Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2024-2025, Terzo appello invernale

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di **S. CUCCAGNA**

ESERCIZIO N. 1.

• (4 punti) Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \log\left(\frac{4+x^2}{2+x^2}\right)-2}{e^{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}-1-\tan\left(\frac{2}{x}\right)}$

$$\text{Den} = 1 - \sin\left(\frac{2}{x}\right) + o\left(\sin\frac{2}{x}\right) - 1 - \tan\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right) - 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$= -\frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Num} = x^2 \lg\left(\frac{1+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right) - 2 = x^2 \lg\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - x^2 \lg\left(1+\frac{2}{x^2}\right) - 2 = x^2\left(\cancel{\frac{4}{x^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
$$- x^2\left(\cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - \cancel{2} = \frac{1}{x^2}(-8+2) + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{il limite} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{4}{x}}{-\frac{6}{x^2}} = 0$$

• (2 punti) si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{e^{t^3}}{\arcsin(t)} dt$;

Abbiamo $\arcsin t = t(1+o(1))$, $e^{t^3} = 1 + o(1)$, quindi

$$\lim_{x\to0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{1+o(1)}{t} dt = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} dt}_{\lg(\frac{3}{2})} + \underbrace{\lim_{x\to0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{o(1)}{t} dt}_{0} = \lg\left(\frac{3}{2}\right)$$

• (2 punti) si calcoli $f''(x)$ per $f(x) := \int_0^x dy \int_{y^2}^{\log|y^3-1|} \arctan\left(1+t^2\right) dt.$

$$f'(x) = \int_{x^2}^{\lg|x^3-1|} \arctan(1+t^2)\, dt$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3-1} 3x^2 \arctan\left(1+\lg^2|x^3-1|\right) - 2x \arctan\left(1+x^4\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{2x} - 2e^{x} + 3\right)$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; Siccome $u^2 - 2u + 3$ ha discriminante $4 - 12 < 0$ segue che dominio $= \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \lg\left(e^{2x}(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x})\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x + \lg(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x})\right)$

$= +\infty + 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lg(0 + 3) = \lg 3$

- si calcoli $f'(x)$ e si trovi il numero dei punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

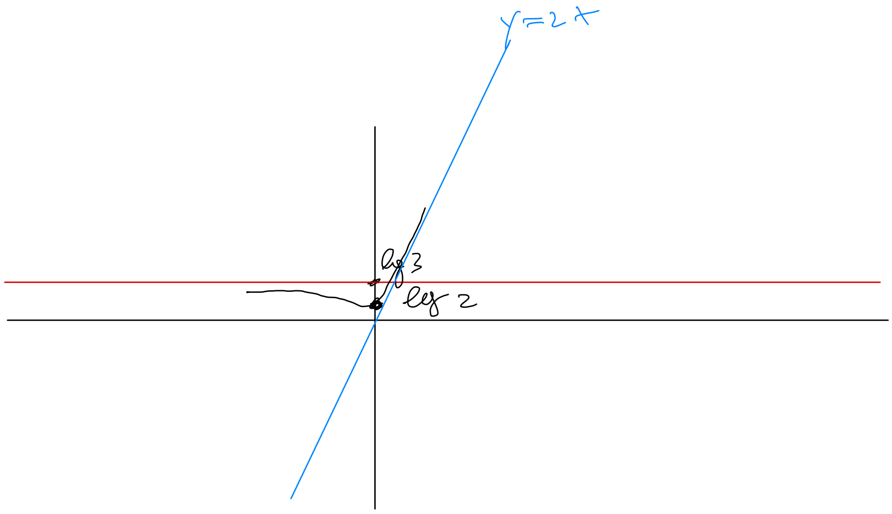
$f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 3}(e^x - 1) = 0$ per $x = 0$. Siccome $f'(x) < 0$ per $x < 0$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$ segue che $x = 0$ è il punto di minimo assoluto

- si stabilisca se vi sono rette asintotiche; Ovviamente $y = \lg 3$ asintoto per $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \lg(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x})}{x} = 2$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \lg(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}) = 0$ quindi $y = 2x$ retta asintotica a $+\infty$

- si tracci il grafico .



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx$

$f(x)$

$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$. $C = f(x)(x+1)\Big|_{x=-1} = \frac{1}{x^2+1}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}$

Da $\lim_{x\to+\infty} x f(x) = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{-\frac12(x^2+x)+B(x+1)+\frac12(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$

Da $B + \frac12 = 1$ segue $B = \frac12$

Allora $\int_0^x \left(\frac{-\frac12 t}{t^2+1} + \frac{\frac12}{t^2+1} + \frac{\frac12}{t+1}\right)dt = -\frac14 \lg(x^2+1) + \frac12 \lg(x+1) + \frac12 \arctan x$

$= \frac12 \lg \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac12 \arctan x \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}$

- si calcoli le primitive $\int x^2 \arctan(x)dx$;

$\int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \arctan x = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac13 \int \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac13 \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} + \frac13 \int \frac{x}{x^2+1}$

$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac13 \int x + \frac16 \int \frac{2x}{x^2+1} =$

$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac16 \lg(x^2+1) + C$

- si stabilisca se $2^{1/x}$ e' integrabile in $(0,1]$; E' [illegible] integrabile in

$\lim_{x\to0^+} \frac{2^{\frac1x}}{\frac1x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac1x \lg 2}}{\frac1x} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Con l'Hôpital

$= \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\lg 2 \; e^{\frac1x \lg 2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} 2^{\frac1x} = +\infty$. $\quad \frac1x \notin L(0,1] \Rightarrow 2^{\frac1x} \notin L(0,1]$

per confronto asintotico

- si stabilisca se $2^{1/x}$ e' integrabile in $[-1,0)$.

Ho $\lim_{x\to0^-} 2^{\frac1x} = 2^{-\infty} = 0$. Se scrivo $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac1x} & \text{per } x<0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$

ottengo che f è integrabile per Riemann - Darboux in $[-1,0] \Rightarrow 2^{\frac1x}$ è integrabile in senso generalizzato in $[-1,0)$.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $f(x) = \arcsin(x)$.

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-t^2)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}(-t^2)^3 + o(t^6)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \underbrace{x + \frac{x^3}{6} + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^5}{5}}_{\text{questo è il polinomio cercato}} + o(x^6)$$

$$\text{dove } \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P_6(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $\overbrace{y'' + 3y' + y}^{L[y]} = x^2$ con dati iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

Equazione caratteristica $\quad p(r) = r^2 + 3r + 1 = 0 \qquad r_\pm = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$y_h = a\, e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + b\, e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}$$

$p(0) \neq 0$. Cerchiamo $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$L[y] = 2\alpha + 3(2\alpha x + \beta) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2$$
$$= \alpha x^2 + (6\alpha + \beta)x + 2\alpha + 3\beta + \gamma = x^2$$

$\alpha = 1$

$6\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -6$

$\gamma + 2\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow \gamma = 18 - 2 = 16$

$y_p = x^2 - 6x + 16$

$$y = a\, e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + b\, e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + x^2 - 6x + 16$$

$0 = y(0) = a + b + 16$

$y'(0) = \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a - \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)b - 6 = 2$

$$\begin{cases} a + b = -16 \\ \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a - \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)b = 8 \end{cases} \quad \text{ecc.}$$