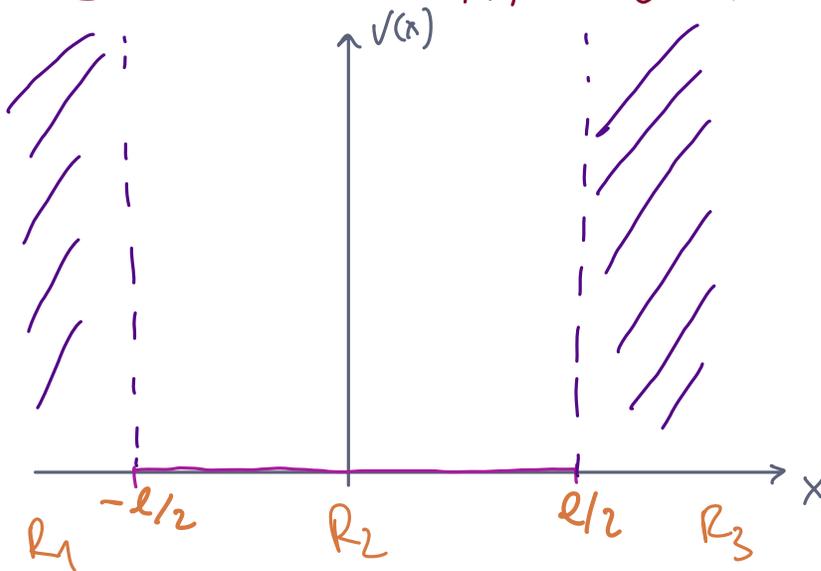


# BUCA RETTANGOLARE INFINITA



Il potenziale ha una DISCONTINUITA' INFINITA in  $x = -l/2$  e  $x = l/2$

↓  
 $\psi_E(x)$  è continua in questi due punti, ma non necessariamente derivabile

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi_E(x)$$

$R_1$ ) Qui l'eq. diventa  $\psi_E'' = \Omega^2 \psi_E(x)$  con  $\Omega \rightarrow \infty$  ( $\Omega$  cost.)  
 $\Rightarrow \psi_E(x) = A e^{\Omega x} + B e^{-\Omega x} \rightarrow B$  dev'essere nullo, altrimenti fuori, esplosa a  $x \rightarrow -\infty$  diventando non-accettabile  $\rightarrow$

$$\rightarrow \psi_E(x) = A e^{\Omega x} \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \psi_E^{(1)}(x) = 0 \quad x \in R_1$$

$R_3$ ) Analogamente a  $R_1$ :  $\psi_E^{(3)}(x) = 0 \quad x \in R_3$

$R_2$ ) L'equazione è  $\psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_E$ . Definiamo  $K \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ . La sol. c'

$$\psi_E^{(2)}(x) = c^+ e^{ikx} + c^- e^{-ikx} \quad x \in R_2.$$

CONDIZIONI DI RACCORDO ( $\psi_E$  continue in  $x = \pm l/2$ ):

$$\left. \begin{aligned} \psi_E^{(2)}(-l/2) &= \psi_E^{(1)}(-l/2) \\ \psi_E^{(2)}(l/2) &= \psi_E^{(3)}(l/2) \end{aligned} \right\} \begin{cases} c^+ e^{-ikl/2} + c^- e^{ikl/2} = 0 \\ c^+ e^{ikl/2} + c^- e^{-ikl/2} = 0 \end{cases}$$

2 eq. (lineari omogenee) in 2 incognite  $c^+, c^-$ .

Sistema lineare omogeneo nelle incognite  $c^+, c^-$ :

$$M \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-ikl/2} & e^{ikl/2} \\ e^{ikl/2} & e^{-ikl/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

ha solut.  $(c^+, c^-) \neq (0, 0)$  solo se la matrice  $M$  ha rango minore di 2 (cioè se  $\det M = 0$ )

$$\det M = e^{-ikl} - e^{ikl} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2ikl} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ikl = 2in\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad \left( \text{vedremo poi che } n \rightarrow -n \text{ non cambia l'autostato} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_n = \frac{n\pi}{l}} \rightsquigarrow \text{ Questa è una condizione sull'Energia } E. \text{ Infatti: } K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{2mEl^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ml^2} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

possibili valori dell'eu.

