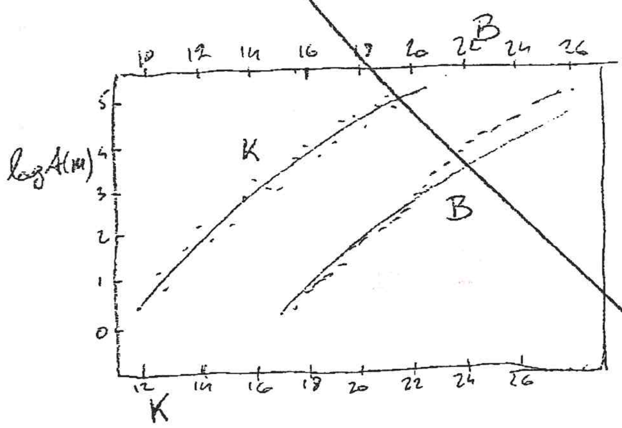
OSS

et $m + \frac{dm}{2}$. Mentre nella banda K, nell'IR, i conteggi sono in accordo con modelli cosmologici senza evoluzione, i conteggi nel blu mostrano un eccesso di oggetti deboli. Un confronto con i conteggi in redshift mostra che questi oggetti blu sono in buona parte a




$z \lesssim 0.5$. Potrebbero essere galassie giovani, ricche di stelle e gas, che sono poi state inglobate in galassie più grosse; la loro presenza non sarebbe vista nell'IR, perché la loro emissione è soprattutto nel B ed UV.

## Le brillanza superficiale (per sorgente estesa)

Abbiamo visto che il flusso bolometrico ricevuto da una sorgente si scrive come

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2}$$

mentre l'angolo $d\theta$ sotto il quale vediamo una sorgente di diametro proprio $D$ è

Angolo sotteso da sorgente $$d\theta = \frac{D(1+z)}{a_0 r}$$

che corrisponde ad un angolo solido $d\Omega = \frac{\pi}{4}(d\theta)^2$.

Quindi la brillanza (intensità specifica) bolometrica della sorgente sarà

$$\boxed{I_{bol} = \frac{F_{bol}}{d\Omega} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2} \cdot \frac{a_0^2 r^2 4}{D^2(1+z)^2 \pi} = \frac{L}{\pi^2 D^2 (1+z)^4}}$$ $\Rightarrow$ dipende solo dal redshift

Vedo che la brillanza non dipende da $r$, né da $a_0$, ma solo da $(1+z)^{-4}$. Ricordiamo che il fattore $(1+z)$ in $d\theta$ dipende dall'espansione dell'universo. Nella formula

$d_A = D/d\theta$

$d\theta = \frac{D}{d_A}$ $\quad dA = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$ $\quad \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$ $\quad D/2$

$d\theta$

$d_A = \left(\frac{D}{\cdot}\right)\cdot\frac{1}{d\theta}$ $\quad d\Omega = \frac{dA}{d_A^2} = \frac{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}{\left(D\right)^2}(d\theta)^2 = \frac{\pi}{4}(d\theta)^2$ ok

Angolo solido sotteso a $\frac{\Delta\theta}{2}$

$$\Delta\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Delta\theta/2} d\theta \sin\theta = 2\pi\left[1-\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]$$

$\Delta\theta \ll 1$ $$\simeq 2\pi\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2\right)\right) = \pi\frac{\Delta\theta^2}{4}$$

di $F_{bol}$, ricordiamo che un fattore $(1+z)$ deriva dal rapporto $dt_1/dt_0$, anch'esso dovuto all'espansione, mentre un fattore $(1+z)$ viene dalla perdita di energia dei fotoni. Se questa viene ascritta al fenomeno della luce stanca, ad esempio, e non vi è espansione, allora la $I_{bol}$ varierà solo come $I_{bol}(\text{l.s.}) \propto \frac{1}{1+z}$ invece che come $(1+z)^{-4}$. Quindi la misura della $I_{bol}$ verso $(1+z)$ può essere visto come un test sulla realtà dell'espansione dell'universo. (OSS 23)

NO

NO

dovuto all'assorbimento → cioè perdita energia fotoni

Sandage, nel 1981, dopo una attenta analisi volta ad eliminare il rischio di effetti di selezione, usando un campione di galassie più brillanti degli ammassi di galassie, ha apparentemente confermato la dipendenza $(1+z)^{-4}$, a sostegno dell'idea dell'universo in espansione.

