

## 7. CALCOLO NON LINEARE DELLE STRUTTURE IN C.A.

---

Maggio 2025 – v. 1.0

- Pag. 1.1 -

---

### Calcolo non lineare delle strutture in c.a.

#### **7.1. Introduzione**

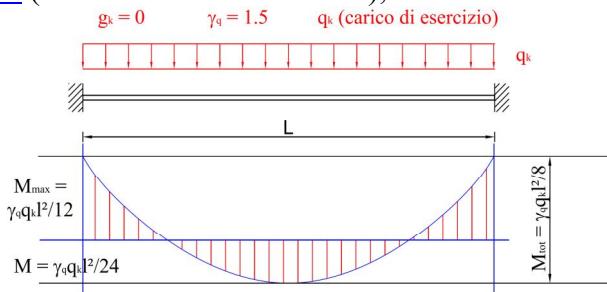
Il metodo semiprobabilistico agli Stati Limite prevede che l'aleatorietà dei valori di  $R$  ed  $S$  viene tenuta in conto, in modo semplificato, introducendo opportuni coefficienti parziali di sicurezza  $\gamma$ , distinti in coefficienti minorativi  $\gamma_m$  per la resistenza dei materiali e in maggiorativi  $\gamma_f$  per le azioni.

È noto che la verifica agli SLU consiste in un confronto diretto fra i valori di progetto  $R_d$  e  $S_d$ , verificando che la sollecitazione di progetto non ecceda la resistenza.

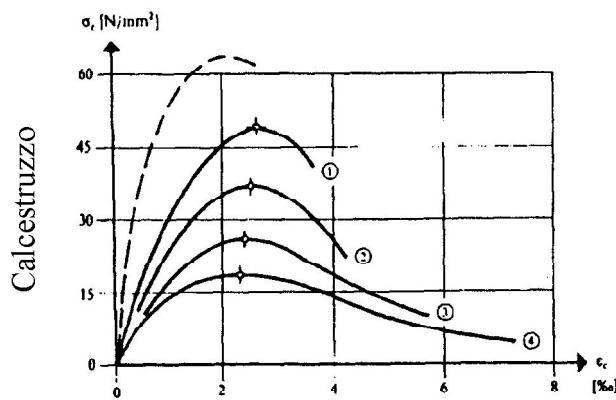
$$R_d \geq S_d$$

dove:

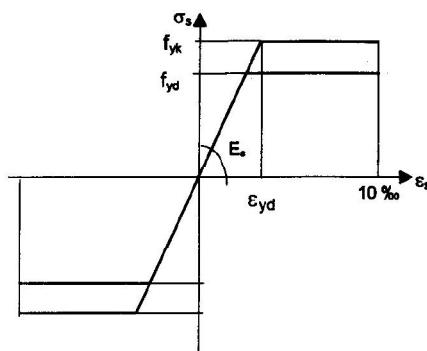
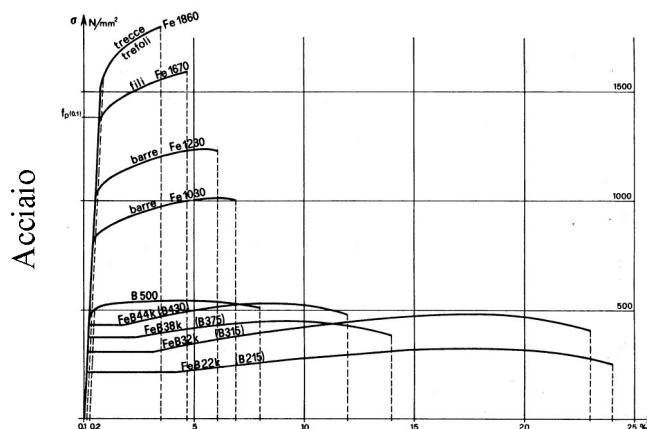
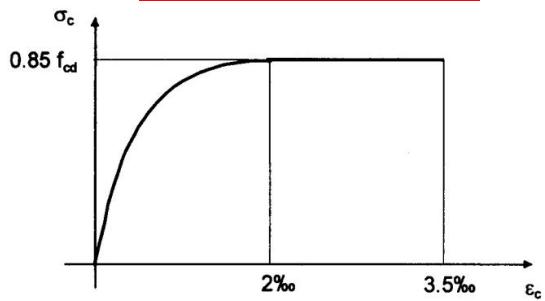
$S_d$  rappresentano le sollecitazioni di progetto, calcolate con una analisi della struttura di tipo elastico lineare (Scienza delle Costruzioni);



$R_d$  rappresentano le resistenze di progetto, calcolate con il metodo degli SLU, considerando i legami costitutivi di tipo elasto-plastici;



INCONGRUENZA ???



Per quanto detto in precedenza la situazione limite può essere raggiunta con diverse modalità; tuttavia si ha sempre la necessità di determinare lo stato di sollecitazione (N,M,V,T) nel modo più aderente all'effettivo comportamento della struttura. Nasce quindi l'esigenza di considerare tutte le non-linearietà che si potrebbero manifestare, in particolare:

- non linearità del materiale: le leggi costitutive dei materiali non sono lineari;
- non linearità strutturali o geometriche: a causa della deformazione degli elementi strutturali, le forze normali possono dare luogo a momenti flettenti aggiuntivi in generale non trascurabili (effetti del II ordine)

Nel caso di una **struttura isostatica**, il raggiungimento del momento plastico in una sezione comporta la formazione di una cerniera plastica (a momento costante si ha aumento della rotazione), quindi la struttura diventa labile e si ha il collasso.

In una **struttura iperstatica**, la formazione di una cerniera plastica comporta la perdita di un grado di iperstaticità, diventando al più isostatica e preservando comunque una riserva di resistenza, impedendo il collasso.

Inoltre non è detto che un elemento strutturale (c.a. o acciaio) possa raggiungere/permettere la plasticizzazione del materiale: basti pensare al fenomeno dell'instabilità per carico di punta, instabilità laterale delle travi snelle o l'instabilità locale dei profili metallici.

Da questi semplici esempi si capisce che non è sempre possibile spingersi oltre l'analisi elastica.

La normativa infatti prevede per le strutture in c.a. le seguenti analisi:

- analisi elastica-lineare, con / senza ridistribuzione dei momenti:

L'analisi elastica lineare può essere usata per valutare gli effetti delle azioni sia per gli stati limite di esercizio sia per gli stati limite ultimi.

Le analisi saranno effettuate assumendo:

- a) sezioni interamente reagenti con rigidezze valutate riferendosi al solo calcestruzzo;
- b) relazioni tensione deformazione lineari;
- c) valori medi del modulo d'elasticità.

Per le sole verifiche agli stati limite ultimi, i risultati dell'analisi elastica possono essere modificati con una ridistribuzione dei momenti, nel rispetto dell'equilibrio e delle capacità di rotazione plastica delle sezioni dove si localizza la ridistribuzione.

- analisi plastica

L'analisi plastica può essere usata per valutare gli effetti di azioni statiche e per i soli stati limite ultimi. Al materiale si può attribuire un diagramma tensioni-deformazioni rigido-plastico verificando che la duttilità delle sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni sia sufficiente a garantire la formazione del meccanismo previsto

- analisi non lineare

L'analisi non lineare può essere usata per valutare gli effetti di azioni statiche e dinamiche, sia per gli stati limite di esercizio, sia per gli stati limite ultimi, a condizione che siano soddisfatti l'equilibrio e la congruenza.

