Esercizio 2 - ii

introduciamo il vettore delle variabili stocastiche

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$ quindi: $z_1 = x$, $z_2 = \theta$

il vettore delle forze

$$\underline{F} = -\Gamma \begin{pmatrix} U' \\ U'^2 \end{pmatrix}$$

ed il vettore delle forze stocastiche

$$\underline{\eta}_z = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ U' \eta(t) \end{pmatrix}$$ con $\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2 k_B T \delta(t-t')$

introducendo la matrice

$$\underline{B} = \sqrt{\Gamma k_B T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U' & 0 \end{pmatrix}$$

nota il 2 qui

ed il rumore $\xi(t)$: $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2 \delta(t-t')$

ed il vettore $\underline{\xi}_z = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

notiamo che

$$\underline{\eta}_z = \underline{B} \cdot \underline{\xi}_z$$

allora possiamo scrivere le equazioni di Langevin in forma vettoriale

$$\dot{\underline{z}} = \underline{F} + \underline{B} \cdot \underline{\xi}_z$$

Seguendo il Gardiner, possiamo scrivere l'equazione di F.P. nel formalismo di Stratonovich

$$\partial_t P(\underline{z},t) = -\frac{\partial}{\partial \underline{z}} \cdot \left[\underline{F}\, P(\underline{z},t)\right] + \sum_{i,k,j} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(B_{ik} \frac{\partial}{\partial z_j} B_{jk} P\right)$$

il termine di diffusione può essere scritto come

$$\underbrace{\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\sum_j B_{ik} B_{jk} \frac{\partial}{\partial z_j} P\right)}_{(a)} + \underbrace{\sum_{ik} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(B_{ik} P \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} B_{jk}\right)}_{(b)}$$

a) $\sum_k B_{ik} B_{jk} = D_{ij}$

dove $\underline{D}$ è la matrice dei coefficienti di diffusione che ho introdotto durante la discussione dell'esercizio (ho usato la lettera B in classe)

$$\underline{D} = \Gamma k_B T \begin{pmatrix} 1 & U' \\ U' & U'^2 \end{pmatrix} ; \quad \langle \eta_{z_i}(t)\, \eta_{z_j}(t') \rangle = 2 D_{ij} \delta_{ij} \delta(t-t')$$

infatti dalla prima pagina

$\eta_{z,i} = \sum_j B_{ij}\, \xi_{z,j}$ (sto assumendo che il vettore $\underline{\xi}_z$ abbia tutte le componenti $\underline{\xi}_z = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$)

$$\langle \eta_{z,i}^{(t)}\, \eta_{z,l}^{(t')} \rangle = \sum_j B_{ij} \sum_k B_{lk} \langle \xi_{z,j}^{(t)}\, \xi_{z,k}^{(t')} \rangle$$

$$= 2\delta(t-t') \sum_{j,k} B_{ij}\, B_{lk}\, \delta_{jk}$$

$$= 2\delta(t-t') \sum_k B_{ik} B_{lk}$$

$$= 2\delta(t-t')\, D_{il}$$

(b)

il termine (b) è sempre uguale a $\emptyset$ per il caso specifico considerato qui la matrice $\underline{B}$ è quella di pagina 1

$k=1 \qquad \frac{\partial}{\partial z_j} B_{jk} = 0 \qquad$ per $j=1,2$

$k=2 \qquad B_{jk} = 0 \qquad$ per $j=1,2$

quindi il termine diffusivo diventa

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} P(\underline{z},t)$$

che è quello discusso in classe

l'esercizio va poi risolto introducendo la funzione generatrice dei momenti di Q

$$\varphi(x,\lambda,t) = \int dQ\, e^{\lambda Q} \phi(x,Q,t)$$

si deve poi trovare la $\varphi(x,\lambda,t)$ che soddisfa l'equazione di F.P. e le condizioni iniziali, e infine bisogna prendere il limite $t \to \infty$ ed integrare su x

$$\Psi(\lambda, t\to\infty) = \int dx\, \varphi(x,\lambda,t\to\infty)$$

$$= \int dQ\, e^{\lambda Q} P(Q, t\to\infty)$$

con $P(Q,t) = \int dx\, \phi(x,Q,t)$