Lezione 4 aprile 2025

venerdì 4 aprile 2025 10:56

https://www.rainews.it/tgr/fvg/video/2024/04/la-matematica-dei-ragazzi-e-si-impara-divertendosi-2c3dff8d-76a6-41d1-9491-ed225cbc223c.html

https://share.icloud.com/photos/06aljKRjY8Zad_lROXZM-tByA

https://share.icloud.com/photos/026dfgowoxQUyGoFDODXA0neg

La matematic...

INSIEMI NUMERI:

$\mathbb{N}$: $+, -, \cdot, :$

L'insieme $\mathbb{N}$ si può ampliare in modo che opr. $-$ sia sempre definita:

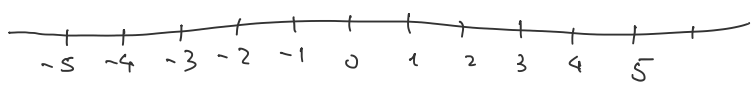
$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ insieme dei NUMERI INTERI

contiene tutti i numeri interi negativi:

$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Possono essere rappresentati sulla retta reale



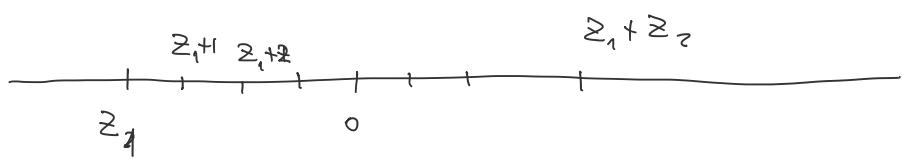
In $\mathbb{Z}$ possiamo definire $+$:

$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$z_1 + z_2 =$

se $z_2 \in \mathbb{N}$: $z_2 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{z_2 \text{ volte}}$ $\quad z_1+z_2 = (\overbrace{(z_1+1)+1)+\dots+1}^{z_2})$

succ. di z_1



se $z_2 \notin \mathbb{N}$ $(z_2 < 0)$: $z_2 = \underbrace{(-1)-1\dots-1}_{z_2 \text{ volte}}$: $z_1+z_2 = (z_1\underbrace{-1)-1-\dots-1}_{z_2 \text{ volte}}$

-1 : predecessore di 0

<u>Def.</u>: $z \in \mathbb{Z}$, $z-1$ predecessore di z

OSS.: $+$ in $\mathbb{Z}$ è una estensione di $+$ di $\mathbb{N}$; più precisamente se $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ che sono in realtà

$z_1, z_2 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

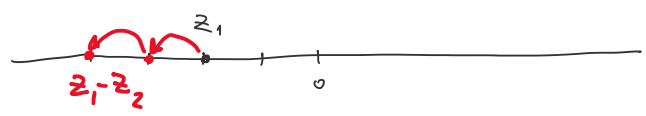
$z_1 + z_2$ con la regola in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$
ci dà lo stesso risultato

OSS. Possiamo def. $-$ differenza in $\mathbb{Z}$
che sia una estensione di $-$ in $\mathbb{N}$ come
segue:

$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$z_1 - z_2 =$

$z_2 > 0$: $z_2 = \underbrace{1 + \cdot + 1}_{z_2 \text{ volte}}$, $z_1 - z_2 = (z_1 \underbrace{- 1) - 1 \cdots - 1}_{z_2 \text{ volte}}$



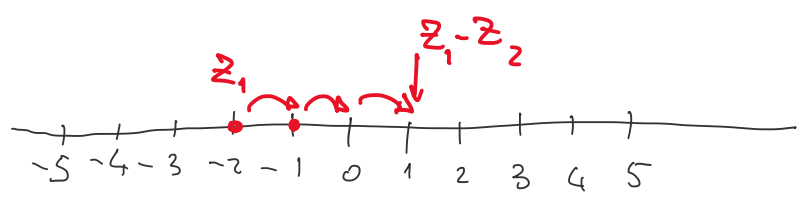
$z_1 = -2$, $z_2 = 2$

$z_1 - z_2$

$-2 - 2 = -4$

$z_2 < 0$: $z_2 = \underbrace{(-1) - 1 \cdots - 1}_{|z_2| \text{ volte}}$, $z_1 - z_2 = (z_1 \underbrace{+ 1) + \cdots + 1}_{|z_2| \text{ volte}}$

dove $|z_2| = -z_2$, $|-2| = 2$
$z_2 < 0$



$z_2 = -3$, $|z_2| = 3$, $z_1 - z_2$

$-2 - (-3) = 1$

Infine : se $z_2 = 0$: $z_1 - 0 = z_1$

REGOLA : $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m + (-n) = m - n \\ m - (-n) = m + n \end{cases}$$