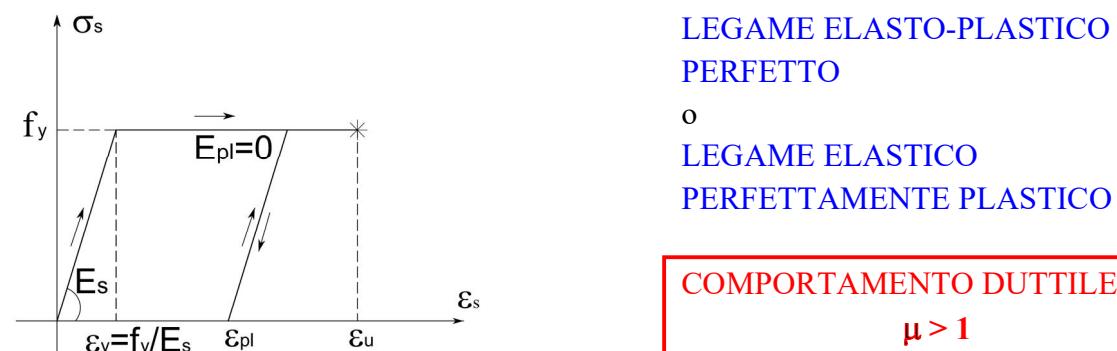
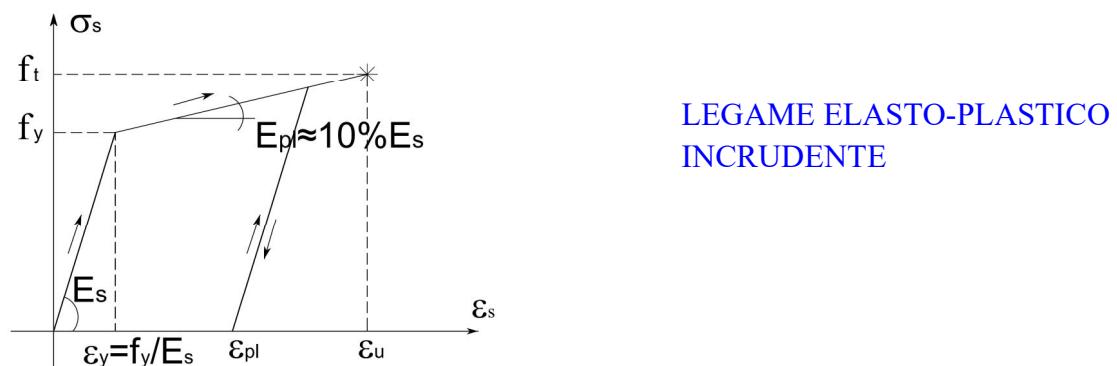
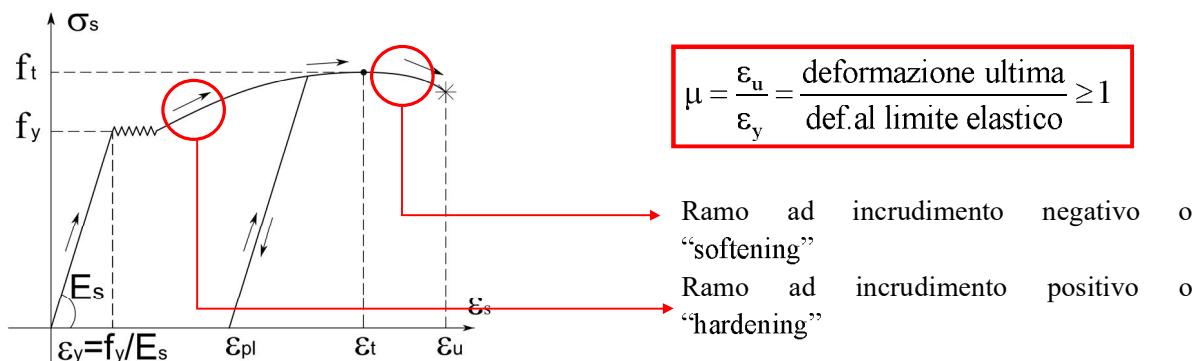
Al materiale si può attribuire un diagramma tensioni-deformazioni che ne rappresenti adeguatamente il comportamento reale, verificando che le sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni siano in grado di sopportare allo stato limite ultimo tutte le deformazioni non elastiche assunte nell'analisi, tenendo in appropriata considerazione le incertezze.

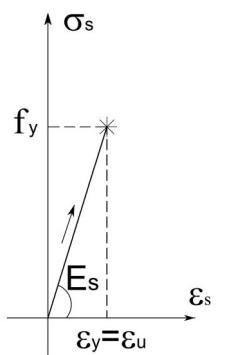
## 7.2. La Duttilità

Il **concepto generale di duttilità**: “è la capacità di un materiale, una sezione, un elemento o di una struttura nella sua complessità, di sopportare deformazioni anelastiche anche di elevata ampiezza, una volta superato un valore di tensione/forza - detto di primo snervamento -”; in termini energetici, è la capacità di assorbire energia in modo anelastico, senza sensibili riduzioni della resistenza.

### 7.2.1. Duttilità al livello di “materiale”

Un materiale è duttile quanto maggiore è la deformazione che può sopportare dopo il primo snervamento.





LEGAME ELASTO-FRAGILE

COMPORTAMENTO FRAGILE

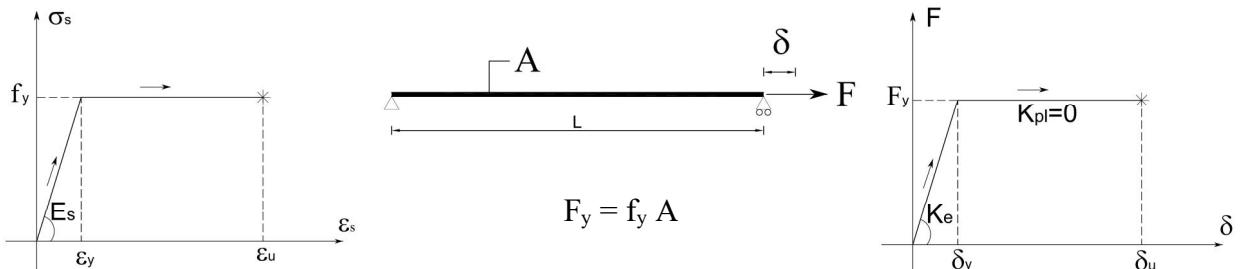
$$\mu = 1$$

Se una struttura in cemento armato è duttile:

- si evitano collassi fragili;
- la capacità portante è indipendente da distorsioni e cedimenti;
- si evitano problemi di incertezze sulla natura dei vincoli, incertezze dovute alle variazioni termiche e da ritiro;
- è possibile ricorrere alla ridistribuzione delle sollecitazioni, ottimizzando la progettazione;
- ci si può avvalere della dissipazione energetica per aver un buon comportamento strutturale in condizioni di sismiche.

### 7.2.2. Duttilità al livello di “elemento Tirante”

Un elemento strutturale è duttile quanto maggiore è lo spostamento che può sopportare dopo il primo snervamento.



