Compensazione degli errori nelle reti topografiche

Prof. Raffaela Cefalo

Disuguaglianza di Tchebycheff

- Si consideri la varianza della variabile statistica:

$$v_i = x_i - m_1$$

$$\boxed{\sigma^2 = v_1^2 h_1 + v_2^2 h_2 + \dots + v_n^2 h_n}$$

- Riordiniamo gli scarti in modo che in valore assoluto:

$$v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$$

- Considerando i v_i superiori ad un certo v_m si ha che:

$$\boxed{\sigma^2 \geq v_m^2 \left(h_m + h_{m+1} + \dots + h_n \right)}$$

$$h_m + h_{\ m+1} + \dots h_n = h^*$$

rappresenta la frequenza con cui si presentano scarti superiori a v_m. Indicando con $\underline{h}^*$ la frequenza con cui si presentano scarti inferiori a v_m, si ha:

$$\sigma^2 \geq v_m^2\left(1 - \overline{h}^*\right)$$

e quindi:

$$\overline{h}^* \geq 1 - \frac{\sigma^2}{v_m^2}$$

disuguaglianza di Tchebycheff

- La varianza è dunque una misura della concentrazione dei risultati delle misurazioni
- Se $v_m = 2\sigma$ $\underline{h}^* = 0{,}75$
- Se $v_m = 3\sigma$ $\underline{h}^* = 0{,}89$.

Distribuzioni marginali

- Si consideri una variabile statistica a più dimensioni, come ad es. la variabile statistica “coordinate di un caposaldo”, determinata N volte in base alle varie corrispondenti misurazioni.
- Una variabile statistica bidimensionale sarà descritta da una coppia di valori x, y

Distribuzioni marginali

	x1	x2	x3		xr	
y1	H11	H21	H31		Hr1	
y2	H12	H22	H32		Hr2	
y3	H13	H23	H33		Hr3	
ys						

$m_1 = \sum_{j=1}^{s} H_{1j}$

$m_2 = \sum_{j=1}^{s} H_{2j}$

$n_1 = \sum_{k=1}^{r} Hk_1$

$n_2 = \sum_{k=1}^{r} Hk_2$

$$N = \sum_{k=1}^{r} m_k = \sum_{K=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} H_{kj}$$

$$N = \sum_{j=1}^{s} n_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} H_{kj}$$

Distribuzioni marginali

- Ciascuna delle due variabili può essere considerata separatamente:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

Con la distribuzione “marginale” di frequenze

$$m_1, m_2, m_3 \ldots$$

e, analogamente:

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

$$n_1, n_2, n_3 \ldots$$

Frequenze

- Si ha:

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = N = \sum_{k=1}^{s} n_k$$

- N è il numero totale delle misure effettuate.
- Le frequenze della variabile bidimensionale x, y sono:

$$\boxed{h_{ik} = \frac{H_{ik}}{N}}$$

	x1	x2	x3		xr	
y1	h11	h21	h31		hr1	
y2	h12	h22	h32		hr2	
y3						
ys						

- Frequenze delle distribuzioni marginali

$$\mu_i = \frac{m_i}{N} \qquad \nu_i = \frac{n_j}{N}$$

Parametri MEDIA

- Per la variabile aleatoria (o statistica) bidimensionale vengono definiti i seguenti parametri:

$$m_x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} x_i h_{ik} = \sum_{i=1}^{r} x_i \sum_{k=1}^{s} h_{ik} = \sum_i x_i \sum_k \frac{H_{ik}}{N} = \sum_i x_i \frac{m_i}{N} = \sum_i x_i \mu_i$$

MEDIA della x sulla distribuzione marginale m

$$m_y = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} y_k h_{ik} = \sum_{k=1}^{s} y_k \sum_{i=1}^{r} h_{ik} = \sum_i y_k \sum_i \frac{H_{ik}}{N} = \sum_i y_k \frac{n_k}{N} = \sum_i y_k \nu_k$$