Moltiplicazione in $\mathbb{Z}$:

Richiamo : $n, m \in \mathbb{N}$ $\quad n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdot + n}_{m \text{ volte}}$

Ora : $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} z_1 \cdot z_2 & \text{se } z_1 \geq 0 \quad z_2 \geq 0 \\ -\, z_1 \cdot |z_2| & z_1 \geq 0 \quad z_2 < 0 \\ -\, |z_1| \cdot z_2 & z_1 < 0, \quad z_2 \geq 0 \\ \underbrace{|z_1|}_{>0} \cdot \underbrace{|z_2|}_{>0} & z_1 < 0 \quad z_2 < 0 \end{cases}$$

es. 3, -2

$3 \cdot (-2) = -(3 \cdot |-2|)$
$-(3 \cdot 2)$

$(-4) \cdot 5 = -(|-4| \cdot 5)$
$-(4 \cdot 5)$

$z_1 = -2 \qquad z_2 = -8$

$(-2) \cdot (-8) = |-2| \cdot |-8|$
$= 2 \cdot 8 = 16$

<u>OSS.</u> Con questa def. di $\cdot$ in $\mathbb{Z}$ si ha che vale

$$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k \qquad \boxed{\forall\, n, m, k \in \mathbb{Z}}$$

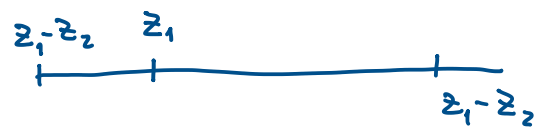
DISTRIBUTIVA di $\cdot$ RISP. $+$

es.: $3 \cdot (5+2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 15 + 6 = 21$
$3 \cdot 7 = 21$

<u>OSS.</u> $+$ in $\mathbb{Z}$ è def. $\forall$ coppie di numeri interi: $\forall z_1, \forall z_2 \in \mathbb{Z}$

$z_1 + z_2$ si può sempre fare.

<u>OSS.</u> $-$ in $\mathbb{Z}$:



$n - m$ in $\mathbb{N}$ si può fare se e solo se $m \leq n$.

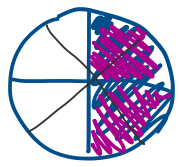
La DIFF. in $\mathbb{Z}$ è definita $\forall$ coppie di numeri interi:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_1 - z_2$ si può fare

ULTERIORE ESTENSIONE:

Cons. l'insieme dei NUMERI RAZIONALI: $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$

Es.:



$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

1 parte

2 parti uguali che dividono unità

OSS.: Ogni razionale ha infinite rappresentazioni numeriche $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{-1}{-2} = \frac{-3}{-6} = \dots$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ perché $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ $\quad 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

$\frac{-1}{-2} = \frac{4}{8}$: $(-1) \cdot 8 = -8$
$4 \cdot (-2) = -8$

Def.: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0,\ e\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se e solo se } a \cdot d = c \cdot b \right\}$

NUMERATORE DENOMINATORE

OSS. $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$: infatti possiamo identificare

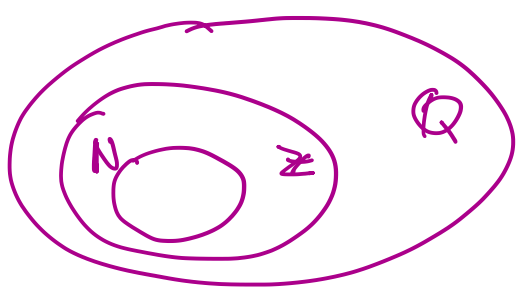
$\frac{a}{b}$ $\quad z_1$ $\quad$ ogni $z_1 \in \mathbb{Z}$ con $\frac{z_1}{1}$

avremo $\frac{z_1}{1} = \frac{z_2}{1}$: se e solo se $z_1 \cdot 1 = z_2 \cdot 1$

$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ $\qquad z_1 = z_2$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$z_1 \longrightarrow \frac{z_1}{1}$ $\quad$ è una funzione INIETTIVA