La duttilità è definita come:

$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_y} = \frac{\text{allungamento ultimo}}{\text{all. al limite elastico}} \geq 1$$

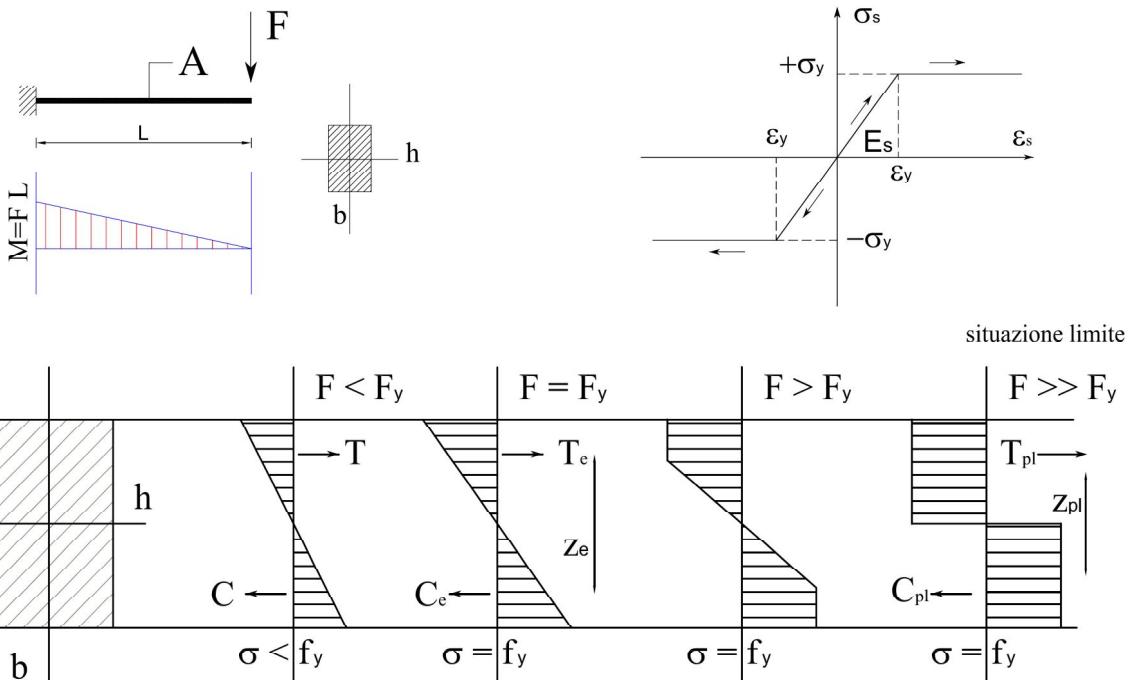
La rigidezza elastica vale

$$K_e = \frac{F}{\delta} = \frac{E_s \cdot A}{L}$$

$$\text{dato che } \delta = \frac{F \cdot L}{E_s \cdot A}$$

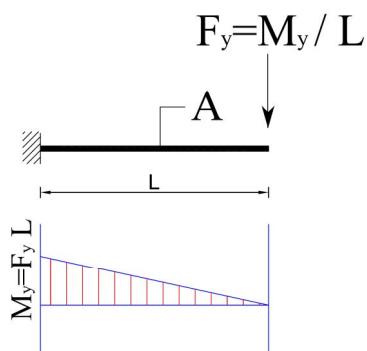
### 7.2.3. Moduli di Resistenza e Fattore di Forma”

Consideriamo un mensola incastrata di sezione rettangolare con un carico  $F$  in punta.



In condizioni di snervamento:

$$T_e = C_e = \frac{1}{2} \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \quad \text{con} \quad z_e = \frac{2}{3} h$$



$M_y$  = momento di snervamento, che corrisponde ad avere ai lembi della sezione una tensione pari a quella di snervamento;

$$M_y = W_e \cdot f_y$$

$W_e$  = Modulo ELASTICO di resistenza

In una sezione rettangolare il modulo di resistenza elastico vale:

$$W_e = \frac{J}{h} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{h} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

In alternativa è possibile calcolarlo come:

$$M_y = \frac{1}{2} \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \cdot \frac{2}{3} h = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_y$$

In condizioni di completa plasticizzazione:  $T_{pl} = C_{pl} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \quad \text{con} \quad z_{pl} = \frac{1}{2} h$

Il momento vale

$$M_{pl} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \cdot \frac{1}{2} h = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot f_y = W_{pl} \cdot f_y$$

$M_{pl}$  = **Momento plastico**, che corrisponde a raggiungere la completa plasticizzazione della sezione

$W_{pl}$  = **Modulo di resistenza PLASTICO**

**I moduli elastici e plastici dipendono esclusivamente dalla geometria della sezione.**

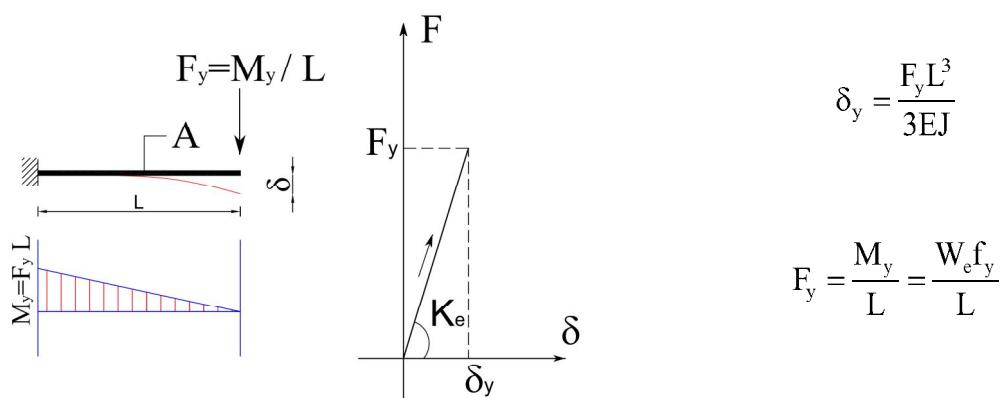
Si definisce **Fattore di Forma** di una sezione il rapporto fra il modulo plastico e quello elastico:

$$Z = \frac{W_{pl}}{W_e}$$

Nel caso di sezioni rettangolari vale:  $Z = \frac{b \cdot h^2}{4} / \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{6}{4} = 1.5$

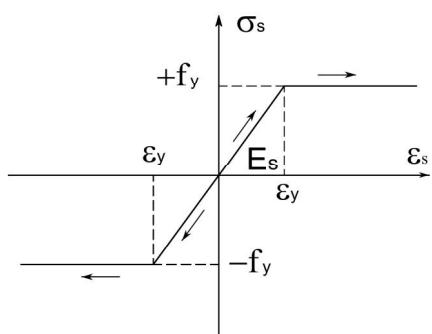
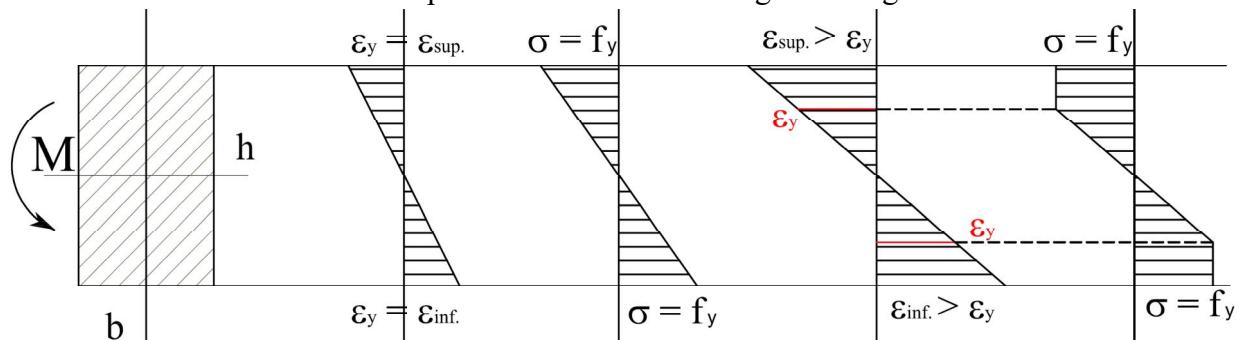
#### 7.2.4. Duttilità al livello di "Sezione"

Consideriamo nuovamente la mensola con momento flettente al limite dello snervamento:



In corrispondenza dell'incastro, sezione maggiormente sollecitata a flessione, sia ha lo snervamento delle fibre tese superiori e di quelle compresse inferiori con plasticizzazione locale e conseguente formazione della cerniera plastica.