MEDIA della y sulla distribuzione marginale n

Parametri VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \left(x_i - m_x\right)^2 h_{ik}$$

VARIANZA della x sulla distribuzione marginale m

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \left(y_k - m_y\right)^2 h_{ik}$$

VARIANZA della y sulla distribuzione marginale n

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \left(x_i - m_x\right)\left(y_k - m_y\right) h_{ik}$$

COVARIANZA

Passaggio al caso continuo

- In maniera analoga al caso monodimensionale si definisce la densità di probabilità nel caso bidimensionale:

$$P_{ik} = f_{ik}(a_{i+1} - a_i)(b_{k+1} - b_k)$$

Passando al caso continuo:

$$\mu_i \to f(x)dx$$
$$\nu_k \to f(y)dy$$
$$P_{ik} \to f(x,y)dxdy$$

Passaggio al caso continuo

- Considerando il campo di esistenza delle x, y da – ∞ a +∞

$$m_{1x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dxdy \qquad m_{1y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dxdy$$

$$m_{2x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy \qquad m_{2y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy$$

MEDIE

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_{1x}\right)^2 f(x,y)\,dxdy$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(y - m_{1y}\right)^2 f(x,y)\,dxdy$$

VARIANZE

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - m_y\right)\left(x - m_x\right) f(x,y)\,dx\,dy$$

COVARIANZA

può essere vista anche come media della v.s. bidimensionale (y-my) (x-mx), prodotto degli scarti

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

- Le frequenze h_{ik} sono frequenze CONDIZIONATE

(frequenze con le quali si presentano le misure x_i assieme alle misure y_k)

- Le sole frequenze x_i, indipendenti dalle y_k, si ottengono sommando tutte le frequenze della colonna i-esima:

$$\sum_{k=1}^{s} h_{ik} = \sum_{k=1}^{s} \frac{H_{ik}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{s} H_{ik} = \frac{1}{N} m_i = \mu_i$$

e analogamente:

$$\sum_{i=1}^{r} h_{ik} = \frac{1}{N} n_k = \nu_k$$

Variabili indipendenti

- Se le due variabili $x_1, x_2, \ldots x_r$, $y_1, y_2, \ldots, y_s$ sono INDIPENDENTI, allora la frequenza del contemporaneo verificarsi di misure nelle caselle x_i, y_k è il prodotto delle frequenze del singolo verificarsi x_i e y_k:

$$\boxed{h_{ik} = \mu_i \nu_k}$$

Caso continuo

- Nel caso continuo, per le densità di probabilità marginali $f_1(x)$, $f_2(y)$ è:

$$d\,Pxy = d\,Px\,d\,Py$$

cioè $f(x, y)\,dx\,dy = f_1(x)\,dx\,f_2(y)\,dy$

e quindi $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$

Se le x, y sono indipendenti la COVARIANZA è nulla

$$\boxed{\sigma_{xy} = 0}$$

- In generale avremo a che fare con variabili aleatorie dipendenti fra loro, ovvero CORRELATE e quindi con covarianza non nulla.
- Questo accadrà sempre per le coordinate dei vertici di una rete topografica, mentre supporremo che le osservazioni effettuate siano indipendenti fra loro (incorrelate).

Funzioni di variabili statistiche

- Le coordinate di un caposaldo sono funzioni di angoli, distanze, dislivelli.
- Sia F(x) una funzione deterministica della variabile statistica x, con densità di probabilità g (F).
  Sia f (x) la densità di probabilità della x.

