

Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025

Prova scritta

Prof. Valentina Beorchia

14 giugno 2025

1. **(14 punti)** Si consideri la curva

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(t) = (t\sqrt{2} + \cos t, \sqrt{3} \sin t, t - \sqrt{2} \cos t).$$

Si verifichi che $\beta(t)$ è una curva regolare priva di flessi e calcolarne curvatura e torsione, verificando in particolare che sono entrambe costanti e non nulle.

Si trovi un'elica della forma $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ isometrica a $\beta(t)$.

2. **(14 punti)** Si consideri la superficie regolare $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ dove

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (2u + 2v, u - v, 4uv).$$

Si dimostri che

- (a) S è una superficie regolare e che φ è una parametrizzazione locale;
 - (b) S può essere rigata in due modi;
 - (c) si calcoli la curvatura gaussiana di S , si classifichino i suoi punti e si dica se S è una superficie minima.
3. **(4 punti)** Sia S una superficie regolare. Sia α una curva regolare contenuta in S . Si supponga che il piano tangente a S lungo i punti di α sia costante e si dimostri che i punti di α sono o planari o parabolici.

1. (14 punti) Si consideri la curva

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(t) = (t\sqrt{2} + \cos t, \sqrt{3} \sin t, t - \sqrt{2} \cos t).$$

Si verifichi che $\beta(t)$ è una curva regolare priva di flessi e calcolarne curvatura e torsione, verificando in particolare che sono entrambe costanti e non nulle.

Si trovi un'elica della forma $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ isometrica a $\beta(t)$.

Usando le formule in parametr. arbitrarie si trova

$$k(t) = \frac{\sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t} \sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{12} = \frac{1}{\sqrt{12}} \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ la curva non ha flessi

La torsione risulta: $\tau(t) = -\frac{1}{\sqrt{12}}$ è costante $\neq 0$

$\Rightarrow$ per il Teorema Fondamentale delle Curve DIFF. in $\mathbb{R}^3$, con un moto rigido posso portare la traccia di β in un'elica circolare.

Ricordo che per $(a \cos t, a \sin t, bt)$ con $a > 0$ si ha

$$k(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi cerco a, b t.c.

$$\begin{cases} \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{-1}{\sqrt{12}} \end{cases} \quad \text{Osservo che} \quad \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}, \quad b = \frac{6}{12} = -\sqrt{3}$$

2. (14 punti) Si consideri la superficie regolare $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ dove

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (2u + 2v, u - v, 4uv).$$

Si dimostri che

- (a) S è una superficie regolare e che φ è una parametrizzazione locale;
- (b) S può essere rigata in due modi;
- (c) si calcoli la curvatura gaussiana di S , si classifichino i suoi punti e si dica se S è una superficie minima.

a) f è iniettiva (verif.) e continua;
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2\} \Rightarrow$ è un grafico $\Rightarrow$ è regolare $\Rightarrow f$ è omoeomorfismo
 inoltre $J(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4u & 4v \end{pmatrix}$ ha sempre $rg = 2$.

b) Crea α, w t.c. $f(u, v) = \alpha(u) + v w(u)$:
 $\alpha(u) = (2u, u, 0), w(u) = (2, -1, 4u)$

oppure crea β, j t.c. $f(u, v) = \beta(v) + u j(v)$
 $\beta(v) = (2v, -v, 0), j(v) = (2, 1, 4v)$

c) Siccome è rigata, $g = 0$ e $K = \frac{-f^2}{EG - F^2}$

Si trova

$K = \frac{-1}{(5u^2 - 6uv + 5v^2 + 1)^2} \Rightarrow$ i punti sono tutti ipobolici

$H = \frac{16uv + 3}{4(5u^2 - 6uv + 5v^2 + 1)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow$ $uv = -\frac{3}{16}$ equazione di ipobolici in $\mathbb{R}$
 non è nulla su ogni $S \Rightarrow$ NON È MINIMA

3. **(4 punti)** Sia S una superficie regolare. Sia α una curva regolare contenuta in S . Si supponga che il piano tangente a S lungo i punti di α sia costante e si dimostri che i punti di α sono o planari o parabolici.

Sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrizzazione f.c.

$$\alpha(I) \cap f(U) \neq \emptyset; \text{ cos. } N(u, v) = \frac{d_u f \wedge d_v f}{\|d_u f \wedge d_v f\|}$$

$$\text{Sia } u(t), v(t) = f^{-1}(\alpha(t))$$

Altre $T_p S$ costante $\forall p \in \alpha(I) \cap f(U) \Rightarrow N(u(t), v(t))$

costante $\forall t \in \alpha^{-1}(f(U)) \Rightarrow d_p N(\alpha'(t)) = 0 \forall t \in I$

$\alpha'(t) \neq (0, 0, 0)$ poiché α è regolare

$\Rightarrow \ker d_p N \neq \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow 0$ è autovalore di $d_p N$

lungo $\alpha(t) \Rightarrow K = \det -d_p N = 0 \Rightarrow \forall p \in \alpha(I)$,
 p è planare o parabolico.

