

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 3/6/2025

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 16}{\ln(x + y)}(x - 5)$$

- (b) (3 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.
(c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, giustificando la risposta.
2. (a) (1 punto) Si enunci (con ipotesi e tesi) il teorema di Schwarz per funzioni in due variabili.
3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.
(b) Si consideri la successione di funzioni di termini $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
i. (1 punto) Si determini la funzione limite puntuale della successione in $[0, 1]$.
ii. (2 punti) Si stabilisca se in $[0, 1]$ la convergenza è uniforme.
iii. (2 punti) Si stabilisca se in $[0, a]$, $0 < a < 1$ la convergenza è uniforme.

4. (a) (3 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(2, 1)$ la curva definita dall'equazione

$$yx^2 - 5x + 6 = 0$$

è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si determini se il punto 2 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione g . Si determini se in un intorno di 2 la funzione g risulti convessa o concava.

5. (a) (2 punti) Si determini il volume del solido che giace sopra la regione di piano $[0, 2] \times [0, 4]$ e sotto la superficie di equazione $z = y + 4$.
(b) (2 punti) Si enunci (con ipotesi e tesi) il teorema di riduzione per l'integrale di Riemann di funzioni in due variabili definite su un rettangolo (è sufficiente enunciarlo per una delle due formule simmetriche).
6. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{y^3}{3}$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

- (b) (2 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \frac{4 - 4y - x^2 + y^2}{1 + y^2}.$$