u_n, v_k\} = -\delta_{nk}$$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } \{F, G\} &= \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} \left( \sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} \right) E_{ij} \left( \sum_e \frac{\partial g}{\partial x_e} \frac{\partial w_e}{\partial \tilde{x}_j} \right) \\ &= \sum_{m,e} \frac{\partial f}{\partial x_m} \underbrace{\left( \sum_{i,j} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_e}{\partial \tilde{x}_j} \right)}_{\{w_m, w_e\}} \frac{\partial g}{\partial x_e} \end{aligned}$$

Se le parentesi di Poisson fonda. sono preservate allora  $\{w_m, w_e\} = E_{me}$   
 e allora  $\{F, G\} = \sum_{m,e} \frac{\partial F}{\partial x_m} E_{me} \frac{\partial G}{\partial x_e} = \{f, g\}$ .

L'altro verso dell'implicazione (se p.p. son pres.  $\Rightarrow$  p.p. fonda. son pres.)  
 è ovvio. //

Prop. La trasf. di coord.  $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$  preserva le pr. di Poisson

se e solo se  $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$  è una

MATRICE SIMPLETTICA, cioè  $J \in J^T = E$   
 $(2n \times 2n)$

Dim.  $\{w_k, w_e\} = \sum_{i,j} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_e}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} J_{ej} =$

$$= \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} (J^T)_{je} = (J E J^T)_{ke}$$

sono preservate se e solo se  $= E_{ke}$ , cioè se e  
 solo se  $(J E J^T)_{ke} = E_{ke}$ . //



Prop. La trasf. di coord.  $x = \bar{w}(\tilde{x}, t)$  è una TRASF. CANONICA  
 UNIVALENTE se e solo se preserva le parentesi di Poisson.

In gen.  $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$  è CANONICA se e solo se  
 $\{w_i, w_j\} = \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = E_{ij} \quad \forall i, j$ .

FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) = \epsilon \bar{\nabla}_{\bar{x}} H$$

↓  
soluzione  $\bar{x} = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$  : qto definisce una famiglia (el variaz d.t.)  
di mappe nello spazo delle fasi, detto **FLUSSO HAMILTONIANO**

$$\Phi^t : T^*Q \rightarrow T^*Q$$

$$\bar{x}_0 \mapsto \Phi^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$

Tale mappa è una funzione da  $\mathbb{R}^{2n}$  a  $\mathbb{R}^{2n}$  invertibile  
(e quindi può essere usata per definire una trasf. di coordinate.  
↓

Prop. Consideriamo un sistema hamiltoniano con hamiltoniana  $H$   
e prendiamo la trasf. di coord.  $\bar{w}(\tilde{x}, t) \equiv \Phi^t(\tilde{x})$

Tale trasf. di coord. è CANONICA (\*)  $\forall t$ .

Nota:  $\frac{\partial \bar{w}(\tilde{x}, t)}{\partial t}$  derivata rispetto a  $t$  a  $\tilde{x}$  cost.  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \bar{x}(t; \tilde{x}) = \dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{\nabla}_{\bar{x}} H(\bullet)$   
↑ dato iniz.

Dim. Dimosteremo che  $J$  è una matrice symplettica, dove

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial \Phi_i^t}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}).$$

In particolare dimosteremo che  $J^T E J = E$ , (\*) che equivale a  $J E J^T = E$ .

$$J^T E J = E \Rightarrow J^T = -E J^{-1} E \Rightarrow J E J^T = -J E E J^{-1} E = E.$$

Per prime cose notiamo che  $J^T E J = E$  per  $t=0$ ; infatti

$$\Phi_i^0(\tilde{x}) = x_i(0; \tilde{x}) = \tilde{x}_i \Rightarrow J_{ij}|_{t=0} = \delta_{ij} \Rightarrow J E J^T|_{t=0} = \mathbb{1} E \mathbb{1} = E.$$

Ora dimosteremo che  $J^T E J$  non dip. da  $t$ , il che  
implica che se (\*) vale per  $t=0$  allora vale  $\forall t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J^T E J)_{ih} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j,k} J_{ji} E_{jk} J_{kh} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j,k} \frac{\partial \Phi_j^t}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial \Phi_k^t}{\partial \tilde{x}_h} \right) =$$

$$= \sum_{j,k} \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left( \frac{\partial \Phi_j^t}{\partial t} \right)}_{\substack{(\bullet) \parallel \sum_l E_{jl} \frac{\partial H}{\partial x_l} \\ \leftarrow x_j(t, \tilde{x}) \text{ soddisfa} \\ \text{le eq. di Hamilton} \\ \text{con Hamiltoniana } H}} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h} \left( \frac{\partial \Phi_k^t}{\partial t} \right)}_{\substack{\parallel (\bullet) \\ \sum_m E_{km} \frac{\partial H}{\partial x_m}}} \right] =$$