## Intensità specifica e red-shift

Riprendiamo la relazione con il flusso monocromatico per unità di intervallo in frequenza

$$F(\nu_0) = \frac{L\,\varphi[\nu_0(1+z)]}{(1+z)\,4\pi r_1^2 a_0^2}$$

(vedi pag. -67.6-)

Dividendo per $d\Omega$ otteniamo la brillanza monocromatica

$$I(\nu_0) = \frac{F(\nu_0)}{d\Omega} = \frac{L\,\varphi[\nu_0(1+z)]}{4\pi r_1^2 a_0^2 (1+z)} \cdot \frac{4\, a_0^2 r_1^2}{\pi D^2 (1+z)^2}$$

$$\boxed{I(\nu_0) = \frac{L\,\varphi[\nu_0(1+z)]}{\pi^2 D^2 (1+z)^3}} \quad \cdot / \frac{1}{\nu_0^3}$$

e osserviamo che

$$\frac{L\,\varphi[\nu_0(1+z)]}{4\pi \cdot \frac{\pi D^2}{4}}$$

rappresenta l'energia emessa per unità di frequenza, per unità di angolo solido e per unità di area emittente (cioè la brillanza) dalla sorgente alla frequenza $\nu_{em} = \nu_0(1+z)$.

Angolo Solido Sfera

Area sorgente emittente

Superficie sferica di raggio $\sqrt{\frac{\pi D^2}{4}}$

Dato che: $\nu_0^3(1+z)^3 = \nu_{em}^3 \rightarrow \frac{I(\nu_0)}{\nu_0^3} = \frac{L\,\varphi[\overbrace{\nu_0(1+z)}^{\nu_{em}}]}{\pi^2 D^2 \nu_{em}^3}$

frequenza $\nu_0(1+z) = \nu_{emissione}$, all'atto quindi della emissione della radiazione. Quindi ottengo la relazione

(OSS 24)

$$\frac{I(\nu_0)}{\nu_0^3} = \frac{I[\nu_0(1+z)]}{\nu_0^3(1+z)^3} = \frac{I(\nu_{em})}{\nu_{em}^3}$$

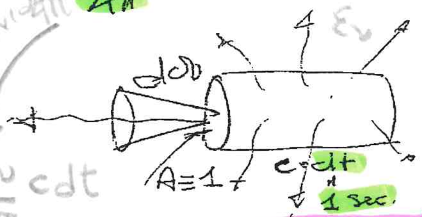
cioè $\boxed{I(\nu)/\nu^3 = \text{costante}}$ (in assenza di emissione e/o assorbimento).

- Consideriamo ora che vi sia una sorgente (diffusa) di radiazione che emette in modo isotropico $\varepsilon_\nu$ erg $s^{-1}$ $cm^{-3}$ $Hz^{-1}$. Per unità di angolo solido avremo

per unità di volume

$\frac{\varepsilon_\nu}{4\pi}$ erg $s^{-1}cm^{-3}Hz^{-1}sterad^{-1}$ in tutte le direzioni

dividendo per




La radiazione che attraversa in $dt=1$ l'areola $A\equiv 1$ sarà quella che, in quella direzione, e con $d\Omega=1$, è contenuta nel elemento di volume $dV$ $A\cdot c\cdot dt = c$

Se integro lungo la linea di vista

$dI_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{4\pi} c\,dt$

Ma questa è l'incremento per unità di tempo dell'intensità specifica ~~della~~ lungo la linea di vista dovuto alla sorgente.

$$\frac{dI_\nu}{dt} = \frac{c\,\varepsilon_\nu}{4\pi} \quad \text{erg } s^{-2}cm^{-2}Hz^{-1}sterad^{-1}$$

Nell'intervallo $dt$ avrò una variazione

$$dI_{\nu_{em}} = \frac{c\,\varepsilon_{\nu_{em}}\,dt}{4\pi}$$

Ricevuta questa radiazione sulla Terra, essa corrisponde ad un

$$dI(\nu_0) = \left(\frac{\nu_0}{\nu_{em}}\right)^3 dI(\nu_{em}) = \frac{c}{4\pi}\frac{\varepsilon[\overset{\nu_{em}}{\nu_0(1+z)}]}{(1+z)^3}dt$$

