Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 10

Prof. Valentina Beorchia

19 maggio 2025

1. Si consideri la parametrizzazione del cilindro circolare retto S_1 data da
$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$
e si consideri un piano affine $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzato da
$$\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi_2(u, v) = (p_1 + uw_1 + vy_1, p_2 + uw_2 + vy_2, p_3 + uw_3 + vy_3),$$
con $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ un punto, e $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ due vettori ortonormali.

   Si verifichi che $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un'isometria.

2. Si consideri il cono a una falda senza vertice, di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; si verifichi che la mappa
$$\varphi_2 : (0, +\infty) \times (0, \sqrt{2}\,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi_2(\rho, \theta) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\,\theta), \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\,\theta), \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)$$
è una sua parametrizzazione locale, la cui immagine è il cono meno una retta (una generatrice).

   Si verifichi, inoltre, che la mappa
$$\varphi_1 : (0, +\infty) \times (0, \sqrt{2}\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi_1(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$$
è una parametrizzazione locale del piano coordinato $z = 0$ (rappresenta le coordinate polari del piano).

   Si confrontino, infine, i coefficienti delle prime forme fondamentali delle due parametrizzazioni, e se ne deduca che $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un'isometria.

3. Si verifichi che le due superfici parametrizzate

$$\varphi_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u),$$

$$\varphi_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

hanno curvature Gaussiane coincidenti in tutti i punti $\varphi_1(u,v)$ e $\varphi_2(u,v)$, ma che $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ non è un'isometria.

4. Si calcolino i coefficienti di Christoffel delle seguenti superfici (notazioni usate a lezione):

   (a) superfici rigate $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\, w(u)$;

   (b) sfera parametrizzata da $\varphi(x,y,z) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$;

   (c) sfera parametrizzata in coordinate polari $\varphi(u,v) = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)$;

   (d) elicoide $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$, con $a > 0$;

   (e) paraboloide ellittico $\varphi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$;

   (f) superfici di rotazione $\varphi(u,v) = (y(u)\cos v, y(u)\sin v, z(u))$.