Proprietà delle matrici

Abbiamo visto le seguenti operazioni sulle matrici: somma, moltiplicazione scalare, prodotto righe per colonne.

La somma di matrici è associativa, commutativa e ha l'elemento neutro, la *matrice nulla* $0 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ le cui entrate sono tutte nulle. Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha la *matrice opposta* $-A$ le cui entrate sono gli opposti delle entrate di A, e soddisfa $A - A = 0$. Queste proprietà sono di verifica molto semplice e simile al caso già visto per i vettori di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto righe per colonne abbiamo visto che non è commutativo (non solo, se AB è definito non è detto che lo sia anche BA).

Prop. *Il prodotto righe per colonne, quando è definito, è associativo e distributivo rispetto alla somma, ovvero per tutte le matrici A, B, C per cui le operazioni indicate abbiano senso si ha*

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Dim. Dimostriamo la proprietà associativa. Consideriamo tre matrici

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ \ B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K}),\ \ C \in M_{\ell,r}(\mathbb{K}).$$

Possiamo fare i prodotti AB, BC, $A(BC)$, $(AB)C$. Vogliamo dimostrare

$$A(BC) = (AB)C.$$

Due matrici sono uguali $\Leftrightarrow$ sono dello stesso tipo e hanno uguali le entrate corrispondenti. $A(BC)$ è di tipo $m \times r$, come $(AB)C$. Mostriamo che queste due matrici hanno uguali le entrate corrispondenti.

$$\big(A(BC)\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\left(\sum_{h=1}^{\ell} B_{kh}C_{hj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{\ell} A_{ik}B_{kh}C_{hj}$$

$$\big((AB)C\big)_{ij} = \sum_{h=1}^{\ell} (AB)_{ih}C_{hj} = \sum_{h=1}^{\ell}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kh}\right)C_{hj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{\ell} A_{ik}B_{kh}C_{hj}$$

$$\Rightarrow\ \big(A(BC)\big)_{ij} = \big((AB)C\big)_{ij} \quad \forall\, i = 1, \dots m,\ \forall\, j = 1, \dots, r.$$

La proprietà distributiva si dimostra con un calcolo analogo, lasciato come esercizio volontario (non è necessario conoscerlo). $\square$

Matrice trasposta.

Def. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ chiamiamo *trasposta* di A la matrice ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne, ovvero t.c.

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,\ \forall\, j = 1, \dots, m.$$

Oss. $A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA \in M_n(\mathbb{K})$.
${}^t({}^tA) = A$.

Prop. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, $\forall\, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

La dimostrazione segue subito dalle definizioni di somma e di trasposta.

Prop. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, $\forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall\, B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$.

Dim. ${}^t(AB)$ e ${}^tB\,{}^tA$ sono di tipo $\ell \times m$.

$$\left({}^t(AB)\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}$$

$$\left({}^tB\,{}^tA\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk}$$

$$\Rightarrow \quad \left({}^t(AB)\right)_{ij} = \left({}^tB\,{}^tA\right)_{ij} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, \ell,\ \forall\, j = 1, \ldots, m.$$

□

Matrici diagonali

Def. Data una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ chiamiamo *diagonale principale* il vettore

$$(A_{11},\ A_{22}, \ldots, A_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

Def. Una matrice quadrata $D \in M_n(\mathbb{K})$ è *diagonale* se $D_{ij} = 0\ \forall\, i \neq j$.

Oss. D è una matrice diagonale se le entrate fuori dalla diagonale principale sono nulle.

Def. Dati $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, indichiamo con

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in M_n(\mathbb{K})$$

la matrice diagonale avente $(a_1, \ldots, a_n)$ come diagonale principale, ossia

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Matrice identica. Per ogni intero $n \geqslant 1$ consideriamo la *matrice identica* (o *matrice identità*) di ordine n

$$I_n := \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

avente 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

Def. Per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad (\textit{Delta di Kronecker}).$$

Esempio. $\delta_{11} = 1$, $\delta_{12} = 0$, $\delta_{33} = 1$, $\delta_{41} = 0$.

Oss. δ_{ij} sono le entrate della matrice identica, ovvero $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.

Prop. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$A\,I_n = I_m\,A = A.$$

In altre parole la matrice identica è elemento neutro per il prodotto righe per colonne.

Dim. Dimostriamo $A\,I_n = A$.

$$(A\,I_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}\delta_{jj} = A_{ij}$$

dato che per $k \neq j$, $\delta_{kj} = 0$, mentre $\delta_{jj} = 1$.

La dimostrazione di $I_m\,A = A$ è simile. □

Matrici invertibili

Def. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Diciamo che A è *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$AB = BA = I_n.$$

In questo caso scriviamo $A^{-1} := B$ e chiamiamo A^{-1} l'*inversa* di A.

Se A è invertibile si ha quindi $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Oss. L'inversa se esiste è unica. Infatti se $B, B' \in M_n(\mathbb{K})$ sono inverse di A, si ha

$$B = B\,I_n = B(AB') = (BA)B' = I_n\,B' = B'.$$

La matrice nulla 0 chiaramente non è invertibile dato che $0B = 0$.

Oss. $I_n^{-1} = I_n$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è invertibile, infatti se

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

fosse l'inversa di A si avrebbe

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è impossibile.

Pertanto esistono matrici quadrate non nulle non invertibili.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile e si può determinare l'inversa

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

risolvendo un sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

In seguito capiremo esattamente quali matrici quadrate sono invertibili e vedremo metodi più efficienti per determinare l'inversa.