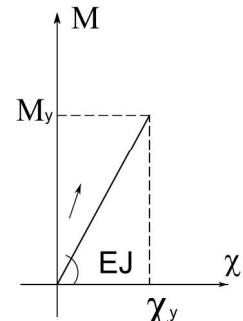
Nel momento in cui inizia a plasticizzare si hanno i seguenti diagrammi:



Si definisce la **curvatura al limite elastico**:

$$\chi_y = \frac{|\epsilon_{sup}| + |\epsilon_{inf}|}{h} = \frac{2\epsilon_y}{h}$$

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

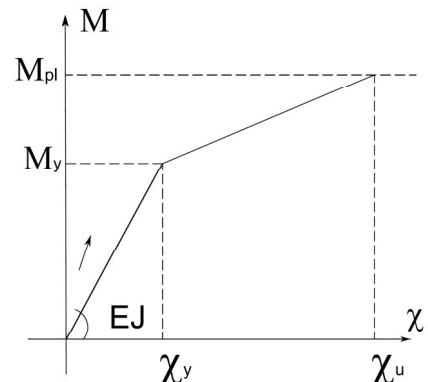


Si può aumentare la curvatura  $\chi$  fin quando si arriva alla deformazione ultima  $\epsilon_u$  della fibra più sollecitata e poi alla rottura della stessa.

La **curvatura ultima** è pari a :  $\chi_u = \frac{|\epsilon_{u,sup}| + |\epsilon_{u,inf}|}{h} = \frac{2\epsilon_u}{h}$

Ricordandoci che il Fattore di Forma è pari a:  $Z = \frac{W_{pl}}{W_e} = 1.5$  (sezioni rettangolari)

si ha:  $M_y = W_e \cdot f_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_y =$   
 $M_{pl} = W_{pl} \cdot f_y = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot f_y =$



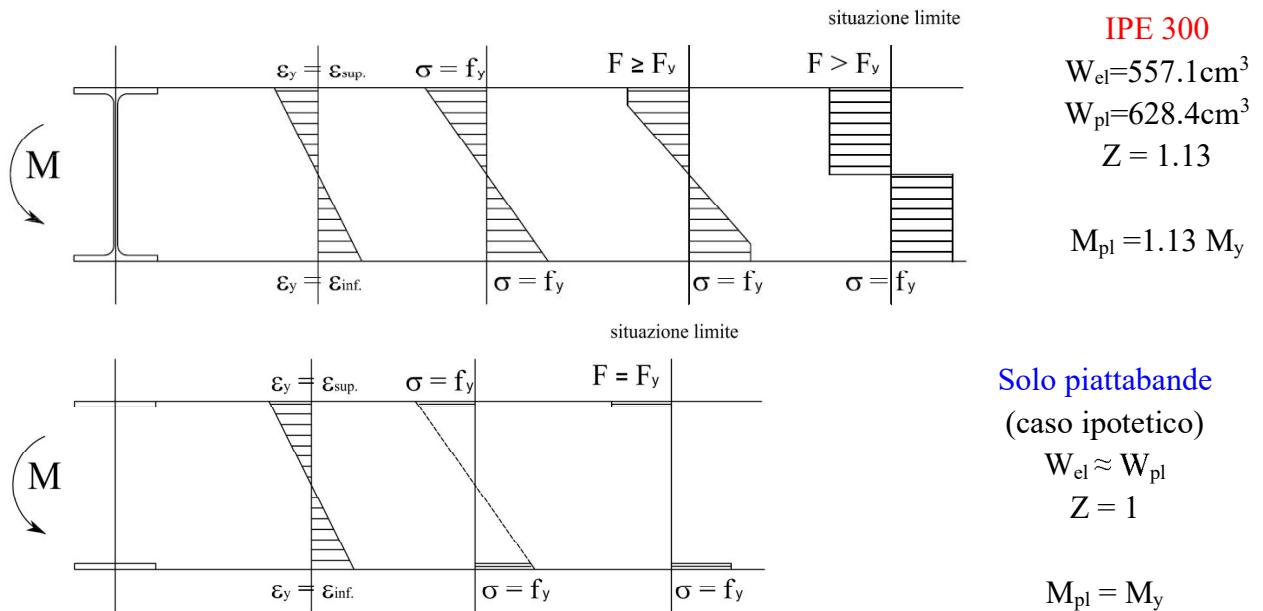
La **DUTTILITÀ DI SEZIONE** è definita come:

$$\mu = \frac{\chi_u}{\chi_y} = \frac{\text{curvatura ultima}}{\text{curv. al limite elastico}} \geq 1$$

OSS:

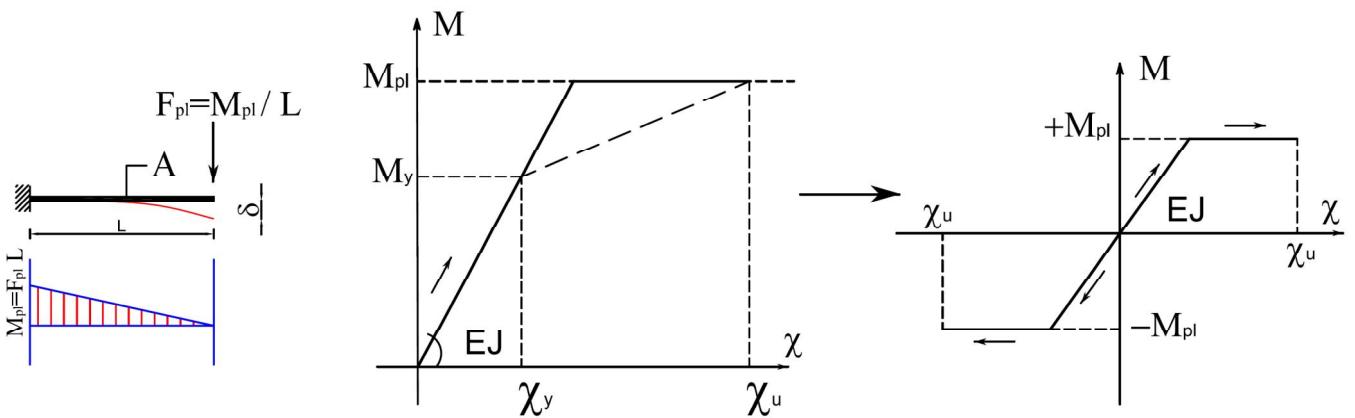
*"Il rapporto fra il momento resistente plastico ed elastico dipende esclusivamente dai moduli resistenti e quindi dalle caratteristiche geometriche della sezione".*

Infatti se consideriamo:



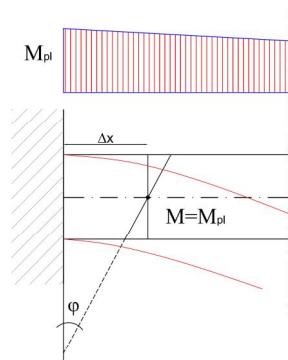
### 7.2.5. Cerniera plastica

Consideriamo nuovamente la mensola con un legame teorico Momento-Curvatura di tipo elastico-perfettamente plastico: è una forzatura in quanto nella realtà si ha sempre un tratto di incrudimento, più o meno esteso a seconda del tipo di sezione.



Ipotizziamo che la sezione più sollecitata raggiunga il momento plastico; in corrispondenza di un ulteriore aumento della sollecitazione esterna questa non può più riprendere momento ma inizia a ruotare fino alla curvatura ultima: si è formata una cerniera plastica.

