

Esercizio 1

Considera la teoria di Yukawa con azione “bare”

$$S = \int d^4x \left[i\bar{\psi}_B \not{\partial} \psi_B - M_B \bar{\psi}_B \psi_B + \frac{1}{2} (\partial \phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2} \phi_B^2 - y_B \phi_B \bar{\psi}_B \psi_B - \frac{\lambda_B}{4!} \phi_B^4 \right]. \quad (1)$$

Riscrivila in funzione delle variabili rinormalizzate sostituendo $\psi_B = \sqrt{Z_\psi} \psi$, $\phi_B = \sqrt{Z_\phi} \phi$, $M_B = Z_M M$, $m_B^2 = Z_m^2 m^2$, $y_B = Z_y y$ e $\lambda_B = Z_\lambda \lambda$. Poi poni $Z = 1 + \delta Z$ ed espandi al prim'ordine in δZ , separando l'azione rinormalizzata dai controtermini. Nelle note è presentato il calcolo di δZ_ϕ e $\delta Z_m^2 m^2$ (vedi Lezione 19-20-21), lo scopo dell'esercizio è completare la rinormalizzazione a un loop. Svolgi l'esercizio usando dimreg come regolatore, e $\overline{\text{MS}}$ come schema di rinormalizzazione.

- (i) Calcola il contributo a un loop alla due punti 1PI del campo di Dirac, imponi che la due punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini e quindi calcola δZ_ψ e $\delta Z_M M$.
- (ii) Calcola il contributo a un loop alla tre punti 1PI $\langle \phi \bar{\psi} \psi \rangle$. Per semplificare il calcolo, metti a zero il momento su tutte le zampe esterne. Imponi che la tre punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini, e quindi (usando che conosci già δZ_ϕ e δZ_ψ) calcola $\delta Z_y y$.
- (iii) Calcola il contributo a un loop alla quattro punti 1PI $\langle \phi \phi \phi \phi \rangle$. Nota che una parte di questa 4 punti dipende solo da λ ed è identica a quella della teoria $\lambda \phi^4$ calcolata in classe, per cui puoi riutilizzare quel risultato. Nota che però c'è anche un contributo addizionale che dipende solo da y . Calcolalo mettendo a zero il momento sulle zampe esterne. Imponi che la quattro punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini, e quindi (usando che conosci già δZ_ϕ) calcola $\delta Z_\lambda \lambda$. Nota quindi che $\delta Z_\lambda \lambda \neq 0$ anche per $\lambda = 0$.

Esercizio 2

Considera la QED scalare con azione

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu z)(D^\mu z)^* - m^2 z^* z \right], \quad (2)$$

dove $D_\mu z = (\partial_\mu - ieA_\mu)z$, $(D_\mu z)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)z^*$. Calcola la correzione a un loop alla due punti 1PI del fotone

$$\langle A_\mu(q) A_\nu(-q) \rangle|_{1\text{PI}} \equiv i\Pi_{\mu\nu}(q). \quad (3)$$

Per regolare la divergenza UV, usa prima dimreg e poi un cutoff Λ . Nota che usando dimreg la correzione è trasversa, ovvero

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2), \quad (4)$$

come richiesto dall'invarianza di gauge, mentre questa proprietà non è soddisfatta usando il cutoff. Come spieghi questa differenza?