

Matrici

Def. Dati due numeri positivi $m, n \in \mathbb{N}$, una *matrice* di tipo $m \times n$ è una tabella di numeri reali o complessi con m righe e n colonne. Se $m = n$ la matrice è detta *quadrata*. I numeri che formano la matrice sono detti *entrate* o *elementi*.

Una matrice quadrata $n \times n$ è detta anche matrice quadrata di ordine n .

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3 .

L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate reali si indica con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ o anche $\mathbb{R}^{m \times n}$. Analogamente l'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate complesse si indica con $M_{m,n}(\mathbb{C})$ o anche $\mathbb{C}^{m \times n}$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ e similmente per quelle complesse $M_n(\mathbb{C}) = M_{n,n}(\mathbb{C})$. Si ha $M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Esempio.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 + 3i & -1 + 7i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Le entrate di una matrice $m \times n$ si numerano a partire da quella più in alto a sinistra, mediante una coppia di indici (i, j) con $i \in \{1, \dots, m\}$ (indice di riga) e $j \in \{1, \dots, n\}$ (indice di colonna). Quindi i numera le righe dall'alto verso il basso, e j numera le colonne da sinistra verso destra. Indichiamo l'entrata di posto (i, j) di una matrice A con A_{ij} .

Esempio. Per la matrice A del primo esempio si ha $A_{11} = 3$, $A_{13} = -5$, $A_{21} = 0$, $A_{23} = 4$.

Una matrice A di tipo $m \times n$ la cui generica entrata sia un numero a_{ij} si indica con $A = (a_{ij})$, ossia $A_{ij} = a_{ij}$.

Addizione. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Date $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *somma* $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo

$$(A + B)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}$$

ossia si sommano le entrate corrispondenti di A e B .

Moltiplicazione scalare. Dati $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *moltiplicazione scalare* $\alpha A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo

$$(\alpha A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha A_{ij}$$

ossia si moltiplicano le entrate di A per il numero α .

Prodotto righe per colonne

Abbiamo visto la definizione di matrice e le operazioni di somma e moltiplicazione scalare. Vedremo oggi una ulteriore operazione, prima in un caso speciale e poi in generale. Il campo sarà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, che come sempre indicheremo con $\mathbb{K}$ (le cose che vedremo valgono su qualunque campo). L'insieme delle matrici $m \times n$, ovvero con m righe e n colonne, a entrate nel campo $\mathbb{K}$, è stato indicato con $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Def. Dati un vettore riga e un vettore colonna con n componenti

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

chiamiamo *prodotto di A per B* lo scalare

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{K}.$$

Esempio.

$$(3 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 \quad (1 \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} -2i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - i.$$

Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ indichiamo con $A^{(i)} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ la i -esima riga di A , con $A_{(j)} \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ la j -esima colonna di A e con $A_{ij} \in \mathbb{K}$ l'entrata di posto (i, j) di A , per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(1)} = (2 \ 0 \ 1), \ A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ A_{32} = 7.$$

Generalizziamo l'operazione di moltiplicazione vista sopra.

Def. Consideriamo due matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$. Il *prodotto righe per colonne di A per B*, è la matrice $AB \in M_{m,\ell}(\mathbb{K})$ avente come entrata di posto (i, j)

$$(AB)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A^{(i)} B_{(j)} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Oss. Il prodotto righe per colonne è definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.

Oss. Se A è di tipo $m \times n$ e B è di tipo $n \times \ell$ allora AB è di tipo $m \times \ell$.

Oss. Due matrici quadrate $n \times n$ sono moltiplicabili e il risultato è una matrice quadrata $n \times n$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Oss. Una matrice $m \times n$ è moltiplicabile per un vettore colonna a n componenti. Il risultato è un vettore colonna a m componenti.

Oss. Un vettore riga a m componenti è moltiplicabile per una matrice $m \times n$. Il risultato è un vettore riga a n componenti.

Oss. Il prodotto righe per colonne in generale non è commutativo, nemmeno per matrici quadrate $n \times n$, con $n \geq 2$.

Esempio.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & & AB &\neq BA. \end{aligned}$$