In realtà esiste un tratto finito di trave che raggiunge il momento plastico, si plasticizza e ruota

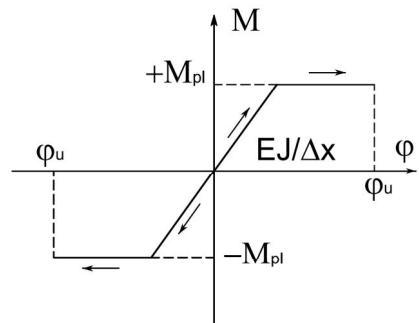


$$\varphi(x) = \int_0^{\bar{x}} \chi(x) dx = \int_0^{\bar{x}} \frac{M}{EJ}(x) dx$$

$$\boxed{\varphi = \bar{\chi} \Delta x}$$

$\bar{\chi}$  = curvatura media

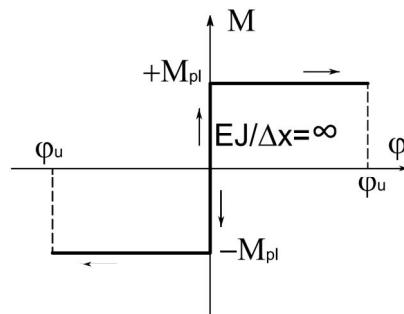
$\Delta x = l_p$  lunghezza cerniera plastica



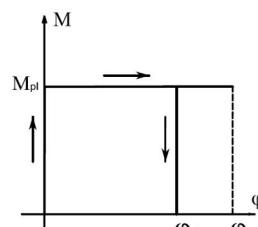
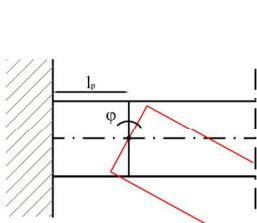
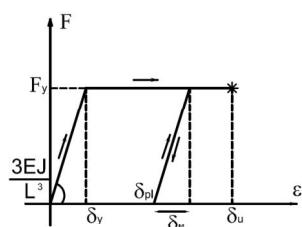
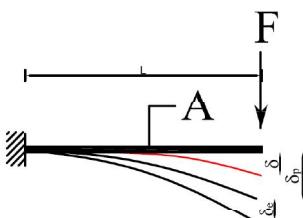
Il tratto  $\Delta x$  è molto piccolo, quindi si può fare un'ulteriore semplificazione, considerando un legame Momento-Curvatura rigido-plastico

Tipico legame che rappresenta un cerniera arrugginita:

resiste e non ruota fino a  $M_{pl}$ , poi cede ed inizia a ruotare senza riprendere ulteriore momento

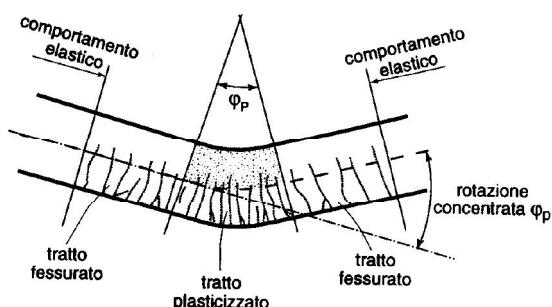


### 7.2.6. Duttività al livello di "elemento flessionale"



La **duttività di una mensola** è definita come:

$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_y} = \frac{\text{freccia ultima}}{\text{freccia al limite elastico}} \geq 1$$

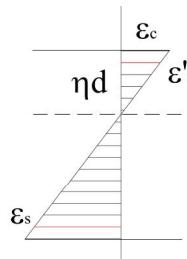
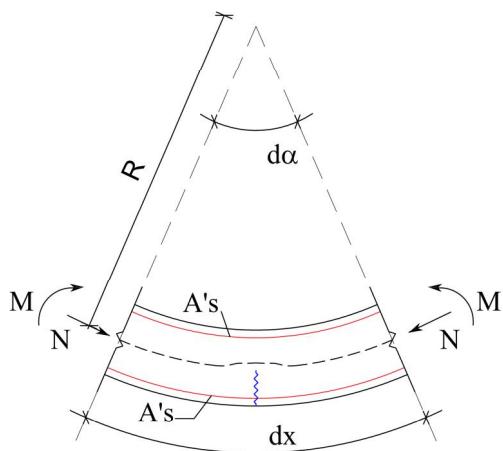


N.B.:

**la curvatura  $\chi$**  è una caratteristica della sezione  
**la rotazione  $\varphi$**  è una caratteristica del concio di trave

### 7.3. Diagramma Momento-Curvatura e Duttilità di una sezione in c.a.

Consideriamo un tronco di trave in c.a. soggetto a momento  $M$  e sforzo normale  $N$  costanti.



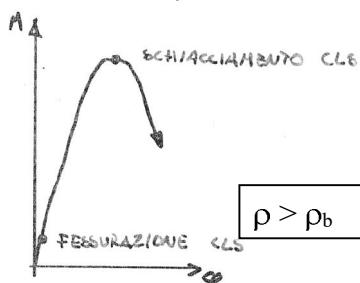
$$\begin{aligned} Rd\alpha &\approx dx \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \chi \\ \rightarrow \chi &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$

per un concio in c.a. di lunghezza unitaria  $dx = 1m$ , si ha

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_c}{\eta d} = \frac{\varepsilon_s}{(1-\eta)d} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} = \chi$$

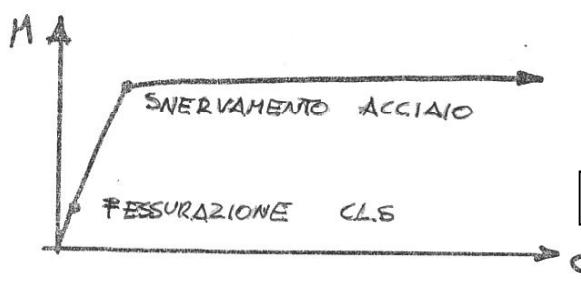
Il diagramma Momento-Curvatura di una sezione in c.a. può essere essenzialmente di due tipi, a seconda della quantità di armatura presente, cioè del rapporto geometrico di armatura  $\rho$ .

Se chiamiamo  $\rho_b$  la percentuale di armatura che comporta la rottura bilanciata, si ha



Comportamento **FRAGILE**

prevalenza del comportamento fragile del cls



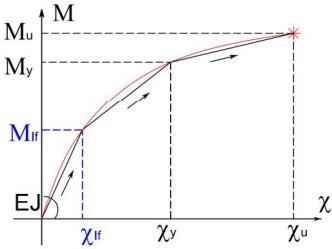
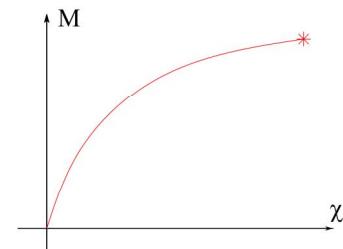
Comportamento **DUTTILE**

prevalenza del comportamento plastico/duttile delle armature

all'aumentare della deformazione, l'asse neutro si sposta verso l'alto con un conseguente leggero aumento del momento res. (aumento del braccio a forza costante), quindi tratto leggermente incruidente.

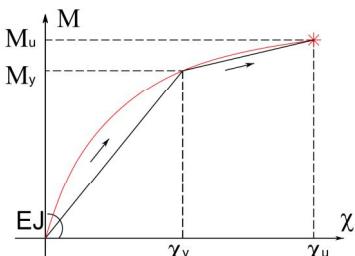
N.B.: Per avere strutture inflesse duttili, bisogna avere sempre  $\rho < \rho_b$  cioè rotture in campo 2 o 3

Vediamo ora come un diagramma reale  $M-\chi$  può essere schematizzato ai fini del calcolo.



