Seconda provetta di Geometria 3A
10 gennaio 2020

Esercizio 1. Si consideri la superficie regolare $S = \phi(\mathbb{R}^2)$ dove $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\phi(u, v) = (u, v, u^2 v)$:

1. si calcolino i coefficienti della I e II forma fondamentale rispetto a ϕ;
2. si calcoli in ogni punto la curvatura gaussiana di S;
3. si classifichino i punti di S;
4. nei punti in cui $v = 0$ si calcolino le curvature principali;
5. verificare se esiste un aperto di S in cui la superficie è localmente isometrica al piano;
6. si dimostri che S è una superficie rigata non sviluppabile.

Esercizio 2. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), -\alpha_1(u))$ una curva parametrizzata lunghezza d'arco. Si definisca l'applicazione $\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\phi(u, v) = (\alpha_1(u) + v, \alpha_2(u), -\alpha_1(u) + v)$. Supponendo che $S = \phi(I \times \mathbb{R})$ sia una superficie regolare e ϕ una parametrizzazione locale di S:

1. si calcolino i coefficienti della I e II forma fondamentale rispetto a ϕ, verificando in particolare che F ed f sono costantemente nulli;
2. si sfrutti il fatto che $F \equiv 0$ ed $f \equiv 0$ per verificare che nei punti non ombelicali ϕ_u e ϕ_v individuano le direzioni principali;
3. si calcolino le curvature normali delle curve coordinate $u \to \phi(u, v_0)$ e $v \to \phi(u_0, v)$;
4. si calcolino le curvature principali in ogni punto.

Esercizio 3. Sia S una superficie regolare.

1. Si dimostri che se per un punto di S passano 3 rette contenute in S allora il punto è planare.