

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 24.06.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Cos'è un sistema Hamiltoniano? [1pt]
2. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Hamiltoniano. Fare un esempio. [2pt]
3. Scrivere la definizione di trasformazione canonica e la relazione tra le Hamiltoniane coniugate (spiegando ogni simbolo in tale relazione). [2pt]
4. Si enunci e si dimostri il teorema di Nöther *in meccanica Hamiltoniana*, per trasformazioni indipendenti dal tempo. [3pt]
5. Si definisca il flusso Hamiltoniano e si dimostri che è una famiglia di trasformazioni canoniche. [4pt]
6. Si consideri la seguente trasformazione di coordinate sullo spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} q_1 &= \tilde{q}_1 + \frac{\tilde{p}_1}{m}t & q_2 &= \tilde{q}_2 + \frac{\tilde{p}_2}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ p_1 &= \tilde{p}_1 & p_2 &= \tilde{p}_2 - mgt \end{aligned} \quad (1)$$

Si dimostri che tale trasformazione è canonica. [1pt]

7. Si trovi l'espressione per $K_0(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ relativa alla trasformazione canonica (1). [2pt]
8. Si scriva un'Hamiltoniana che genera la trasformazione (1) come suo flusso Hamiltoniano e si giustifichi la risposta. [1pt]

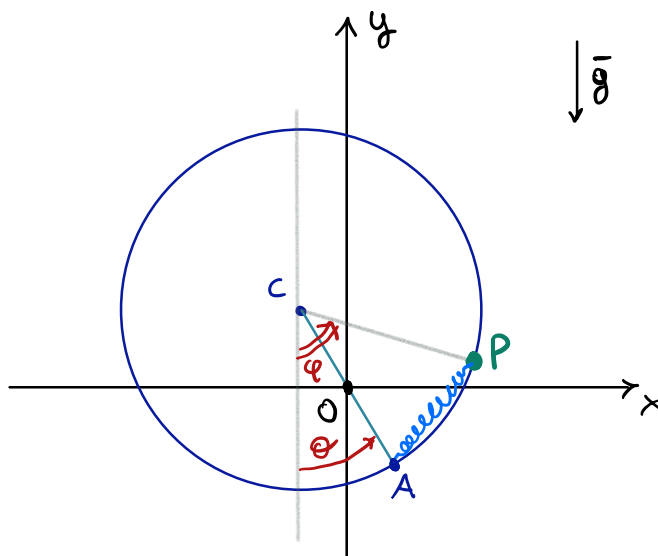
Esercizio 2

Il sistema in figura è disposto in un piano verticale. Si consideri una circonferenza di massa m e raggio R . Il punto medio di un suo raggio CA è ancorato all'origine del piano cartesiano xy (A è un punto fissato della circonferenza). Sulla circonferenza è libero di muoversi un punto materiale P di massa m . I punti A e P sono connessi da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. **Sul sistema agisce la gravità.**

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli θ e φ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].

[Il momento di inerzia della circonferenza rispetto ad un asse passante per O è $I = \frac{5}{4}mR^2$.]

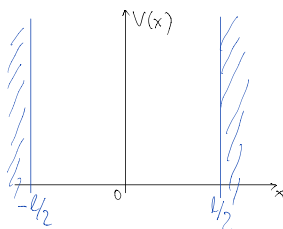
2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata φ [2pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [6pt].



4. Si ponga $R = \frac{mg}{4k}$. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile. [2pt].
5. Si scriva la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate [2pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, trovando lo spettro risultante: [2pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

2. Si calcoli il valor medio dell'energia nel secondo livello energetico [1pt].
3. Si consideri il sistema nello stato fondamentale: calcolare la probabilità che la particella venga misurata nell'intervallo $[0, \frac{\ell}{4}]$ [1pt].