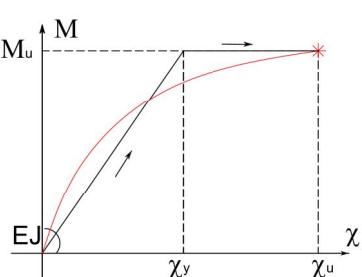
**Curva TRILATERA**

È quella più aderente alla realtà, riesce a rappresentare sia la prima fessurazione, sia lo snervamento/plasticizzazione che il leggero aumento del momento dopo lo snervamento delle barre



**Curva BILATERA INCRUDENTE**

Rappresentazione meno precisa, non riesce a cogliere la variazione di rigidezza dopo la prima fessurazione.  
Può rappresentare in maniera precisa le travi già fessurate

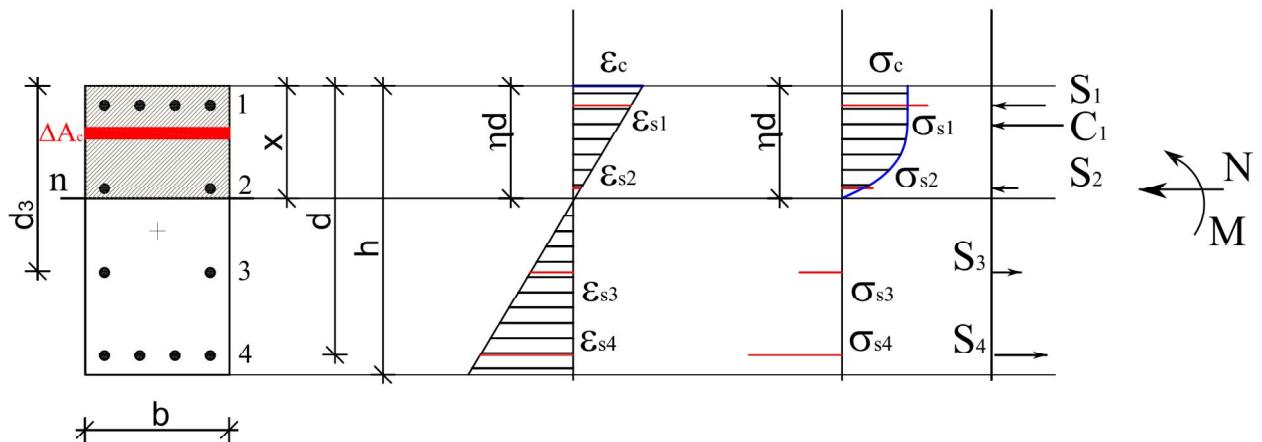


**Curva BILATERA ELASTO-PLASTICA**

Rappresentazione molto grossolana, non riesce a cogliere né la variazione di rigidezza dopo la prima fessurazione, né l'incremento di resistenza dopo la plasticizzazione ( $M_u - M_y = 0$ )

### 7.3.1. Costruzione del diagramma $M-\chi-N$

Considero una generica sezione rettangolare in c.a.



La costruzione del diagramma avviene per punti, corrispondenti alle [coppie  \$\(M, \chi\)\$  calcolate in corrispondenza di un prefissato valore costante di sforzo normale  \$N\_{sd}\$](#)

La procedura iterativa per il calcolo di ciascuna coppia di punti prevede 3 passi operativi:

Passo 1:

- si assume un valore iniziale di curvatura  $1/r$
- si assume un valore per la deformazione media  $\varepsilon_m$  in corrispondenza della fibra baricentrica, rispetto alla quale si valutano i momenti
- si divide la sezione in strisce orizzontali e si determinano per ciascuna striscia le  $\varepsilon$  e le  $\sigma$  per il calcestruzzo e per le barre d'armatura

Passo 2:

Si determina la risultante delle azioni assiali interne  $N_{int}$  e del momento  $M_{int}$ :

$$N_{int} = \sum \sigma_c \cdot \Delta A_c + \sum \sigma_s A_s$$

$$M_{int} = \sum \sigma_c \cdot z \cdot \Delta A_c + \sum \sigma_s \cdot z \cdot A_s$$

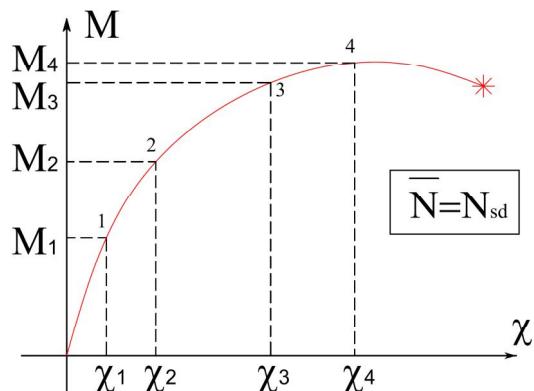
Passo 3:

Si verifica che lo sforzo normale interno sia uguale a quello esterno sollecitante, cioè sia soddisfatto l'equilibrio  $N_{sd} = N_{int}$ .

In caso positivo, significa che è stato determinato un valore di curvatura  $\chi$  e di  $\varepsilon_m$  tale da avere una situazione equilibrata e perciò possiamo assumere valido il  $M_{int}$  trovato. La coppia  $M_{int}-\chi$  rappresenta un punto del diagramma momento-curvatura.

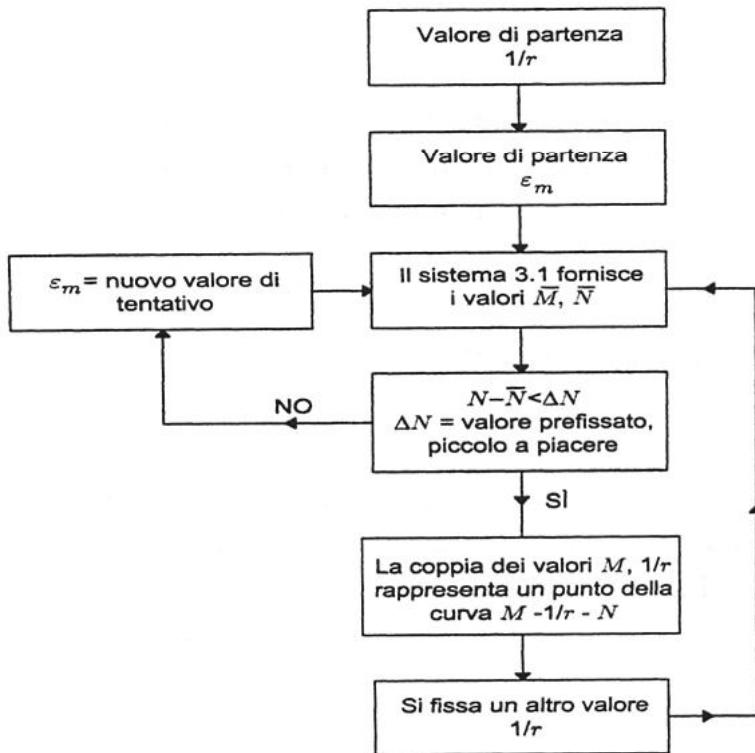
In caso negativo, bisogna assumere un nuovo valore della deformazione media  $\varepsilon_m$  conservando la curvatura tale che gli sforzi normali siano in equilibrio, ripetendo l'operazione finché non risulta  $N_{int}=N_{est}$

Determinata la coppia  $M-\chi$  si ripete l'operazione ciclica fissando una nuova curvatura  $\chi=1/R$  per determinare altre coppie di punti, fino a descrivere un diagramma completo della curva, compresa la crisi della sezione.



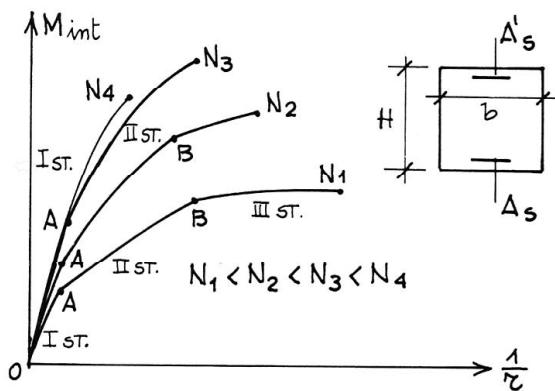
N.B.: Il diagramma  $M-\chi$  trovato è valido solo per quel determinato valore di  $N_{sd}$  considerato.