$$= \sum_{j,k,l} E_{jl} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left( \frac{\partial H(w(\tilde{x}, t), t)}{\partial x_l} \right) E_{jk} \frac{\partial \Phi_k^t}{\partial \tilde{x}_h} + \sum_{j,k,l,m} \frac{\partial \Phi_j^t}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h} \left( \frac{\partial H}{\partial x_m} \right) =$$

$$= \sum_{j,k,l,a} E_{jl} \frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_l} \frac{\partial w_a}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_h} + \sum_{j,k,l,m,b} \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km} \frac{\partial^2 H}{\partial x_b \partial x_m} \frac{\partial w_b}{\partial \tilde{x}_h}$$

$\parallel$   $\parallel$   $\parallel$   $\parallel$   
 $-E_{lj}$   $J_{ia}^T$   $J_{kh}$   $J_{ij}^T$   $J_{bh}$

$$= - \sum_{j,k,l,a} J_{ia}^T (\partial^2 H)_{al} E_{lj} E_{jk} J_{kh} + \sum_{j,k,l,m,b} J_{ij}^T E_{jk} E_{km} (\partial^2 H)_{mb} J_{bh}$$

$$= - (J^T \partial^2 H E^2 J)_{ih} + (J^T E^2 \partial^2 H J)_{ih} \quad E^2 = -\mathbb{1}$$

$$= (J^T \partial^2 H J)_{ih} - (J^T \partial^2 H J)_{ih} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (J^T E J) = 0 \Rightarrow J^T E J \text{ non dp. da } t$$

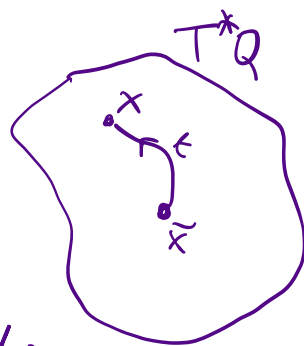
$$\text{Siccome } J^T E J|_{t=0} = E \Rightarrow J^T E J = E \quad \forall t. //$$

⊗ In che senso una mappa che prende un pto in  $T^*Q$  e lo manda in un altro pto di  $T^*Q$  è una TRASFORMAZIONE DI COORDINATE?

Fissiamo  $t$ , e consideriamo

$$x = \Phi_t(\tilde{x})$$

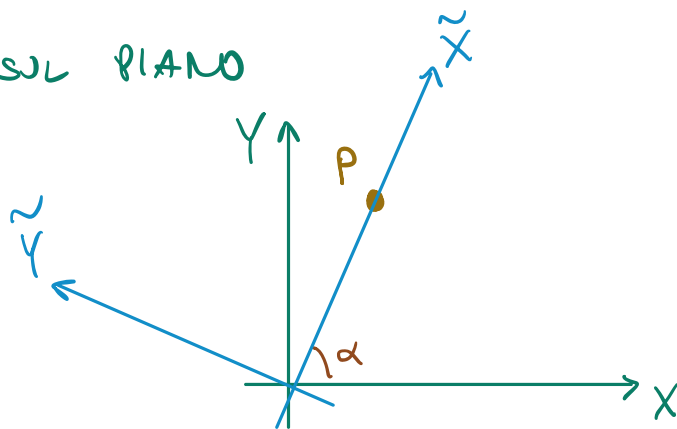
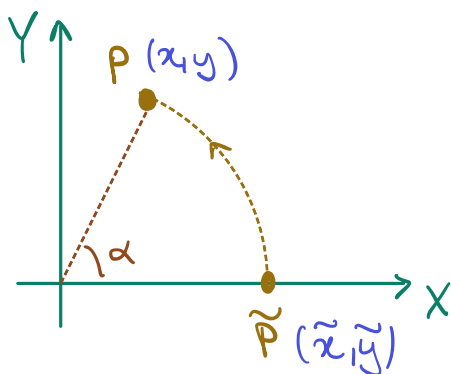
$x$  è l'evoluto al tempo  $t$  di  $\tilde{x}$



Posso allora interpretare  $x, \tilde{x}$  in due modi:

- 1)  $x$  e  $\tilde{x}$  sono coord. di due pti distinti  $P, \tilde{P}$  nello stesso sist. di coord.;
- 2)  $x$  e  $\tilde{x}$  sono coord. diverse (in diversi sist. di coord.) per lo stesso pto  $P \in T^*Q$  [nel secondo sist. di coord. per ottenere le coord. di  $P$ , devo prendere  $P \in T^*Q$ , evolverlo indietro di tempo  $t$  e leggere le coord. di tale evoluto nel vecchio sist. di coord.].