con  $n \neq 0$

(altrimenti:  $K=0$  e  $\psi_{E=0}^{(2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_l$ )

$$kl = n\pi \Rightarrow e^{ikl} = e^{i\pi n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Risolubiamo ora il sistema lineare, in  $p_n = \frac{n\pi\hbar}{l}$

$$\begin{pmatrix} e^{-ik_n l/2} & e^{ik_n l/2} \\ e^{ik_n l/2} & e^{-ik_n l/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

$$| \quad e^{ik_n l} = e^{i\pi n}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi n/2} & e^{i\pi n/2} \\ e^{i\pi n/2} & e^{-i\pi n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

$\bar{e}$  equivalente

qta riga dipende lin. dalle prima nige

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi n} \\ e^{i\pi n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} \rightarrow e^+ + e^{i\pi n} c^- = 0$$

$$\downarrow$$

$$c^+ + (-1)^n c^- = 0$$

n pari :  $c^- = -c^+$

$$\psi_{2m}(x) = c^+ \left( e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right) = \left( k_n = \frac{n\pi}{l} \right)$$

$$= 2ic^+ \sin(k_n x) = 2ic^+ \sin\left(\frac{2m\pi x}{l}\right) \quad m \neq 0$$

$\uparrow$  DISPARI ( $x \rightarrow -x$ )

n dispari :  $c^- = c^+$

$$\psi_{2m+1}(x) = c^+ \left( e^{ik_m x} + e^{-ik_m x} \right)$$

$$= 2c^+ \cos(k_m x) = 2c^+ \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{l}\right)$$

$\uparrow$  PARI ( $x \rightarrow -x$ )

Calcoliamo valore di  $c^+$  affinché le funtz. siano NORMALIZZATE:

$$1 = \|\psi_{2m}\|^2 = 4|c^+|^2 \int_{-l/2}^{l/2} \sin^2\left(\frac{2m\pi x}{l}\right) dx = 2|c^+|^2 \int_{-l/2}^{l/2} (1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{l}\right)) dx =$$

$$= 2|c^+|^2 \left( l - \frac{l}{4m\pi} \sin\left(\frac{4m\pi x}{l}\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} \right) = 2l|c^+|^2$$

$\Rightarrow c^+ = \frac{-i}{(2l)^{1/2}}$  a meno di una fase arbitraria. Quindi la funtz. normalizzata è:

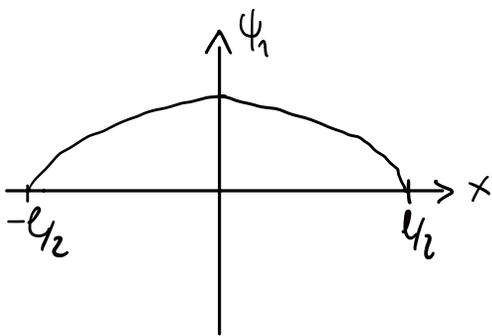
$$\psi_{2m}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2m\pi x}{l}\right)$$

Analogamente, la funzione con  $n=2m+1$  normalizzata è

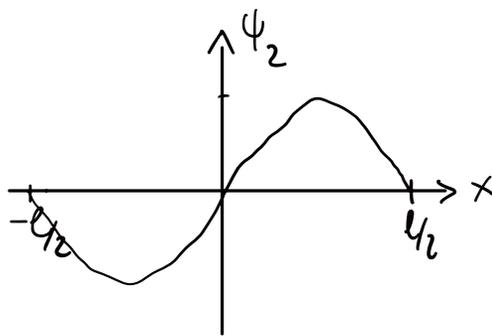
$$\psi_{2m+1}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{l}\right)$$

Esempi

$n=1$



$n=2$



Spettro dell'eu.  $\bar{e}$  DISCRETO :

- Per ogni valore  $E_n$  dell'energia trova **(LIVELLO ENERGETICO  $\bar{e}$  NON-DEGENERE)** una sola autofunz. (autostato)
- Le autofunzioni  $\in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$  possono rappresentare stati del sistema.
- Le autofunzioni sono REALI (e meno di un fattore complesso cost.)
- Le autofunzioni hanno PARITÀ DEFINITA ( $V(-x) = V(x)$ )
- Lo spettro  $\bar{e}$  è limitato inferiormente ( $V(x) \geq 0 \Rightarrow E > 0$ ) il livello energetico di minima energia è