L'operazione può essere rappresentata con il seguente schema a blocchi:



La presenza di uno sforzo normale N agente sulla sezione comporta una modifica sostanziale del diagramma  $M-\chi$ , sia in termini di resistenza, sia di duttilità.

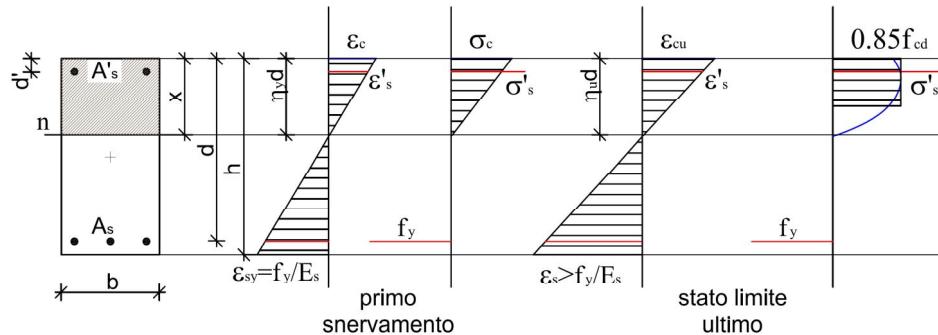
Soffermandoci sull'aspetto della resistenza si osserva un beneficio dovuto all'aumento di N fino a valori prossimi alla rottura bilanciata  $N_b$ ; da questo valore in poi, si ha nuovamente un degrado delle prestazioni.



Per quanto riguarda la duttilità è evidente che la presenza di azione assiale diminuisce notevolmente la capacità di sviluppare curvature in campo plastico cioè impedisce lo sviluppo di ampie rotazioni plastiche

### 7.3.2. Calcolo della duttilità di una sezione in c.a.

Consideriamo una sezione rettangolare in c.a. e valutiamo la curvatura prima allo snervamento (comportamento elastico lineare) e poi allo stato limite ultimo in assenza di sforzo normale.



#### Primo Snervamento:

$$\eta_y = \sqrt{(\rho + \rho')^2 n^2 + 2(\rho + \rho')\delta} - (\rho + \rho')n$$

$$\rho\alpha = \frac{A_s}{bd} \frac{\sigma_s (= f_y)}{f_c}$$

asse neutro elastico in forma adimensionale, con  $n$  coefficiente di omogeneizzazione

allo snervamento dell'acciaio, la  $\sigma_s$  è pari a  $f_y$

$$M_y = A_s f_y \cdot z$$

momento di primo snervamento

$z$  è noto a partire dall'asse neutro  $\eta_y$

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_s}{d(1-\eta_y)} = \frac{f_y/E_s}{d(1-\eta_y)}$$

curvatura al limite elastico

#### Allo Stato Limite Ultimo:

$$\eta_u = \frac{\rho\alpha_d - \rho'\alpha'_d}{\beta}$$

asse neutro "ultimo" in forma adimensionale con  $\beta = 0.8$  altezza stress block

$$M_u = \beta b x_u 0.85 f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{\beta}{2} x \right) + A'_s \sigma'_s \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s \sigma_s \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

momento allo SLU

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_u}{\eta_u d}$$

Curvatura ultima

#### Duttilità sezione c.a.:

$$\mu = \frac{\chi_u}{\chi_y} = \frac{\varepsilon_{cu}}{f_y/E_s} \cdot \frac{1 - \eta_y}{\eta_u}$$

Quindi la duttilità [aumenta](#) se:

- aumenta la deformazione ultima del calcestruzzo
- aumenta la resistenza del calcestruzzo compresso (eventualmente effetto confinamento)
- aumenta l'area di acciaio compresso

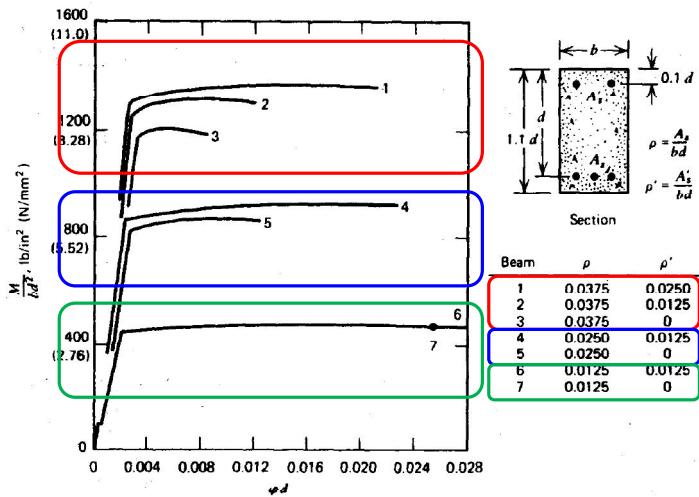
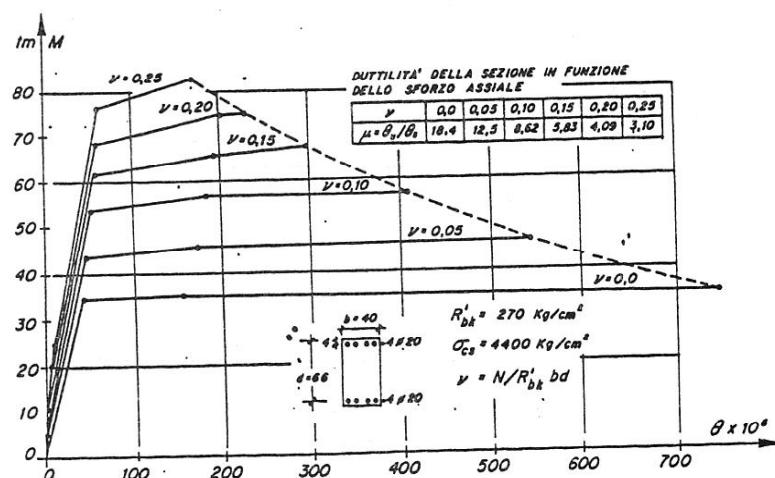


Fig. 6.6. Theoretical moment-curvature relationships.

OSS:  
In conclusione per ottenere sezioni duttili in c.a. si devono progettare sezioni con “poco acciaio” con limite di snervamento non troppo elevato e calcestruzzo molto resistente, sfruttando eventualmente l’effetto confinamento

