Visto: $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali

$0 \in \mathbb{N}$

OPERAZIONI in $\mathbb{N}$

4 operazioni $+$, $\cdot$, $-$, $:$

$+$ ADDIZIONE:

$\forall$ coppia $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

$n+m = \underbrace{((n+1)+1)+\dots+1}_{m}$

Proprietà algebriche:

① commutività: $n+m = m+n$

② associatività: $(n+m)+k = n+(m+k)$

③ $\exists$ elemento neutro: 0

con proprietà $n+0 = n$

OSS: Addizione è definita $\forall$ coppia di numeri naturali: cioè $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$n+m$ è ancora in $\mathbb{N}$

In altre parole, $+$ è una OPERAZIONE INTERNA ad $\mathbb{N}$.

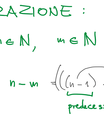
Possiamo esprimere $+$ come una funzione:

Cart. di PRODOTTO CARTESIANO di $\mathbb{N}$ con se stesso:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ coppie ordinate

cioè $(n,m) \neq (m,n)$

(Es. esempi di prodotti cartesiani: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifica nel PIANO CARTESIANO)



Cons.

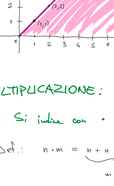
$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$F((n,m)) = n+m$

• è suriettiva? $\forall\, k \in \mathbb{N}$ esiste $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $F((a,b)) = k$?

$k = F((k,0)) = k+0$

$k = 5$: $5 = F((5,0)) = 0+5$
$= 1+4$
$= 2+3$
$= 3+2$
$= 4+1$
$= 5+0$



In generale $k = k+0 = F((k,0))$

$\Rightarrow F$ è suriettiva

Ma: F non è iniettiva: $F((0,3)) = F((1,2))$

$(0,3) \neq (1,2)$

SOTTRAZIONE:

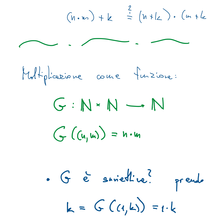
$n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ (m volte)

$n - m = \underbrace{((\dots((n-1)-1)-1)\dots-1)}_{\text{predecessore di } n}$

Abbiamo definito: $n-m = k$ tale che $m+k = n$

OSS.: La sottrazione non è una operazione interna ad $\mathbb{N}$, perché non è definita $\forall$ coppia di numeri naturali, ma solo per (n,m) con $n \geq m$

es. $(5,3)$, $(3,3)$, $(11,11)$



MOLTIPLICAZIONE:

Si indica con $\cdot$ (oppure $\times$)

Def.: $n \cdot m = \underbrace{n+n+\dots+n}_{m \text{ volte}}$

$m \cdot n = \underbrace{m+m+\dots+m}_{n \text{ volte}}$

PROPRIETÀ ALG. :

① Commutatività: $n \cdot m = m \cdot n$

② Associatività: $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$

③ $\exists$ uno: 1

$n \cdot 1 = n$

④ Distributività $(n+m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$ del prodotto risp. alla somma

X ⑤ Distributività della somma risp. prodotto!

$(n \cdot m) + k \overset{?}{=} (n+k) \cdot (m+k)$ NO

Moltiplicazione come funzione:

$G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

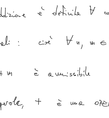
$G((n,m)) = n \cdot m$

• G è suriettiva? prendo $k \in \mathbb{N}$

$k = G((1,k)) = 1 \cdot k$

• G è iniettiva? NO, ad es.

$G((1,3)) = G((3,1)) = 6$



$k = n \cdot m$

$k = x \cdot y$

$y = \frac{k}{x}$ iperbole

DIVISIONE:

$n : m = k$ tale che $m \cdot k = n$