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$$

← AUTOSTATO CORRISPONDENTE è detto STATO FONDAMENTALE

(ma in particolare la particella non può avere en. nulla; questo lo si può ricavare dal principio di indeterminazione di Heisenberg  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ )

in questo problema

$$\Delta x_{\max} = l$$

↓

$$\Delta p_{\min} = \frac{\hbar}{2l}$$

$$\leadsto E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2ml^2}$$

Calcoliamo i valori medi di  $X$  e  $P$  negli autostati

Ricordiamo che  $\psi_m(x)$  ha parità definita, quindi:

$$1) |\psi_m(x)|^2 \text{ è una funz. pari} \Rightarrow \langle X \rangle_{\psi_m} = \int_{-l/2}^{l/2} x |\psi_m(x)|^2 dx = 0$$

$$2) \frac{d\psi_m(x)}{dx} \text{ ha parità opposta a } \psi_m(x) \Rightarrow \psi_m^\dagger \frac{d\psi_m}{dx} \text{ è dispari}$$
$$\Rightarrow \langle P \rangle_{\psi_m} = \int_{-l/2}^{l/2} \psi_m^\dagger \frac{\hbar d\psi}{i dx} dx = 0$$

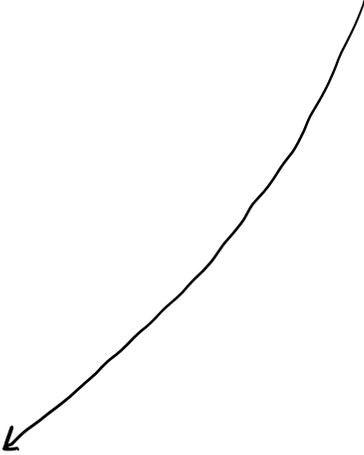
Per quanto riguarda la varianza  $\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle_{\psi} - \langle X \rangle_{\psi}^2}$ , ci serve

calcolare integrali del tipo  $\int x^2 \sin^2(\frac{\alpha x}{2})$  e  $\int x^2 \cos^2(\frac{\alpha x}{2})$ .

In fatti:

$$\langle X^2 \rangle_{\psi_m} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 |\psi_m(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \left( \begin{array}{l} \sin^2\left(\frac{2m\pi x}{l}\right) \\ \cos^2\left(\frac{(2m+1)\pi x}{l}\right) \end{array} \right) dx$$

$\swarrow m = 2m$   
 $\nwarrow m = 2m+1$



$$\frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{\cos^2 \alpha x}{2} dx = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 (1 + \cos \alpha x) dx = \frac{1}{l} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} + \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cos \alpha x dx$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cos \alpha x dx = \frac{d}{d\alpha} \int_{-l/2}^{l/2} x \sin \alpha x dx = -\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{-l/2}^{l/2} \cos \alpha x dx =$$

$$= -\frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_{-l/2}^{l/2} \right) = -\frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\alpha l}{2} \right) =$$

$$= -\frac{d}{d\alpha} \left( -\frac{2}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha l}{2} + \frac{l}{\alpha} \cos \frac{\alpha l}{2} \right) =$$

$$= -\frac{4}{\alpha^3} \sin \frac{\alpha l}{2} + 2 \frac{l}{\alpha^2} \cos \frac{\alpha l}{2} + \frac{l^2}{2\alpha} \sin \frac{\alpha l}{2}$$

$$= \frac{l^2}{12} + \left( \left( \frac{l}{2\alpha} - \frac{4}{\alpha^3} \right) \sin \frac{\alpha l}{2} + \frac{2}{\alpha^2} \cos \frac{\alpha l}{2} \right)$$

