

# PARTICELLA QUANTISTICA IN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

Ricordiamo :

Dato un campo magnetico  $\vec{B}$ , esso può essere espresso come il rotore del potenziale vettore  $\vec{A}$  :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

In meccanica classica la Lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

Le coord.  $\vec{x} = (x, y, z)$  sono le coord. cartesiane delle particelle.

I momenti coniugati sono

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

$$\frac{p_h - eA_h}{m}$$

L'Hamiltoniana è

$$H(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x}))^2}{2m}$$

Consideriamo il caso con  $B=0$ .

$$\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{A} = 0 \xRightarrow{\text{localm.}} \bar{A} = \bar{\nabla} \chi$$

Classicamente questo vuol dire che la Lagrangiana è

$$L = \frac{m \dot{\vec{x}}^2}{2} + e \underbrace{\dot{\vec{x}} \cdot \bar{\nabla} \chi}_{= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \dot{x}_i}$$

Qta è un termine di "derivate totali"

che classicamente non influisce sulla dinamica

(che infatti dovrebbe la stessa in tutti gli  $\bar{A}$

t.c.  $\bar{B}=0$ )

↓  
Classicamente questo è vero sia  
per  $Q = \mathbb{R}^3$  che per  $Q = T^2 \times \mathbb{R}$ !

Vediamo cosa succede in Meccanica Quantistica.

Siccome  $\bar{A} = \bar{\nabla} \chi$ , vedo che localmente  $\bar{A}$  è  
gauge equivalente ad  $\bar{A}' = 0$ :  $\bar{A}$  e  $\bar{A}'$  sono  
connessi da transf. di gauge con  $\alpha = -\chi$ .

Qui sorge una sottigliezza: noi stiamo richiedendo  
che  $\bar{B}=0$ , cioè che  $\bar{A}$  sia t.c.  $\bar{\nabla} \times \bar{A} = 0$ .

Qto ci dice che SE  $Q$  è uno spazio SEMPLICEM.  
CONNESSO ( $\sim$  tutte le curve chiuse sono contrattibili)  
allora  $\exists \chi$  t.c.  $\bar{A} = \bar{\nabla} \chi$  globalmente.

Se lo spazio  $Q$  non è sempl. connesso, allora è ancora vero che per ogni aperto  $U_\alpha$  sempl. connesso di  $Q$   $\exists \chi_\alpha$  def. su  $U_\alpha$  t.c.  $\bar{A}|_{U_\alpha} = \bar{\nabla} \chi_\alpha$ , TUTTAVIA NON esiste in genere nessun  $\chi$  def. su tutto  $Q$  t.c.  $\chi|_{U_\alpha} = \chi_\alpha$ .

Affinchè  $\bar{A}$  e  $\bar{A}'$  siano GAUGE EQUIVALENTI, deve esistere localm. una  $\alpha$  t.c.  $\bar{A}' - \bar{A} = \bar{\nabla} \alpha$ .

$\alpha$  non deve necessariamente essere globalm. definite, ma  $U \cdot e^{i \frac{e}{\hbar} \alpha(x)}$  lo deve essere!

(Qto per assicurare che la funt. d'onda  $\psi'(x)$  sia una buona funzione su  $Q$ .)

Nel caso  $\bar{B}=0$ , non è detto che esista sempre un  $U = e^{i \frac{e}{\hbar} \alpha(x)}$  ben definito t.c.  $\bar{A} = \bar{\nabla} \alpha$ . Se qto fosse vero, allora  $\bar{A}$  sarebbe gauge equiv. a  $\bar{A}'=0$ .

Come abbiamo detto sopra, se  $Q$  è sempl. connesso qto è sempre vero: tutti gli  $\bar{A}$  t.c.  $\bar{B}=0$  sono gauge equivalenti  $\rightarrow$  la situazione è analoga a qta classica:  $\bar{B}=0 \Rightarrow$  una certa dinamica che è la stessa per ogni  $\bar{A}$  t.c.  $\bar{\nabla} \times \bar{A} = 0$ .

Se invece  $Q$  non è sempl. conn. bisogna fare attenti. come ora discuteremo per la particella su un cerchio.

## Particelle quantistiche su $Q = S^1$

Consideriamo una particella quantistica che si può muovere su un cerchio  $S^1$  (sistema 1d'im.) di raggio  $R$ . Essa ha carica  $e$  e può esserci un pot. vettore  $\bar{A} = \bar{\nabla} \chi$  (localm.) t.c.  $\bar{B} = 0$ . In coord. cartesiane

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + e \dot{\vec{r}} \cdot \bar{A} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$$

Imponiamo il vincolo, che in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -R \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = R \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo  $\chi(\varphi) \equiv \chi(F(\varphi))$  (con abuso di notazione)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= R^2 \dot{\varphi}^2 \\ \Rightarrow \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i} &= \sum_i \dot{\varphi} \frac{dx_i}{d\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = \dot{\varphi} \chi'(\varphi) \end{aligned}$$

con qta parametrizzaz.,  
 $\theta$  è dimensionless!