Se l'emissione avviene tra il tempo cosmico $t_1$ e $t_2$

$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\varepsilon[\nu_0(1+z),t]}{(1+z)^3}dt$$

$$\delta E = \frac{\varepsilon_\nu}{4\pi}\cdot \underbrace{V\,\varepsilon \quad dt\,dA}_{dV}\,d\Omega\,d\nu$$

$$\frac{\delta E}{dA\,d\Omega\,d\nu\,dt} = \frac{c\,\varepsilon_\nu}{4\pi}dt = \delta I_\nu$$

Può essere più comodo, conoscendo la $t(z)$, esprimere $I(\nu_0)$ come

LO5525

$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\varepsilon[\nu_0(1+z), z]}{(1+z)^3}\left|\frac{dt}{dz}\right| dz$$

(vedi pag 88)

$dt = \frac{da}{\dot a} = \frac{da}{aH}$

$a = a_0/(1+z)$

$da = -\frac{a_0}{(1+z)^2}dz$

$dt = -\frac{a_0 dz}{(1+z)^2}\frac{1}{H}\frac{(1+z)}{a_0} = -\frac{dz}{(1+z)H}$

cvd

~~Se ricordiamo la relazione~~

$$\cancel{H(t) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = H_0\frac{a_0}{a}\left[\sum_\alpha \Omega_{0\alpha}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w_\alpha} + 1 - \sum_\alpha \Omega_{0\alpha}\right]^{1/2}}$$

~~essendo~~ $\cancel{a = \frac{a_0}{1+z} \quad da = -\frac{a_0}{(1+z)^2}dz}$

~~ottengo~~

$$\cancel{H_0\, dt = -\frac{dz}{(1+z)^2\left[\sum_\alpha \Omega_{0\alpha}(1+z)^{1+3w_\alpha} + 1 - \sum \Omega_{0\alpha}\right]^{1/2}}}$$

~~da cui ho dt/dz per un dato modello cosmologico. Nel caso in cui $\Omega_{0\Lambda}$ sia trascurabile, ed in cui l'universo sia dominato da materia ($w = 0$), si ha~~

$$\cancel{\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{H_0(1+z^2)\left[\Omega_{0m}(1+z)+1-\Omega_{0m}\right]^{1/2}} = \frac{1}{H_0(1+z)^2\left[1+\Omega_{0m}z\right]^{1/2}}}$$

In questo caso ho: $\Omega_\Lambda \equiv 0$

$$\boxed{I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi H_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\varepsilon[\nu_0(1+z); z]}{(1+z)^5[1+\Omega_0 z]^{1/2}}dz}$$

caso particolare con $\Omega_\Lambda = 0$

Noto lo spettro all'emissione, e la sua eventuale variazione con $z$ (cioè nel tempo), posso calcolare quindi la brillanza aspettata per il fondo cielo alla frequenza $\nu_0$.

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H_0 E(z)}$$

$z < z_{eq}$ $\Omega_R \approx 0$

$$E(z) \cong \left[(1+z)^2(1+\Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda\right]^{1/2}$$

Se $\Omega_\Lambda = 0$ $\quad E(z) \cong (1+z)\sqrt{1+\Omega_M z}$

$$\boxed{I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi H_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\varepsilon[\nu_0(1+z), z]}{(1+z)^4 E(z)}dz}$$

formula generale

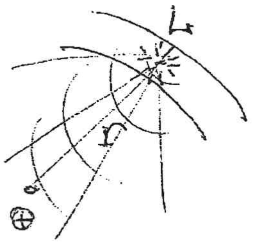
• Nel caso classico, Newtoniano e statico con spazio COS 26 euclideo avremmo sempre

$$dI_{\nu_{em}} = \frac{c\,\varepsilon_{\nu_{em}}}{4\pi}\,dt$$

Ma la $\nu_{em}$ sarà $= \nu_{oss}$ e, se $\varepsilon_\nu = \cos t$ nel tempo, avremmo

$$I_{\nu_0} = \frac{c\,\varepsilon_{\nu_0}}{4\pi}\int_{t_i}^{t_0} dt = \frac{c\,\varepsilon_{\nu_0}}{4\pi}(t_0 - t_i)$$