$$\psi_{2m} = \left( \frac{2}{l} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{4m\pi x}{2l} \right) \rightarrow \alpha = \frac{4m\pi}{l} \rightarrow \frac{\alpha l}{2} = 2m\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\alpha l}{2} = 0 \\ \cos \frac{\alpha l}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\psi_{2m+1} = \left( \frac{2}{l} \right)^{1/2} \sin \left( \frac{2(2m+1)\pi x}{2l} \right) \rightarrow \alpha = \frac{2(2m+1)\pi}{l} \rightarrow \frac{\alpha l}{2} = (2m+1)\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\alpha l}{2} = 0 \\ \cos \frac{\alpha l}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\langle x^2 \rangle_{\psi_{2m}} = \frac{l^2}{12} - \frac{2l^2}{(2m\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle_{\psi_m} = l^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2m^2\pi^2} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle_{\psi_{2m+1}} = \frac{l^2}{12} + \left( -\frac{2l^2}{(2m\pi)^2} \right)$$

$$\Delta x_{\psi_m} = l \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2m^2\pi^2}}$$

Per quanto riguarda la varianza di  $P$  devo calcolare integrali del tipo

$$\left(\frac{2}{l}\right) \int_{-l/2}^{l/2} \psi_m(x)^4 \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2 \psi_m(x)}{dx^2} = -\frac{2\hbar^2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right) \frac{\text{sen}^2 \frac{\alpha x}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha x}{2}} dx$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2l} \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (1 + \cos \alpha x) dx =$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4l} \left( l + \frac{1}{\alpha} \text{sen} \alpha x \Big|_{-l/2}^{l/2} \right) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4} + \frac{\hbar^2 \alpha}{2l} \underset{=0}{\uparrow} \text{sen} \frac{\alpha l}{2}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \frac{4m^2 \pi^2}{l^2} = \left(\frac{\hbar}{l}\right)^2 m^2 \pi^2$$

$$\Rightarrow \Delta P_{\psi_m} = \frac{n\pi\hbar}{l}$$

Si può controllare che

$$\Delta X_{\psi_m} \Delta P_{\psi_m} > \frac{\hbar}{2}$$

← Soddisfa il principio di indeterminazione di Heisenberg ( $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ )

Oppure possiamo calcolare la probabilità che la particella si trovi a destra, cioè  $x \in [0, l/2]$

Facciamo  $\psi_{2m} = \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2m\pi x}{l}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(x \in [0, l/2]) &= \int_0^{l/2} \left(\frac{2}{l}\right) \sin^2\left(\frac{2m\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/2} (1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{l}\right)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \leftarrow \text{Questo risultato si poteva indovinare} \\ &\quad \text{notando che } |\psi_{2m}(x)|^2 \text{ è una funz. pari.} \end{aligned}$$

La prob. che la particella si trovi in un generico intervallo  $[x_1, x_2]$  c', nello STATO FONDAM. ( $m=1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Prob}(x \in [x_1, x_2]) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2}{l}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right) dx = \\ &4 \text{ stato fondam.} \end{aligned}$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{l} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x_2}{l}\right) - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{l}\right)$$

Se per esempio scegliamo l'intervallo  $[0, \frac{l}{4}]$ :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{l}{4} \rightarrow \text{Prob} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

# MISURE di ENERGIA in AUTOSTATI di $\hat{H}$

Dato un sistema come qlo appena studiato, con  $\hat{H}$  a spettro discreto, autovalori  $E_n$ , e relativi autostati  $\psi_n$ , possiamo calcolare la distribuzione di misure di Energia nello stato  $\psi_n$ .

- Valore medio di  $H$ :

$$\langle H \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H} \psi_n) = (\psi_n, E_n \psi_n) = E_n \|\psi_n\|^2 = E_n$$

$\psi_n$  normalizzati.

- Valore medio di  $H^2$ :

$$\langle H^2 \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H}^2 \psi_n) = (\psi_n, E_n \hat{H} \psi_n) = (\psi_n, E_n^2 \psi_n) = E_n^2$$