Facciamo la semplice scelta  $\chi(\varphi) = \frac{\hbar \theta}{e 2\pi} \varphi$  Allora la Lagr. è

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\hbar \theta}{2\pi} \dot{\varphi}$$

Diverse scelte di  $\theta$  corrispondono a diverse scelte di  $\bar{A}$  t.c.  $\bar{B} = 0$ .

Nella teoria classica, qta Lagrangiana genera la stesse dinamiche di  $L' = \frac{m R^2}{2} \dot{\varphi}^2$ .

Il momento coniugato a  $\varphi$  è

$$P_\varphi = mR^2 \dot{\varphi} + \frac{\hbar\theta}{2\pi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi})}{mR^2}$$

L'Hamiltoniana corrispondente è

$$H_\theta = \frac{(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi})^2}{2mR^2}$$

-  $\varphi$  e  $P_\varphi$  sono variabili canonicamente coniugate e diventano operatori:  $\hat{\varphi} \psi(\varphi) = \varphi \psi(\varphi)$   $\hat{P}_\varphi \psi(\varphi) = \frac{\hbar}{i} \psi'(\varphi)$

Calcoliamo lo spettro di  $H_\theta$ :

- Usiamo il fatto che conosciamo le autof. di  $\hat{P}_\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\varphi}$

$$\hat{P}_\varphi \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \hbar m \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

necessario affinché le autofun. siano periodiche, cioè ben def. sul cerchio.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} e^{im\varphi} d\varphi = \delta_{nm}$$

(come nelle buche di pot. infinite, le autof. di  $P_\varphi$  sono dei buoni stati quantistici  $\in L^2$ )

- Quindi:

$$\hat{H}_\theta \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2mR^2} \left( \hat{P}_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi} \right)^2 \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( m - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow E_m^\theta = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( m - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Si vede subito a occhio che per  $\Theta$  diversi ho diversi spettri, quindi dinamiche diverse.
- Se  $\Theta \rightarrow \Theta + 2\pi$ , lo SPETTRO RIMANE INVARIATO.  
Qto avviene in modo non-triviale, infatti  
 $\Theta \rightarrow \Theta + 2\pi$  shifta efficacemente  $n \rightarrow n-1$ .
- Se  $\Theta = 0$ 
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} n^2$
  - quando  $n \neq 0$  gli autovalori sono degeneri (deg=2),  
perché  $e^{i|m|\varphi}$  e  $e^{-i|m|\varphi}$  sono indip.
  - il LIVELLO di MIN. ENERGIA ( $n=0$ ) invece è non deg.
- Se  $\Theta = \pi$ 

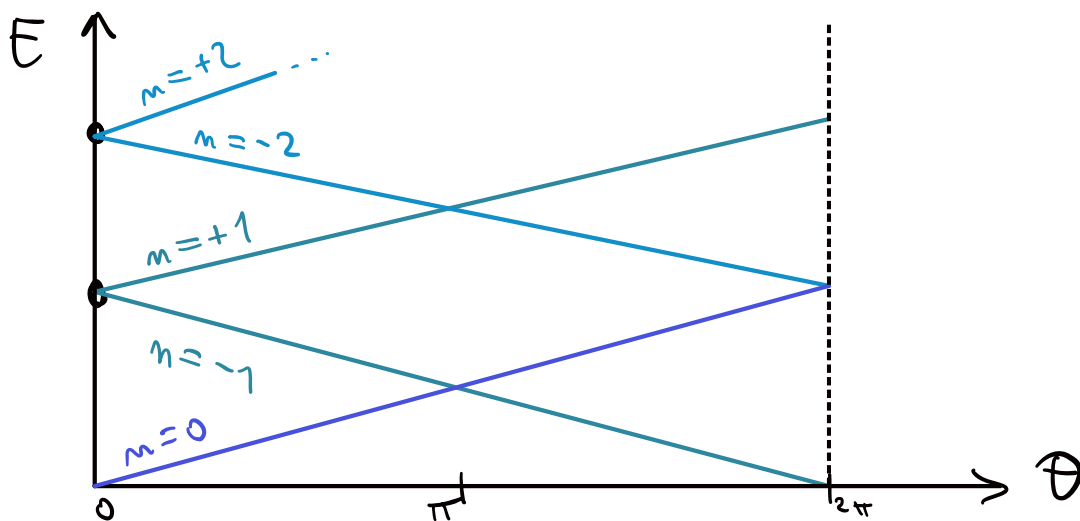
$(m+1)^2 \quad \left(-m-1 + \frac{1}{2}\right)^2$

  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$
  - i livelli ENERGETICI sono tutti degeneri (deg=2)  
con autofunz.  $e^{i|m| x/\kappa}$  e  $e^{-i|m+1| x/\kappa}$

• Se  $\Theta \neq 0, \pi$   $0 < \Theta < 2\pi$

-  $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n + \frac{\Theta}{2\pi} \right)^2$

- i livelli energetici sono tutti non-degeneri



Abbiamo visto che per  $\Theta$  diversi, otteniamo una dinamica diversa (diverso spettro dell'Energia)

→ cioè per  $Q = S^1$  il termine di derivata totale influisce sulla dinamica del sistema (a differenza di quanto accade nella teoria classica).