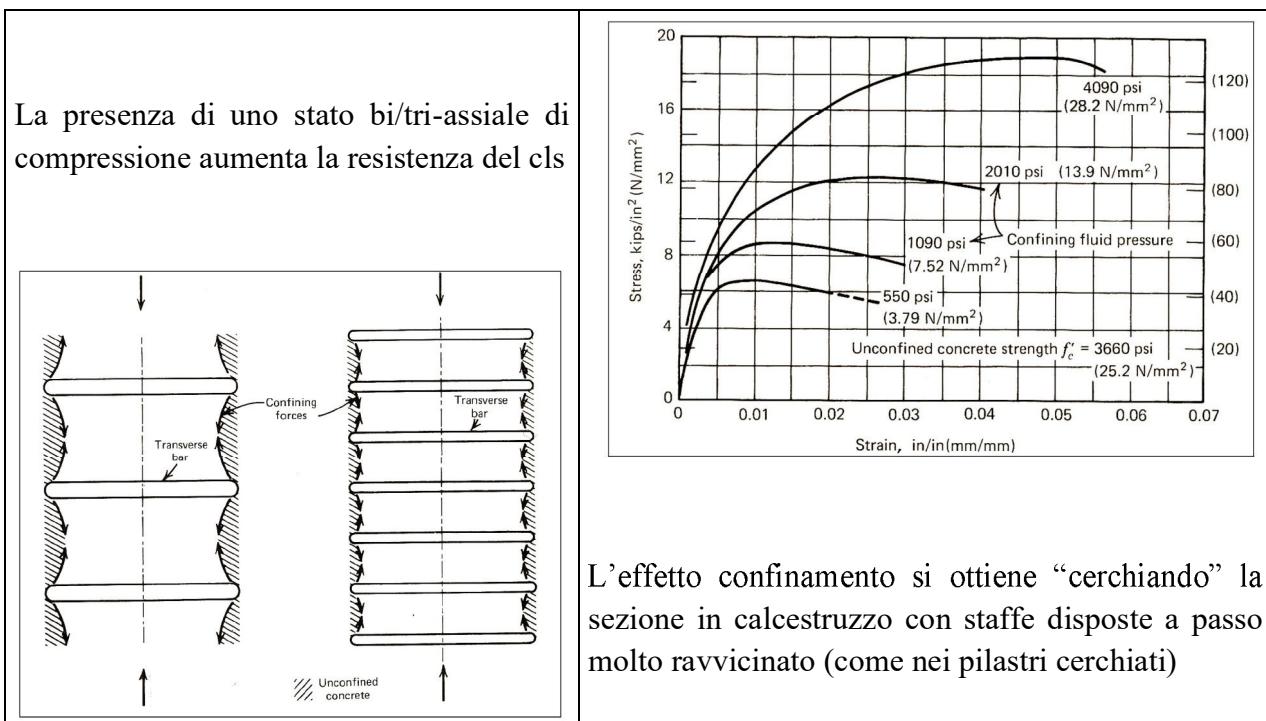
Consideriamo un sezione rettangolare in c.a. [soggetta a sforzo normale N](#): la figura seguente illustra chiaramente l’effetto di N sulla duttilità.



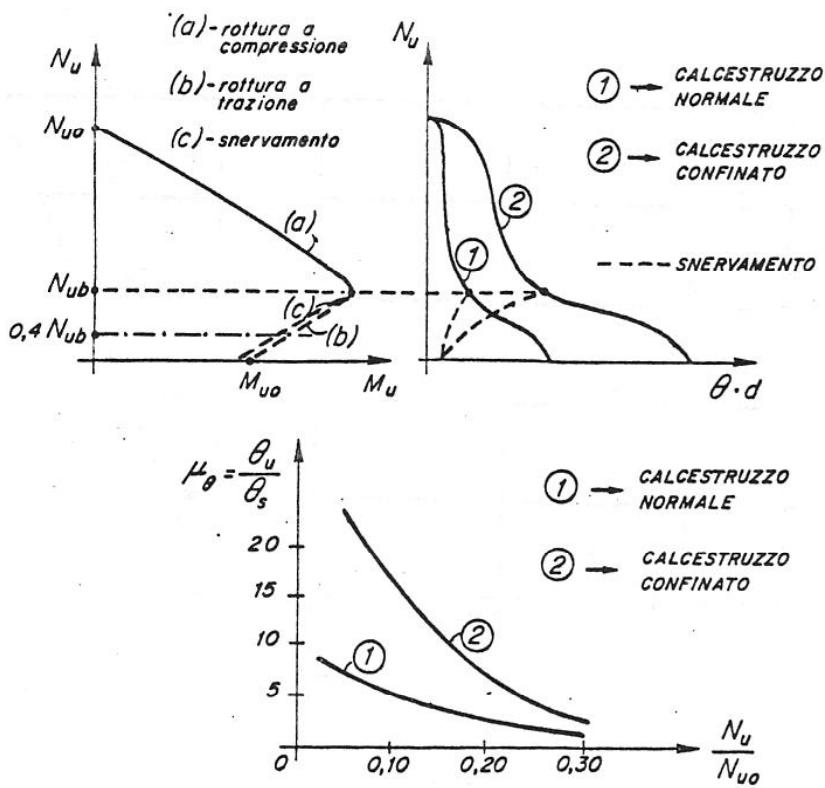
È evidente come la presenza di [N sia negativa](#), infatti già per valori modesti del rapporto N/N<sub>u</sub> la duttilità della sezione si riduce notevolmente rispetto al caso di flessione semplice (N=0); per valori di N>0.4N<sub>u</sub> la duttilità diventa addirittura nulla in quanto il collasso della sezione è causato dallo schiacciamento del calcestruzzo mentre l'acciaio è ben lontano dallo snervamento.

[L'aumento dello sforzo normale diminuisce la duttilità della sezione](#)

Un aspetto positivo che incrementa la duttilità è certamente l'effetto dovuto al **confinamento** del calcestruzzo:

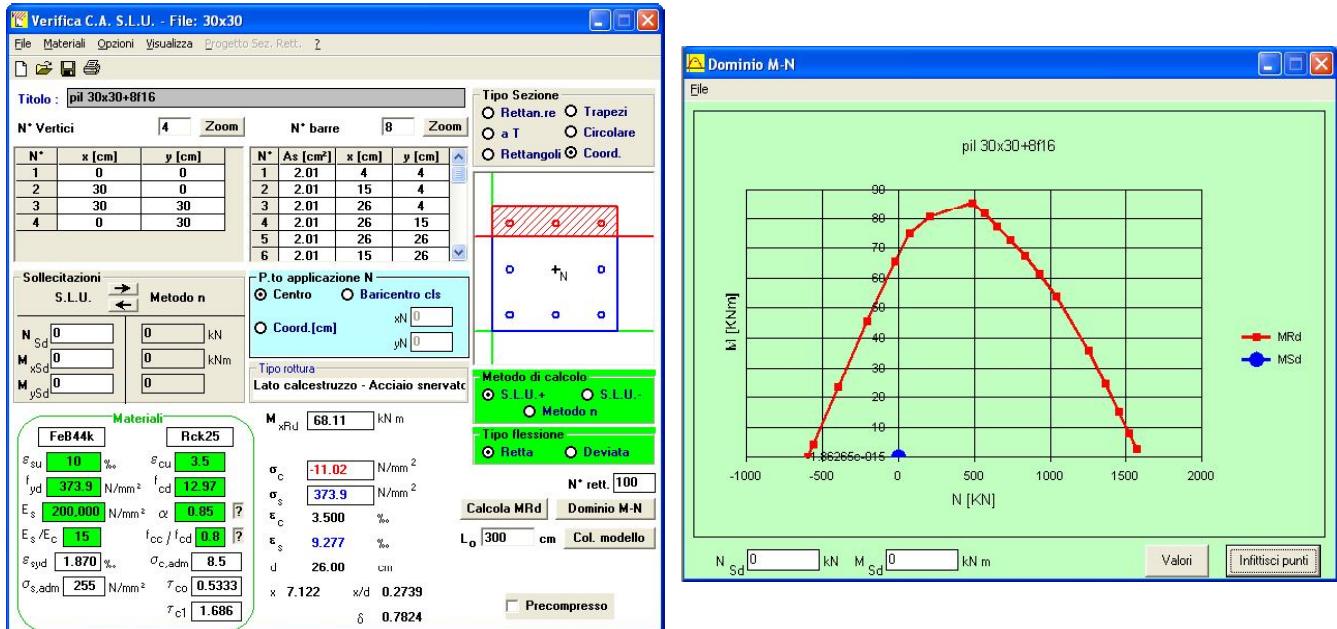


Il confinamento aumenta le capacità duttili



### 7.3.3. Esempio

Consideriamo un pilastro di sezione quadrata 30x30 con 8Ø16:



La figura seguente rappresenta diversi diagrammi Momento-Curvatura al variare del carico assiale  $N_{sd}$  presente:

