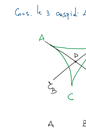
Foglio 5 , es. 11.

C quartica irr. in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con 3 cuspidi.

Dim. dalle 3 cusp. passano più di una quintica.

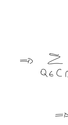
(Richiamo: $\#\,\mathrm{Sing}_p\, C \le \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 3$)

$d=4$



cuspide può aggiungere un tot di 2 tg principali distinte

Cons. le 3 cuspidi A, B, C e le 2 tangenti ξ_A, ξ_B



$d=4$

A B C

ξ_A ξ_B ξ_C

$B \in \xi_A$? Se così fosse

$I_A(C, \xi_A) \ge 3$ perché ξ_A è tg

$I_B(C, \xi_A) \ge 2$ perché $B \in C$ liscio

$\Rightarrow \sum_{Q \in C \cap \xi_A} I_Q(C, \xi_A) \ge 3+2 = 5 > \deg C \cdot \deg \xi_A$

4 · 1

$\Rightarrow \xi_A \subseteq C$ assurdo perché C è irriducibile.

Analogamente:

$B \notin \xi_A$ $\quad C \notin \xi_A$ $\quad A \notin \xi_B$ $\quad C \notin \xi_B$

In particolare : $\xi_A \neq \xi_B$

$\Rightarrow \xi_A \cap \xi_B =: D$

$D \neq A,\ D \neq B,\ D \neq C$

$\{A, B, C, D\}$ 4 punti distinti, e 3 a 3 non allineati (ABC non all. per Bézout ADC non all. perché $\overline{AD} = \xi_A$, ...)

$\Rightarrow \exists$ proiettività $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

$T(A) = (1:0:0)$
$T(B) = (0:1:0)$
$T(C) = (0:0:1)$
$T(D) = (1:1:1)$

$\Rightarrow \xi_A = \overline{AD}$ di eq. $x_1 - x_2 = 0$

$\xi_B = \overline{BD}$ di eq. $x_0 - x_2 = 0$

Ora cons. una generica quartica e imponiamo le 3 cuspidi e le 2 tangenti.

oss. $(1:0:0) \in U_0 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$(x_0:x_1:x_2) \to \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = (x, y)$

(x,y) coppie coniug. $x-y=0$

$C \cap U_0$ avrà eq. aff. del tipo:

$(x-y)^2 + a x^3 + b\, x^2 y + c\, x y^2 + d\, y^3 +$

$+ e\, x^4 + f\, x^3 y + g\, x^2 y^2 + h\, x y^3 + l\, y^4 = 0$

la chiusura proiettiva $\overline{(C \cap U_0)} = C$ perciò C è irriducibile

si ottiene omogeneizzando:

$x_1^2 (x_1 - x_2)^2 + x_0 (a\, x_1^3 + b\, x_1^2 x_2 + c\, x_1 x_2^2 + d\, x_2^3) +$

$+ e\, x_1^4 + f\, x_1^3 x_2 + g\, x_1^2 x_2^2 + h\, x_1 x_2^3 + l\, x_2^4 = 0$

Imponiamo ora

- $B = (0:1:0)$ cuspide con ξ_B : $x_0 - x_2 = 0$

cons. $C \cap U_1$, $U_1 = \{x_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ $\quad (x_0 : x_1 : x_2)$

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ $\quad \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) = (z, w)$

(*) $z^2 (1-w)^2 + z(a + b\,w + c\,w^2 + d\,w^3) +$

$+ e + f\,w + g\,w^2 + h\,w^3 + l\,w^4 = 0$

$x_0 = z$, $x_1 = 1$, $x_2 = w$

$(0,0)$ cuspide con tg $z - w = 0$

$\Leftrightarrow$ l'eq (*) non ha termine noto né termine lineare, e il termine quadratico è proporzionale a $(z-w)^2$

$\Leftrightarrow$ $e = 0$, $f = 0$, $g = 0$

e $z^2 + b\,zw + q\,w^2 = (z - w)^2$

$\Leftrightarrow$ $b = -2$, $q = 1$

Omogeneizzo nuovamente e trovo:

$x_2^2 (x_1 - x_2)^2 + x_0 (-2 x_1^2 x_2 + c\, x_2^3) +$

$+ x_1^4 = 0$

Infine: imponiamo $(0:0:1)$ sia cuspide

cons. $C \cap U_2$, $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$

dove $x_0 = t$, $x_1 = s$, $x_2 = 1$

$t^2 (s-1)^2 + t(-2s^2 + c\,s + d) +$

$+ s^4 + b\,s + l = 0$

Non ci sono termine noto né termine lineare

$\Rightarrow$ **$b = 0$ $\quad l = 0$** $\quad d = 0$

Trovo: $t^2 (s-1)^2 - 2ts^2 + c\,st + s^4 = 0$

(**) $\boxed{t^2 + c\,st + s^2 = 0}$ equazione del cono tangente

C cuspide come (**) è il quadrato di una equazione lineare

$\Leftrightarrow c = \pm 2$

Se $c = 2$

sia

$x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 - 2 x_0^2 x_1 x_2 - 2 x_0 x_1^2 x_2 + 2 x_0 x_1 x_2^2 = 0$

$= (x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2)^2$ $\Rightarrow C$ riducibile

$\Rightarrow c = -2$; si può verificare che con questa scelta il polinomio è irriducibile

Vediamo infine che ξ_C : $x_0 - x_1 = 0$

$\Rightarrow D = (1:1:1) \in \xi_C$

$\Rightarrow \xi_A, \xi_B \in \xi_C$ passano tutte per il punto D.