Se l'universo, anziché iniziare al tempo $t_i$, fosse infinito nel tempo ($t_i \to -\infty$), ne seguirebbe il cosiddetto paradosso di Olbers: perché il cielo è nero di notte? Posso vedere questa affermazione in un altro modo: se suddivido l'universo in gusci sferici centrati sulla Terra, ogni guscio ha un volume $dV = 4\pi r^2 dr$, e gli oggetti nel guscio, di luminosità L, danno sulla Terra un flusso $\propto 1/r^2$. Essendo quindi il numero di sorgenti nel guscio $\propto$ volume di questo, vedo che il contributo di ogni guscio è costante, indipendente da r. Se ho quindi un universo infinito nello spazio, occupato ovunque da galassie con la stessa densità in numero e con luminosità costante nel tempo, ogni guscio dà un contributo, e la somma di infiniti gusci porta ad una brillanza infinita del cielo. Anche se uno considera che, essendo le stelle estese superficialmente, quelle più vicine finiscono con l'eclissare quelle che stanno dietro di esse, mi aspetterei comunque di avere in ogni direzione la brillanza tipica di un disco stellare. Questo ovviamente non accade, da qui il paradosso.




il flusso diminuisce come $1/r^2$, però il numero di stelle cresce com $r^2$

In realtà, anche nella cosmologia "classica", il paradosso potrebbe essere risolto se l'universo avesse una vita finita, nel qual caso, come visto sopra, $I_{\nu_0} = \frac{c\,\varepsilon_{\nu_0}}{4\pi}(t_0 - t_i)$, cioè è finita. Ovviamente, un valore finito si ottiene anche se l'universo è finito nello spazio, come pure se consideriamo che le

Per risolvere paradosso
↓
O universo ha vita finita
o
è finito il suo volume
o
stelle/galassie hanno vita finita

Stelle e le galassie hanno una riserva finita di energia, e quindi brillano per un tempo finito. (oss 2?)

- Per la cosmologia odierna abbiamo sia questo effetto di età finita dell'universo, sia il fattore di red-shift, che rende la $I(\nu_0)$ ancora minore che nel caso statico.

Si è discusso se l'effetto principale sia quello dovuto all'espansione o quello dovuto alla finitezza nel tempo dell'universo. In realtà, contrariamente a quanto solitamente affermato, è l'età finita delle galassie la causa principale dell'oscurità del cielo notturno; il contributo dell'espansione riduce generalmente di un fattore $2 \div 3$ il fondo cielo rispetto al caso senza espansione. NICE

- Vediamo come fare un calcolo nel caso di $I_{bol}$.

– Nel caso "classico" avremo, integrando in $d\nu$,

$$I_{bol}^{cl} = \frac{c\, \varepsilon_{bol}(t_0 - t_*)}{4\pi} \simeq \frac{c\, \varepsilon_{bol}\, t_0}{4\pi} \qquad e\ \Omega_\Lambda \equiv 0$$

– Nel caso "moderno", prendendo per semplicità $\Omega_M \equiv 1$, sarà

$$\int_0^\infty I(\nu_0)\, d\nu_0 = \frac{c}{4\pi H_0} \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty \varepsilon\left[\nu_0(1+z)\right] d\nu_0(1+z)}{(1+z)^{11/2}\ (1+z)}\, dz$$

flusso bol

integro sulle frequenze $\nu_0$, moltiplico e divido per $(1+z)$ e cambio variabile $d\nu_0(1+z)$

$$I_{bol}^{mod} \simeq \frac{c\, \varepsilon_{bol}}{4\pi H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{13/2}} = \frac{2}{11} \cdot \frac{c\, \varepsilon_{bol}}{4\pi H_0}$$

Ma, per $\Omega_M = 1$, abbiamo (EdS)

$$H_0 \int_0^{t_0} dt = -\int_\infty^0 \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} \rightarrow \boxed{H_0 t_0 = 2/3} \qquad \frac{1}{H_0} = \frac{3 t_0}{2}$$

e, sostituendo:

$$\boxed{I_{bol}^{mod} \simeq \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{2}\, \frac{c\, \varepsilon_{bol}\, t_0}{4\pi} \sim 0.3\, I_{bol}^{class}} \qquad \text{c.v.d.}$$

L'analisi monocromatica conferma questo risultato [Vedi, ad es., Wesson Astrophys. Journal 367, 399 (1991)]

$\Omega_M \simeq 1$
$\Omega_R \simeq 0$
$\Omega_\Lambda \simeq 0$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z) H_0 E(z)} \Rightarrow H_0\, dt = -\frac{dz}{(1+z)E(z)} \qquad E(z) \simeq (1+z)^{3/2}$$

$$H_0\, dt = -\frac{dz}{(1+z)(1+z)^{3/2}} = -\frac{dz}{(1+z)^{5/2}}$$