- La varianza è uguale al valore quadratico medio meno il quadrato della media:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2$$

- Sia s variabile statistica bidimensionale funzione di due variabili x, y :

$$s = x + y \qquad m_1 s = m_1 x + m_1 y$$

Additività della media

- Varianza di s: $\sigma_s^2 = m_2 s - m_1^2 s$
- Se le variabili x, y sono indipendenti:

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

- In generale se:

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots$$

$$\sigma_s^2 = a_1^2 \sigma_{x1}^2 + a_2^2 \sigma_{x2}^2 + a_3^2 \sigma_{x3}^2 + \dots$$

Legge di propagazione della varianza per v.s. indipendenti

Legge di propagazione della varianza

- Se x, y sono non indipendenti ($\sigma_{xy} \neq 0$)

sia $s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r$

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \sigma_{xi}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{r} a_i a_j \sigma_{xixj}$$

Formulazione generale della Legge di propagazione della varianza

- Si abbia

$$
\begin{aligned}
u &= a_1 x + b_1 y \\
v &= a_2 x + b_2 y
\end{aligned}
$$

con x, y indipendenti

Si ha:

$$\sigma_{u,v} = a_1 a_2 \sigma_x^2 + b_1 b_2 \sigma_y^2$$

covarianza

$$
\begin{aligned}
\sigma_u^2 &= a_1^2 \sigma_x^2 + b_1^2 \sigma_y^2 \\
\sigma_v^2 &= a_2^2 \sigma_x^2 + b_2^2 \sigma_y^2
\end{aligned}
$$

In forma matriciale:

$$
\begin{vmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
$$

Matrice di varianza-covarianza

- Generalizzando:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$v = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$U = A\,X$$

Matrice di varianza-covarianza delle u, v

$$\Sigma_{uv} = A\ \Sigma_{xy} A^T$$

A^T trasposta di A

Questa relazione è valida anche se $\sigma_{xy} \neq 0$, ovvero per variabili x, y non indipendenti

Problema inverso

- Il sistema:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= L_1 \\ a_2 x + b_2 y &= L_2 \end{aligned}$$

$$AX = L$$

è risolto:

$$X = A^{-1} L$$

matrice di varianza-covarianza della x, y

$$\Sigma_{xy} = A^{-1} \Sigma_{uv} \left(A^{-1} \right)^T$$

con:

$$\Sigma_{uv} = \begin{vmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{vmatrix}$$

Stima del valore vero di una grandezza x

- Siano x_1, x_2, x_3, …, x_n i risultati di n misurazioni di una grandezza x, eseguite in ambiente costante con il medesimo strumento ed operatore.
  Tali risultati variano tra loro in maniera aleatoria.
- Qual è la stima più attendibile del valore (vero) della grandezza x, determinabile in base alle misure x_1, x_2,… x_n?
- Sia $\underline{x}$ tale stima più attendibile. Chiamiamo errori o scarti le differenze:

$$v_1 = x_1 - \underline{x},\;\; v_2 = x_2 - \underline{x},\;\; v_3 = x_3 - \underline{x}\; \dots$$

- Postulato di Legendre o dei Minimi Quadrati:

  $\underline{x}$ deve essere tale che $\boxed{\Sigma v_i^2 = \min}$

- Postulato di Gauss o della media:

  $\underline{x}$ è la media aritmetica delle $x_1, x_2, \ldots x_n$

- Postulato della Massima Verisimiglianza:

Si basa sul postulato che le misure uscite dal processo di misurazione sono, in quanto uscite ovvero realizzate, anche le più probabili.

Ciascuna delle misure $x_1, x_2, \dots x_n$, rappresenta la variabile statistica x e ne è una misura; quindi la n-pla

$$x_1, x_2, \dots x_n,$$

può essere vista come la realizzazione, ovvero la misura, di una v.s. n-dimensionale $x_1, x_2, \dots x_n$.

- Le x_1, x_2,… x_n , hanno ciascuna la stessa distribuzione di probabilità della x e quindi la stessa densità di probabilità P(x), con le stesse medie e varianze.