Esempio con le ROTAZIONI SUL PIANO



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$(x, y)$  e  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  possono essere lette in due modi:

1) come le coord. nel sist.  $(X, Y)$  di due pti  $P, \tilde{P}$  distinti

2) come le coord. dello stesso pto  $P$  in due sist. di rif.

$(X, Y)$  e  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  distinti. Le nuove coord.  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  possono essere ottenute ruotando il sist. di rif., oppure ruotando INDIETRO il pto e vedendo che coord. aveva nel sist.  $(X, Y)$ .

Per ES.: se prendo  $P$  con coord.  $(x, y) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ , per ottenere le nuove coord.  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (R, 0)$  posso prendere il pto  $(x, y) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  e applicargli la rotaz.  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ; qto pto va in  $(x, y) = (R, 0)$ ;

qte sono le nuove coord.  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  di  $P$ !

Qtl'ottica ci permette di pensare alle TRASFORMAZIONI CANONICHE:

1) in un senso "PASSIVO" con  $\tilde{x}_i$  e  $x_j$  che individuano lo STESSO PTO in  $T^*Q$ , ma utilizzando diversi sistemi di coordinate

2) in un senso "ATTIVO" con  $\tilde{x}_i$  e  $x_j$  che individuano due pti diversi di  $T^*Q$  nello stesso sist. di coord.

Qto pto di vista è particolarmente utile in famiglie a un parametro di trasf. canoniche (come il flusso Ham. o, come vedremo, le rotazioni).

## Osservazione

Flusso Hamiltoniano è una trasf. canonica

$$x = w(\tilde{x}, t) \quad \text{con} \quad w(\tilde{x}, t) = \Phi^t(\tilde{x}) = x(t; \tilde{x})$$

soluz.  $\uparrow$  con dato iniziale  $\tilde{x}$ , di eq. del moto

$$\dot{x}(t; \tilde{x}) = \frac{\partial \Phi^t(\tilde{x})}{\partial t} = E \nabla_x H \quad \uparrow H \text{ definisce il flusso Hamilt.}$$

Qual è l'Hamiltoniana  $K$  coniugata all'Hamilt.  $H$ ?

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\tilde{J} \frac{\partial w}{\partial t} \\ = \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J} \frac{\partial w}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\leftarrow \text{da } \tilde{w}_i(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x}_i$$

$$\hookrightarrow \sum_j \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}}_{\tilde{J}_{ij}} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^t}{\partial t} = \dot{x}(t; \tilde{x}) = E \nabla_x H \end{array} \right.$$

$$= \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J} E \nabla_x H = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$

$$\Rightarrow K = 0 \quad (\text{a meno di una cost. irrilevante})$$

$\leadsto$  Il flusso Hamiltoniano generato da  $H$ , coniuga  $H$  stessa in  $K=0$

Infatti nelle coord.  $\tilde{x}$  il moto è costante ( $\tilde{x}$  è dato iniziale)

Posso generare TRASFORMAZIONI CANONICHE attraverso la scelta di una funzione  $\hat{H}(p, q)$  :

$$\hat{H}(p, q) \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = E \nabla_x \hat{H} \longrightarrow x = \Phi_{\hat{H}}^t(\tilde{x})$$

- Una volta che ho  $\Phi_{\hat{H}}^t$ , posso applicarlo a qualsivoglia sist. Ham. con Hamiltoniana  $H$  e ottenere la  $K$  coniugata (come detto sopra, se scelgo  $H = \hat{H}$ , allora  $K = 0$ ).

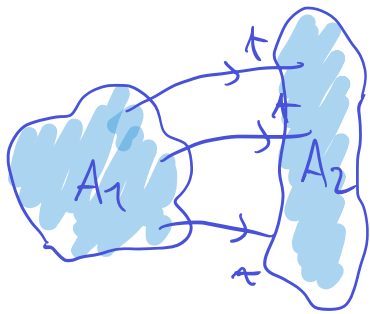
Se  $H \neq \hat{H}$ , ho che l'Ham. coniugata a  $H$  soddisfa

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J} E \nabla_x \hat{H} = \tilde{J} E \nabla_x (H - \hat{H})$$

- In generale, vedremo che se ho una famiglia a un parametro di trasformazioni canoniche, posso pensarla come il flusso Hamiltoniano di una qualche Hamiltoniana  $H$  che chiamerò il GENERATORE di queste trasformazioni.

## Corollario [TEOREMA DI LIOUVILLE]

Le trasformazioni canoniche univalenti ( $c=1$ ),  
e tra esse il FLUSSO HAMILTONIANO preservano  
il volume Euclideo  $dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n$



La regione  $A_1$  evolve nel tempo  $t$   
in una regione  $A_2$  dello sp. delle f.m.  $T^*Q$   
in modo t.c.  $\text{vol}(A_1) = \text{vol}(A_2)$ .

