Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria Navale e Industriale

Geometria

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2025–2026

Insiemi

Insieme. Collezione di *elementi* (oggetti) non ordinati e senza ripetizioni.

Un insieme si può assegnare elencandone gli elementi tra parentesi graffe

$$\{1\}, \quad \{3, -7, 42\}, \quad \{2, 12, 132, -1, 0\}$$

Esiste un insieme senza elementi, detto *insieme vuoto* e denotato con $\emptyset$

In molti casi un insieme si assegna specificando una proprietà $\mathcal{P}$ che ne caratterizza gli elementi. In simboli

$$X = \{x \mid x \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

X è quindi l'insieme di tutti e soli gli elementi che hanno la proprietà $\mathcal{P}$, qualunque essa sia.

Esempi. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ insieme dei *numeri naturali*. Non è possibile elencarli tutti essendo infiniti.
$P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ insieme dei numeri naturali pari.
$D = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ insieme dei numeri naturali dispari.

Per affermare che un elemento x appartiene all'insieme X si scrive

$$x \in X$$

e si legge "x appartiene a X". Il simbolo di non appartenenza è $\notin$.
Per esempio $2 \in \{5, 3, 10, 2, 0\}$ ma $1 \notin \{5, 3, 10, 2, 0\}$.

Per affermare che un insieme X è contenuto in un insieme Y si scrive

$$X \subset Y$$

e si legge "X è sottoinsieme di Y" o anche "X è contenuto in Y".
Precisamente questo significa che ogni elemento di X appartiene a Y.
Non confondere inclusione (di sottoinsiemi) e appartenenza (di elementi).
Per esempio

$$\{0, 3\} \subset \{5, 3, 10, 2, 0\}, \ 3 \in \{5, 3\}, \ \{3\} \subset \{5, 3\}, \ \{3\} \notin \{5, 3\}$$
$$\{0, 3\} \notin \{10, 2, 0\}, \ \{0, 3\} \in \{10, 2, 0, \{3, 0\}\}.$$

Se $X \subset Y$ scriviamo anche $Y \supset X$ (si legge Y contiene X).

Due insiemi X e Y sono uguali (sono lo stesso insieme) se hanno gli stessi elementi: $X = Y$ se e solo se $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Ad esempio

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} \quad \text{ma} \quad \{1, 2\} \neq \{3, 2\}.$$

N.B. $X \subset Y$ non esclude $X = Y$, pertanto $X \subset X$. Si scrive anche $X \subseteq Y$.
Invece la scrittura $X \subsetneq Y$ significa $X \subset Y$ e $X \neq Y$ (sottoinsieme proprio).

Operazioni tra insiemi

Intersezione. $X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}$
Esempio: $\{1,2,3,5\} \cap \{10,9,1,3,5\} = \{1,3,5\}$.
Si ha $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$.

X e Y sono detti disgiunti se $X \cap Y = \emptyset$, ovvero se X e Y non hanno nessun elemento in comune.

Unione. $X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}$
Esempio: $\{1,2,3,5\} \cup \{10,9,1,3,5\} = \{1,2,3,5,10,9\}$.
Si ha $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$.

Differenza insiemistica. $X - Y = X \setminus Y := \{x \mid x \in X \text{ e } x \notin Y\}$.
Esempi
$\{1,2,3,5\} - \{10,9,3,5\} = \{1,2\}$.
$\{10,9,3,5\} - \{1,2,3,5\} = \{10,9\}$.
Si ha $X - Y \subset X$, $X - X = \emptyset$, $X - \emptyset = X$ e $(X - Y) \cap Y = \emptyset$.
Se $X \cap Y = \emptyset$ allora $X - Y = X$.

Coppie ordinate. Una coppia ordinata (x, y) di elementi (detti componenti) è un insieme in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Ad esempio $(2,3)$ è diverso da $(3,2)$ ed è diverso da $\{2,3\}$. Anche $(1,1)$ è una coppia ordinata, in questo caso con le due componenti uguali.

n-uple ordinate. Più in generale si possono fare n-uple ordinate

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

cioè insiemi di $n \geqslant 1$ componenti in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Le 2-uple sono le coppie, le 3-uple sono dette terne, le 4-uple quaterne.

Prodotto cartesiano. $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme e la seconda al secondo insieme.

$$\{1,2,3\} \times \{3,5\} = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}$$

Oss. Se X ha m elementi e Y ha n elementi allora $X \times Y$ ha mn elementi.

Più in generale si può definire il prodotto cartesiano di un numero n arbitrario di insiemi $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}$$

cioè l'insieme di tutte le n-uple ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme, la seconda al secondo e così via, in tutti i modi possibili.

Si pone $X^n = X \times \cdots \times X$, prodotto di X con sé stesso n volte. Quindi $X^1 = X$, $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X, \ldots$ Ad esempio

$$\{1,2\}^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

Quantificatori. In Matematica e in logica si usano i seguenti quantificatori.

$\forall$ "per ogni" (quantificatore universale)

$\exists$ "esiste (almeno uno)" (quantificatore esistenziale)

$\exists!$ "esiste unico" (quantificatore unico)

$\nexists$ "non esiste"'

Numeri

Numeri naturali. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali l'abbiamo già incontrato. In questo insieme è definita l'addizione e la moltiplicazione, ma non sempre si può fare la sottrazione.

Numeri interi. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ è l'insieme dei *numeri interi*. Su $\mathbb{Z}$ sono definite l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione.

Numeri razionali. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ è l'insieme dei *numeri razionali*, quozienti di numeri interi con $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ se e solo se $ab' = a'b$.

Su $\mathbb{Q}$ sono definite addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione per un numero diverso da 0.

Numeri reali. $\mathbb{R}$ è l'insieme dei *numeri reali*, ad esempio

$$-3, 0, 5, \frac{1}{2}, -\frac{17}{6}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt{5}}, \pi, e, \ldots$$

Come su $\mathbb{Q}$, anche su $\mathbb{R}$ sono definite addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione per un numero diverso da 0. Si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Funzioni

Dati due insiemi X e Y, una *funzione* o *applicazione* o *mappa*

$$f : X \to Y$$

è costituita da tre insiemi X, Y e $G_f \subset X \times Y$ che soddisfa la proprietà seguente: per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ t.c. $(x, y) \in G_f$ e si scrive

$$y = f(x).$$

X si chiama *dominio*, Y *codominio* e G_f si chiama *grafico* di f. Pertanto $(x, f(x)) \in G_f$ e possiamo anche scrivere

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

L'elemento $f(x) \in Y$ si dice *immagine* di $x \in X$ tramite f.

Oss. Per una funzione dominio, codominio e grafico non vanno "trovati" essendo dati a priori. Il grafico rappresenta la "legge" che permette di associare ad ogni elemento del dominio il corrispondente elemento del codominio.

Per definire una funzione occorre specificare dominio, codominio e grafico o equivalentemente assegnare ad ogni elemento del dominio la sua immagine nel codominio. Spesso una funzone è definita mediante una formula.

Esempio.

$$\begin{aligned} h : \{1, 2, 3\} &\to \{1, 2\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

è la funzione con grafico $G_h = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.

Esempio.

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ g(n) &= 3n - n^2 \end{aligned}$$

Per ogni insieme X si definisce la *funzione identica*

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X &: X \to X \\ \mathrm{id}_X(x) &= x \end{aligned}$$