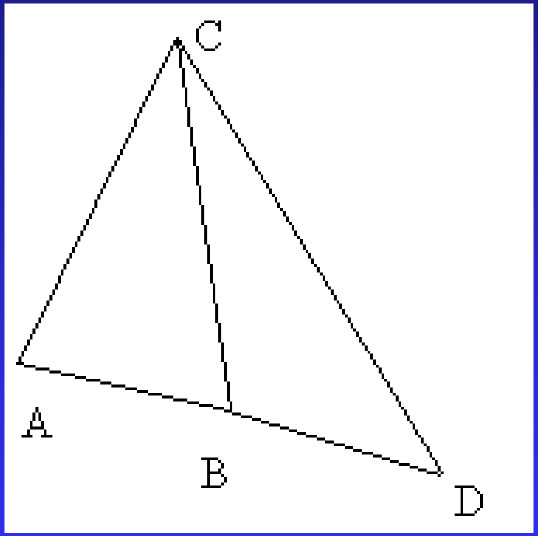
Se le misure sono indipendenti fra loro allora anche le v.s. componenti x_1, x_2,… x_n sono indipendenti; allora la densità di probabilità della variabile n-dimensionale è il prodotto di quelle delle sue componenti:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = P(x_1)\, P(x_2)\, P(x_3) \ldots P(x_n)$$

La $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ è detta VERISIMIGLIANZA.

Il prodotto $P(x_1)\, P(x_2)\, P(x_3) \ldots P(x_n)$, nel quale entrano le misure effettivamente uscite, è, per postulato, il massimo valore della probabilità o verisimiglianza P.

Intersezione in avanti



- C vertice incognito

  A, B, D hanno coordinate note

$$\sqrt{(XC-XA)^2+(YC-YA)^2}=\overline{AC}$$

$$\sqrt{(XC-XB)^2+(YC-YB)^2}=\overline{BC}$$

$$\sqrt{(XC-XD)^2+(YC-YD)^2}=\overline{DC}$$

- Le equazioni vanno linearizzate, inoltre in base alle prime due equazioni si può ottenere una soluzione XC, YC in base alla prima e alla terza una seconda soluzione ed infine in base alla seconda ed alla terza , una terza soluzione.
- Queste soluzioni sarebbero uguali fra loro solo in caso di misure AC, BC, DC idealmente esatte (prive di errori sistematici ed accidentali).
- Il problema è quello di determinare la soluzione più attendibile.

- Il problema viene risolto introducendo degli scarti incogniti ν_1, ν_2, ν_3 da aggiungere al termine noto di ciascuna equazione.

- Essi sono gli errori delle misure, incogniti ed accidentali

$$\sqrt{(XC-XA)^2+(YC-YA)^2}=\overline{AC}+v_1$$
$$\sqrt{(XC-XB)^2+(YC-YB)^2}=\overline{BC}+v_2$$
$$\sqrt{(XC-XD)^2+(YC-YD)^2}=\overline{DC}+v_3$$

A cui si aggiunge la condizione:

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=\min$$

- Le equazioni vengono prima linearizzate sostituendo a quelle originali, uno sviluppo polinomiale di Taylor arrestato ai termini lineari ed iterando il calcolo

$$f\left(XC,YC\right)=\sqrt{\left(XC-XA\right)^{2}+\left(YC-YA\right)^{2}}$$

- XC0, YC0 siano dei valori approssimati di C, ottenuti ad es. dalla soluzione di una delle intersezioni semplici.

$$f(XC,YC) = f(XC0,YC0) + \left(\frac{\partial f}{\partial XC}\right)_{XC0,YC0}(XC - XC0) + \left(\frac{\partial f}{\partial YC}\right)_{XC0,YC0}(YC - YC0)$$

f(XC0,YC0) è la distanza AC calcolata tra A ed il punto prossimo (XC0, YC0) $\rightarrow$ AC0

Ponendo:

$$x = XC - XC0 \qquad a_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial XC}\right)_{XC0,YC0}$$

$$y = YC - YC0 \qquad b_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial YC}\right)_{XC0,YC0}$$

- Considerando anche le altre 2 equazioni si arriva al sistema lineare:

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y &= \overline{AC} - \overline{AC0} + v_1 \\
a_2 x + b_2 y &= \overline{BC} - \overline{BC0} + v_2 \\
a_3 x + b_3 y &= \overline{DC} - \overline{DC0} + v_3
\end{aligned}
$$

