

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 6

Esercizio 1. 1. Trovare le classi di coniugio dei gruppi diedrali \mathbb{D}_8 e \mathbb{D}_{10} .

2. Cosa si può dire per un generico gruppo diedrale \mathbb{D}_{2n} ?

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 385. Dimostrare che esiste un 11-Sylow normale in G e che un 7-Sylow è contenuto nel centro di G .

Esercizio 3. Sia G un gruppo di ordine p^2q con p e q primi distinti. Dimostrare che G contiene o un p -Sylow o un q -Sylow normale.

Esercizio 4. Sia G un gruppo finito e H un sottogruppo tale che soddisfa uno delle seguenti condizioni:

1. per ogni $x \in H$ con $x \neq 1_G$, vale che $C_G(x) \subseteq H$;
2. per ogni K sottogruppo non banale di H , vale che $N_G(K) \subseteq H$.

Dimostrare che l'ordine di H è coprimo con l'indice di H in G .

Esercizio 5. Sia $G \cong \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{154} \times \mathbb{Z}_{99}$. Calcolare i coefficienti di torsione di G .

Esercizio 6. Classificare i gruppi abeliani di ordine 1800.

Esercizio 7. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo normale. Dimostrare che se H e G/H sono risolubili, anche G è risolubile.

Esercizio 8. 1. Sia $GL(n, F)$ il gruppo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti in un campo F con l'operazione prodotto fra matrici. Verificare che se $n \geq 5$ il gruppo $GL(n, F)$ non è risolubile.

2. Verificare che $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ è risolubile.

Esercizio 9. Si verifichi se il gruppo "adottato" è risolubile.