

Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Prova scritta
23 giugno 2025

Prof. Valentina Beorchia

1. **(14 punti)** Sia $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da:

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t \right).$$

- (a) Si verifichi che la curva è parametrizzata per lunghezza d'arco.
- (b) Si calcolino la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet di α in ogni punto della curva.

2. **(14 punti)** Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = z\}$.

- (a) Si dimostri che S è una superficie regolare;
- (b) si trovi una parametrizzazione locale φ tale che $\varphi(\mathbb{R}^2) = S$;
- (c) si calcolino i coefficienti della seconda forma fondamentale rispetto a φ nei punti in cui $y = 0$;
- (d) determinare di che tipo sono i punti in cui $y = 0$.

3. **(4 punti)** Sia S una superficie regolare e $p \in S$. Si dimostri che la somma delle curvatures normali di S in p lungo due direzioni ortogonali è costante.