OPERAZIONI: $+$ in $\mathbb{Q}$

$a \in \mathbb{Z}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ $\quad \in \mathbb{Z}$ $\quad \neq 0$

$b \neq 0$ $\quad d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0$

$b \neq 0,\ d \neq 0$

CONTROLLO: Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$: $a \cdot b' = a' \cdot b$

la def. di +
NON DIPENDE dalla scelta del

RAPPRESENTANTE PER $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{b\cdot d}$$

$$\parallel \qquad \overset{?}{=}$$

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c}{d} = \frac{a'\cdot d + c\cdot b'}{b'\cdot d}$$

$$(a\cdot d + cb)\cdot(b'\cdot d) = ad\,b'd + c\cdot b\cdot b'd$$

$$(a'\cdot d + cb')\cdot(b\cdot d) = a'd\,bd + c\cdot b'\cdot b\cdot d \;) =$$

sappiamo $ab' = a'b$

Poss. anche def. −

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}}$$

Infine: $\cdot$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

PROPRIETÀ: + e $\cdot$

sono estensioni di + e $\cdot$ in $\mathbb{Z}$:

$$\frac{z_1}{1} + \frac{z_2}{1} = \frac{z_1\cdot 1 + z_2\cdot 1}{1\cdot 1} = \frac{z_1+z_2}{1} \rightsquigarrow z_1+z_2\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{z_1}{1}\cdot\frac{z_2}{1} = \frac{z_1\cdot z_2}{1\cdot 1} = \frac{z_1\cdot z_2}{1} \rightsquigarrow z_1\cdot z_2\in\mathbb{Z}$$

Inoltre: $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$

DISTRIBUTIVITÀ

OSS. Finale: $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$

Se ammettessimo lo 0 come denominatore:

$$\frac{2}{0} = \frac{c}{d} \quad \text{se e solo se} \quad \left.\begin{array}{l} 2 \cdot d = c \cdot 0 = 0 \\ d = 0 \end{array}\right\}$$

problemi con le proprietà alg. in $\mathbb{Q}$

cons. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$

se $a \neq 0$

cioè ogni $\frac{a}{b}$ con $a \neq 0$ è INVERTIBILE

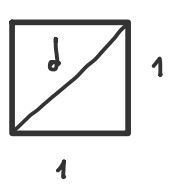
perché esiste un razionale che molt. per $\frac{a}{b}$

mi dà il NEUTRO $\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$

numeri reali

L'esistenza di numeri reali non razionali (IRRAZIONALI) già nota ai Greci:



misura diagonale

$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Domanda: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$? NO

Teorema: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dim. <u>Per assurdo</u>: supp. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$

$\sqrt{2} > 0$, $a > 0$, $b > 0$

Possiamo supporre che a e b siano COPRIMI tra loro, cioè l'unico divisore comune è 1 ($\frac{a}{b}$ è AI MINIMI TERMINI)

Infatti: $a = k \cdot a'$, $b = k \cdot b'$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot a'}{k \cdot b'} = \frac{a'}{b'}$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$ è un numero PARI $\Rightarrow$ $\boxed{a \text{ è pari}}$

(se a fosse dispari, cioè

$a = 2h + 1$, $h \in \mathbb{N}$

$$a^2 = (2h+1)^2 = 4h^2 + 4h + 1$$

$$= \underbrace{\underbrace{2(2h^2 + 2h)}_{\text{pari}} + 1}_{\text{dispari}}$$

)

$\Rightarrow a = 2 \cdot a'$ perché è pari

$a^2 = 4(a')^2$

$2 \cdot b^2 = a^2 = 4 \cdot (a')^2 \quad /:2$

$b^2 = 2 \cdot (a')^2 \Rightarrow b^2$ è pari

$\Rightarrow \boxed{b \text{ pari}} \Rightarrow \frac{a}{b}$ si può semplificare perché entrambi pari

$\Rightarrow$ contraddice l'ipotesi a e b coprimi