

Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025

Preparazione alla prova scritta

Prof. Valentina Beorchia

24 maggio 2025

1. Si consideri la seguente curva:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (t - 1, t^3, t).$$

- (a) Usando le formule per parametrizzazioni non in lunghezza d'arco, ove possibile si calcolino il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione della curva.
- (b) Si dica se la curva è biregolare.
- (c) Si dica se la curva è piana e in caso affermativo si calcoli il piano in cui è contenuta.

2. Si consideri la mappa

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, uv, \frac{u-v}{2} \right).$$

- (a) Si verifichi che $\varphi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare;
- (b) si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale;
- (c) si calcolino curvatura gaussiana e curvatura media nel generico punto della superficie;
- (d) si dica se la superficie è rigata; in caso affermativo, si determini una direttrice;
- (e) si dica, motivando la risposta, se φ è una isometria.