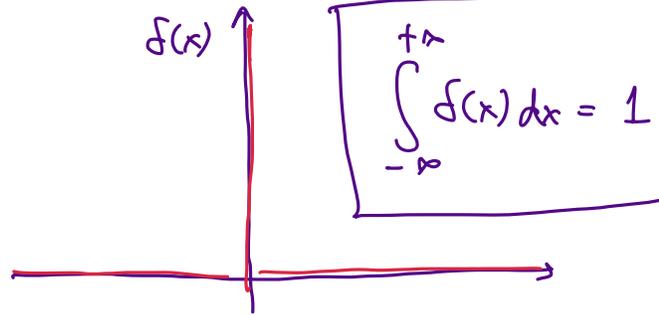
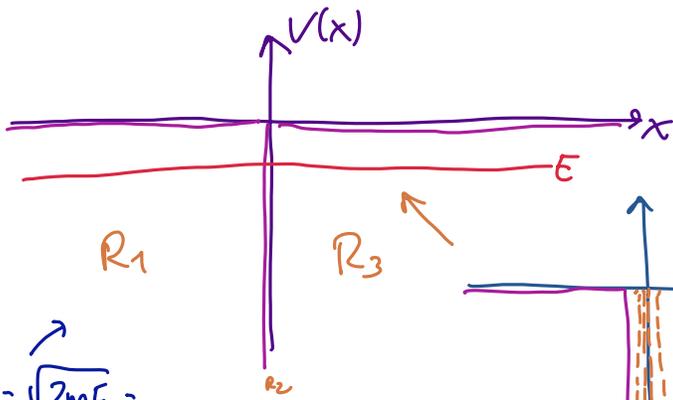
- Varianza:

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E_n^2 - (E_n)^2} = 0$$

$\Rightarrow$  Se il sistema è nell'autostato  $\psi_n$  di  $\hat{H}$ , una misura di  $H$  darà con PROBABILITÀ 1 il risultato  $E_n$ .

# Extra: POTENZIALE A DELTA DI DIRAC

$$V(x) = -\alpha \delta(x) \quad \alpha > 0$$



$$p_1 = \sqrt{2mE} = i\sqrt{2m|E|} = iq_1 = p_3$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = -\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx = -lV_1$$

$E < 0$

$$\psi_E^{(1)} = c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar} + c_1^- e^{q_1 x/\hbar} \quad x < 0$$

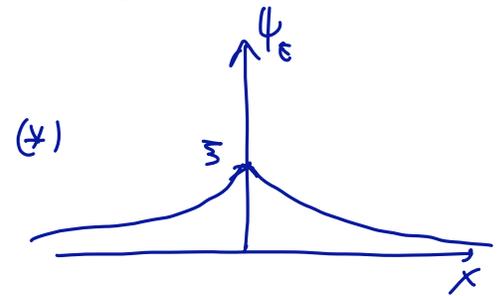
$$\psi_E^{(3)} = c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} + c_3^- e^{q_1 x/\hbar} \quad x > 0$$

CONDIZ. DI RACCORDO: continuità di  $\psi_E$

$$\psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(3)}(0) \rightarrow c_1^- = c_3^+$$

def.  $\sum$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x > 0 \end{cases}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-e}^e \psi'' + \int_{-e}^e V\psi = E \int_{-e}^e \psi \quad E \rightarrow 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\psi'(e) - \psi'(-e)] = -\int_{-e}^e V\psi = \alpha \int_{-e}^e \delta(x) \psi(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \psi(x) dx = \alpha \psi(0)$$

$$\Rightarrow \delta \psi \Big|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

Imponiamo queste condiz. alla soluzione trovata (A1).

$$\psi'_E = \begin{cases} \frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{q_1 x / \hbar} & x < 0 \\ -\frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{-q_1 x / \hbar} & x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta \psi'_E \Big|_{x=0} = \frac{2q_1 \xi}{\hbar} \quad \Leftarrow \text{derivata} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot \overset{\psi(0)}{\xi}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m\alpha}{\hbar}$$

$$\Rightarrow q_1 = \sqrt{2m|E|}$$

$$\boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$$

$\Rightarrow$  c'è un solo autovalue dell'energia che risolve l'eq. di Sch. ( $\hbar E < 0$ )

Normalizziamo la funzione d'onda (autostato  $\psi_E$  relativo a  $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ )

$$\psi_E = \begin{cases} \xi e^{q_1 x / \hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x / \hbar} & x > 0 \end{cases}$$

(autofunzione **PARI**  
e **REALE**)

Cerchiamo  $\xi$  t.c.  $\|\psi_E\|^2 = 1$

$$\|\psi_E\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2|\xi|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2q_1 x / \hbar} dx =$$

$$= 2|\xi|^2 \left[ -\frac{\hbar}{2q_1} e^{-2q_1 x / \hbar} \right]_0^{+\infty} = \frac{\hbar}{q_1} |\xi|^2 = \frac{\hbar^2}{m\alpha} |\xi|^2$$