Dim.

$$\text{vol}(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n}_{dx_1 \dots dx_{2n}} =$$

$$= \int_{A_2} |\det J| d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_n d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_n$$

si come transf. è canonica,  $J^T E J = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(E) = \det(J^T E J) = \det J^T \cdot \det E \cdot \det J \\ = (\det J)^2 \det E \Rightarrow (\det J)^2 = 1$$

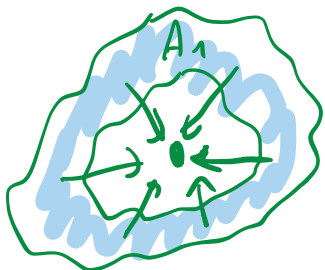
$$= \int_{A_2} d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_n d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_n = \text{vol}(A_2) \quad \text{p.p.}$$

Osservazione:

$$\dot{x} = E \nabla_x H$$

← un pto singolare in questo  
sistema non può essere

ASINTOTICAMENTE STABILE



Infatti se  $x_0$  ← fosse,  
avremmo cioè non si conserverebbe il volume.

## Osservazione:

Come visto precedentemente, data transf. di coordinate

$$x = w(\tilde{x}, t) \quad \text{e inverse} \quad \tilde{x} = \tilde{w}(x, t)$$

$$\text{se } \dot{x}_i = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x, H\}$$

$$\text{allora } \dot{\tilde{x}}_i = \sum_{ej} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_e} E_{ej} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = \left( \{ \tilde{w}_i, H \} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} \right) \circ \tilde{w}(\tilde{x}, t)$$

Quindi la conditione di CANONICITA' può essere riscritta nel seguente modo: transf. è canonica se  $\forall H$   
 $\exists K$  t.c.

qto non stupisce, perché  
 $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$  se  
 $f$  valutata su soluz.  
eq. di Hamilton

(c=1)

$$\{\tilde{x}_i, K\}(\tilde{x}, t) = \left\{ \tilde{w}_i, H \right\}(\tilde{w}(\tilde{x}, t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(\tilde{w}(\tilde{x}, t), t) \quad (*)$$

|| se si preservano  
 $\{\tilde{x}_i, \tilde{H}\}$  per. Poisson

"  $\{\tilde{x}_i, K_0\}$   
se  $\tilde{J}$  simpl.  
(ved. lezione 22)

Quindi si vede velocemente, che se le P.d.P. sono preservate ( $\Leftrightarrow J$  simpl.)

allora transf. è canonica, perché esiste  $K = \tilde{H} + K_0$

t.c. (\*) è soddisfatta.

Complemento: TRASFORMAZIONI PUNTUALI ESTESE SONO CANONICHE

Trasf. puntuali estese sono date da

$$q_h = v_h(\tilde{q}, t) \quad \leftarrow \text{trasf. inversa} \quad \tilde{q}_r = \tilde{v}_r(q, t)$$

$$p_k = \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e(v(\tilde{q}, t), t)}{\partial q_k}$$

$$v_h(\tilde{v}(q, t), t) = q_h$$

$$\tilde{v}_m(v(\tilde{q}, t), t) = \tilde{q}_m$$

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_s} \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial q_k} = \delta_{hk}$$

Prop. Le trasf. puntuali estese sono CANONICHE

Dim. Dimostriamo che preservano le parentesi di Poisson fondamentali.

$$\{q_h, q_k\} = \{v_h(\tilde{q}), v_k(\tilde{q})\} = 0$$

$$\{q_h, p_k\} = \left\{ v_h(\tilde{q}), \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k} \right\} = \sum_e \left\{ v_h(\tilde{q}), \tilde{p}_e \right\} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_e \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_e} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k} = \delta_{he}$$

$$\{p_h, p_k\} = \left\{ \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_h}, \sum_m \tilde{p}_m \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} \right\} =$$

$$= \sum_{e,m} \left[ \tilde{p}_e \left\{ \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_h}, \tilde{p}_m \right\} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} + \frac{\partial v_e}{\partial q_h} \left\{ \tilde{p}_e, \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} \right\} \tilde{p}_m \right]$$

$$= \sum_{e,m} \tilde{p}_e \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial \tilde{q}_m \partial q_h} \right) \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (h \leftrightarrow k) =$$

$$= \sum_{e,m,s} \tilde{p}_e \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_s \partial q_h} \underbrace{\frac{\partial v_s}{\partial \tilde{q}_m}}_{\delta_{sk}} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (h \leftrightarrow k)$$

$$= \sum_{e,s} \tilde{p}_e \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_s \partial q_h} \delta_{sk} - (h \leftrightarrow k) = \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_k \partial q_h} - (h \leftrightarrow k) = 0$$

sim. in  $(h \leftrightarrow k)$