

Prova scritta di Complementi di Algebra
4 luglio 2024

Esercizio 1. Sia G un gruppo e si consideri $\text{Aut}(G)$ il gruppo degli automorfismi di G .

1. Sia $g \in G$ e si definisca $\gamma_g : G \rightarrow G$ tale che $\gamma_g(h) = g^{-1}hg$. Si dimostri che γ_g è un automorfismo di G .
2. Si definisca $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ tale che $\phi(g) = \gamma_g$. Si dimostri che ϕ è un omomorfismo di gruppi.
3. Si identifichi il nucleo di ϕ .

Esercizio 2. Sia G un gruppo con ordine pari a 70.

1. Si verifichi che G contiene un sottogruppo normale di ordine 7 e uno di ordine 5.
2. Si verifichi che G contiene un sottogruppo di ordine 35 che è normale e ciclico.
3. Verificare se esiste un gruppo di ordine 70 che contiene esattamente 35 elementi di ordine 2 e uno che ne contiene esattamente 14.

Esercizio 3. Sia $f = x^4 - 3x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

- a. Determinare un campo di spezzamento E di f .
- b. Determinare il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q} \subset E$.
- c. Determinare i sottocampi K tali che $\mathbb{Q} \subset K \subset E$.

Esercizio 4. Considerare il polinomio

$$f = x^9 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Determinare un campo di spezzamento E di f (suggerimento: si pensi al cubo di un trinomio) e calcolare $[E : \mathbb{Z}_3]$. L'estensione $\mathbb{Z}_3 \subset E$ è di Galois?