- Negli errori v si possono includere anche i resti dei polinomi di Taylor

- Con notazione matriciale, il sistema diventa:

$$AX = L + v$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} AC - AC0 \\ BC - BC0 \\ DC - DC0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \quad \rightarrow \quad v^T v = \min$$

- La soluzione è data da:

$$X = N^{-1} A^T L$$

$$N = A^T A$$

Introducendo i pesi:

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

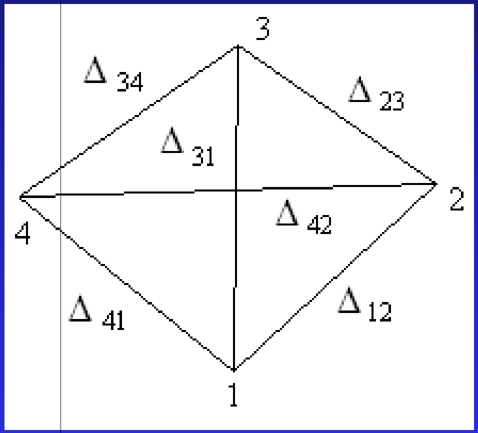
$$X = N^{-1} A^T P L$$

$$N = A^T P A$$

$$v^T P v = \min$$

Rete di livellazione

- Si abbiano ad es. 4 vertici fra i quali siano stati misurati i dislivelli



$$Q_1 - Q_2 = \Delta_{12}$$
$$Q_2 - Q_3 = \Delta_{23}$$
$$Q_3 - Q_4 = \Delta_{34}$$
$$Q_4 - Q_1 = \Delta_{41}$$
$$Q_4 - Q_2 = \Delta_{42}$$
$$Q_3 - Q_1 = \Delta_{31}$$

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- I termini della prima colonna risultano però combinazione lineare delle altre colonne la matrice A risulta quindi singolare
- Le soluzioni risulterebbero indeterminate → si vincola la rete attribuendo una quota prefissata ad uno dei vertici

$$-Q_2 = \Delta_{12} - \overline{Q}_1$$
$$Q_2 - Q_3 = \Delta_{23}$$
$$Q_3 - Q_4 = \Delta_{34}$$
$$Q_4 = \Delta_{41} + \overline{Q}_1$$
$$Q_4 - Q_2 = \Delta_{42}$$
$$Q_3 = \Delta_{31} + \overline{Q}_1$$

$$AQ = \Delta + v$$

$$v^T P v = \min$$

In questo caso non occorre iterare il calcolo poiché le equazioni sono lineari.

Si usa tuttavia anche per il controllo di errori grossolani introdurre quote approssimate $\overline{\overline{Q}}_2, \overline{\overline{Q}}_3, \overline{\overline{Q}}_4$

- e scrivere le equazioni nelle incognite:

$$q_2 = Q_2 - \overline{\overline{Q}}_2$$
$$q_3 = Q_3 - \overline{\overline{Q}}_3$$
$$q_4 = Q_4 - \overline{\overline{Q}}_4$$

Le equazioni diventano:

$$-q_2 = \Delta_{12} - \overline{Q}_1 + \overline{\overline{Q}}_2$$
$$q_2 - q_3 = \Delta_{23} - \overline{\overline{Q}}_2 + \overline{\overline{Q}}_3$$
$$q_3 - q_4 = \Delta_{34} - \overline{\overline{Q}}_3 + \overline{\overline{Q}}_4$$
$$q_4 = \Delta_{41} + \overline{Q}_1 - \overline{\overline{Q}}_4$$
$$q_4 - q_2 = \Delta_{42} - \overline{\overline{Q}}_4 + \overline{\overline{Q}}_2$$
$$q_3 = \Delta_{31} + \overline{Q}_1 - \overline{\overline{Q}}_3$$

- La matrice A non cambia mentre cambia il vettore dei termini noti

il calcolo viene iterato come nel caso dell'intersezione in avanti

$$Aq = \Delta + v$$

$$v^T P v = \min$$