

Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2024-2025, terzo appello estivo.

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- (6 punti) si calcoli $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \tanh(x) - x^3 \tan(x^{-1})}{\int_1^x \frac{1}{1+\sqrt{t+t}} dt - \log(1+2x)} = \frac{N}{D}$ $\tanh(y) = y + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$
- $N = x^2 - x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) + x^2 \tanh(x) - 1 = -\frac{1}{3} + o(1)$
- $\int_1^x \frac{1}{1+\sqrt{t+t}} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{v}{1+v+v^2} dv = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2v+1}{1+v+v^2} dv = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{dv}{(v+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$
- $= \log(1+x+\sqrt{x}) - \log 3 - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+1} \quad \text{per } v+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u$
- $= \log(1+x+\sqrt{x}) - \log(3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}/2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3})$
- $D = \log(x) + \log(1+\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}) - \log 3 - \log 2 - \log x - \log(1+\frac{1}{2x}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}/2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}$
- $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\log 6 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3} \quad \text{limite } L = \frac{-\frac{1}{3}}{-\log 6 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}}$
- (2 punti) si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{x+x^{-1}}^{x^2+x^3} e^{-t^2} dt$.

$$f'(x) = (2x+3x^2) e^{-(x^2+x^3)^2} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-(x+x^{-1})^2}$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremità del dominio; $x \neq 2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7}{x-2} = +\infty$$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$$

$$x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow x = x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4+3} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$f'(x) > 0$ per $x < x_-$ e $x > x_+$ e $f'(x) < 0$ per $x_- < x < x_+$ punti
 x_- max locale e x_+ min locale

- si calcoli la derivata seconda e si studi concavità e convessità;

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x-3)2(x-2)}{(x-2)^4} = 2 \frac{(x-2)^2 - (x^2-4x-3)}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{2}{(x-2)^3} (x^2-4x+4-x^2+4x+3) = \frac{6}{(x-2)^3} \quad \text{quindi } f \text{ convessa per } x > 2$$

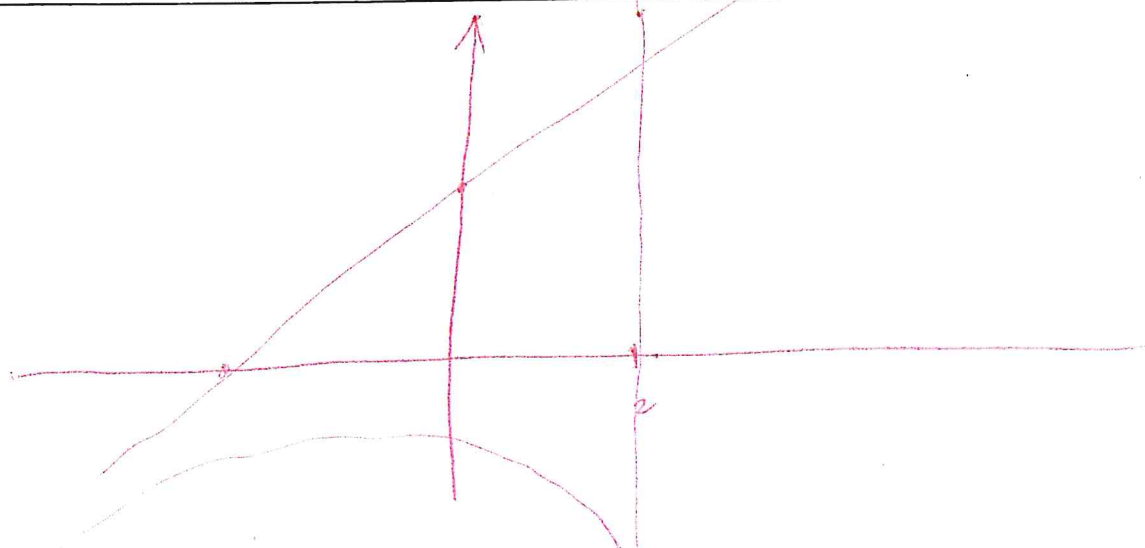
e concava per $x < 2$. Non ci sono flessi.

- si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x-2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1-x^2+2x}{x-2} = 3$$

Quindi $y = x + 3$ retta obliqua a $\pm \infty$



COGNOME e NOME _____

N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$A = f(x) \cdot x \big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$B = f(x)(x+1) \big|_{x=-1} = \frac{1}{x(x+2)} \big|_{x=-1} = -1$$

$$C = \frac{1}{2} \text{ da } A+B+C=0$$

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{2} \lg x - \lg(x+1) + \lg 2 + \frac{1}{2} \lg(x+2) - \frac{1}{2} \lg 3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lg \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- si calcoli le primitive di $\int e^x \cos^2(x) dx$;

$$= \int e^x \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \int (e^x)' \cos(2x) \text{ dove } \int e^x \cos(2x) = (e^x)' \cos(2x) =$$

$$= e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) = e^x \cos(2x) + 2 \int (e^x)' \sin(2x) = e^x \cos(2x) + 2 e^x \sin(2x)$$

$$- 4 \int e^x \cos(2x) \text{ da cui in definitiva } \int e^x \cos(2x) = \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)}{5} + C$$

- si stabilisca se $f(x) = \sin(x^2)$ e' integrabile in $[1, +\infty)$;

$$\int_1^x \sin(t^2) dt = \quad u = t^2 \quad du = 2t dt \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \text{ esiste limite perche } \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} e^{\frac{1}{\sqrt{u}}} \text{ integrabile in } [1, +\infty)$$

- si stabilisca se $\frac{1}{x \log x}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

$$\int_2^x \frac{1}{t \lg t} dt \quad y = \lg t \quad dy = \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_{\lg 2}^{\lg x} \frac{1}{y} dy \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ non integrabile}$$

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $f(x) = \sin(x^2 + x)$.

$$\begin{aligned}
 \sin(y) &= y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^6) \\
 \sin(x^2 + x) &= (x^2 + x) - \frac{(x^2 + x)^3}{3!} + \frac{(x^2 + x)^5}{5!} + o(x^6) = \\
 &= x^2 + x - \frac{(x^6 + 3x^5 + 3x^3 + x^3)}{3!} + \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{5!} + o(x^6) = \\
 &= x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2}\right)x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

polinomio cercato

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - y = x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
 y_h &= Ae^x + Be^{-x} \\
 y_p &= -x \\
 y &= Ae^x + Be^{-x} - x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(0) = A + B &= 1 & 2A &= 3 & A &= \frac{3}{2} \\
 y'(0) = A - B &= 2 & 2B &= -1 & B &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$