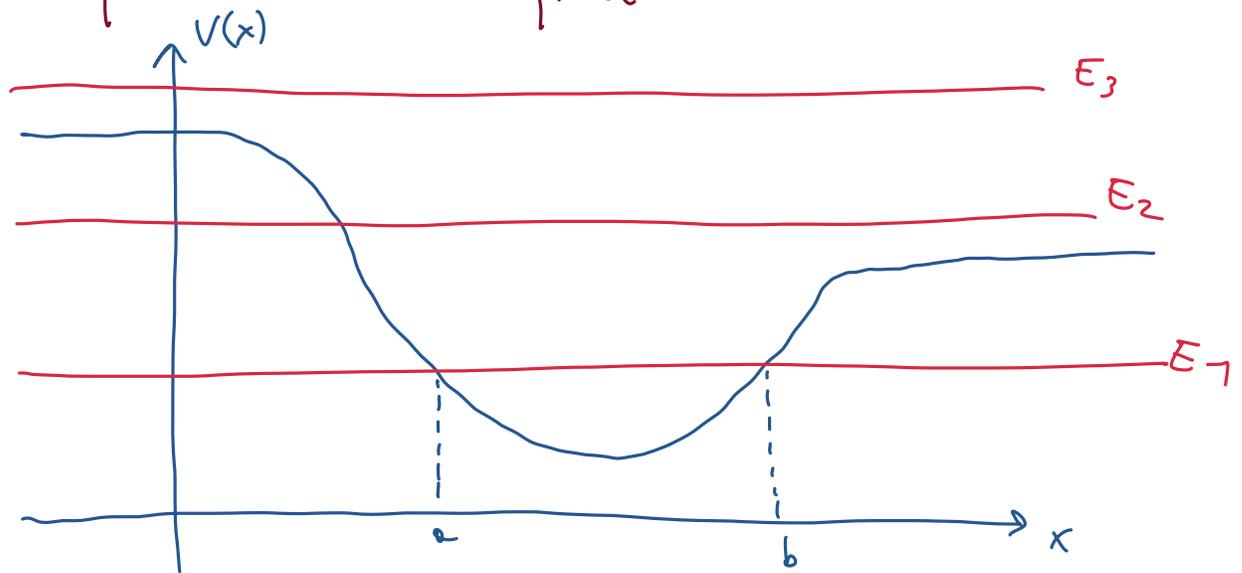
$$q_1 = \sqrt{2mE} = \frac{m\alpha}{\hbar}$$

$$= 1 \quad \text{se}$$

$$|\xi|^2 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

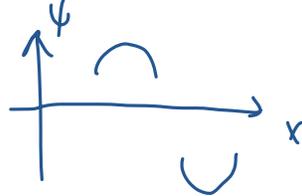
$$\text{cioè } \xi = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \quad (\text{a meno d'una fase})$$

Extra: Studio qualitativo dell'eq. di Sch. 1dim.

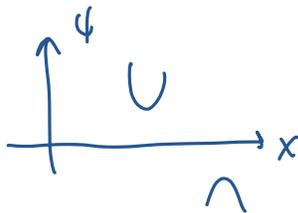


$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi$$

•  $E > V$



•  $E < V$



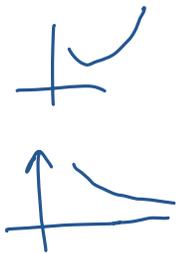
Con  $E_1$ )  $x < a$   $x > b$



$\psi(x)$  o si allontana ~~indetermina~~ dall'asse x

o vi fende asintoticamente a zero

(perché  $\psi'' \rightarrow 0$ )



$\Rightarrow$  due condiz. di accettaz. su solut. di eq. diff.

del 2° ord.  $\Rightarrow$  CONDIZIONE SULL'ENERGIA

$\leadsto$  spettro discreto e stati legati

Caso  $E_2$ ) condiz. di limitatezza e simmetria  
→ SPETTRO CONTINUO ma NON-DEG.

Caso  $E_3$ ) SPETTRO CONTINUO DEGENERATO (in ogni valore di  $E$   
ci sono due solut. indip. dell'eq. di Sch.),