

Spazi vettoriali

Indichiamo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (oppure un campo qualsiasi).

Def (Assiomi di spazio vettoriale). Un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale è un insieme non vuoto V dove sono date due funzioni dette operazioni

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V & \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

dette rispettivamente *addizione* e *moltiplicazione (per uno) scalare*, che soddisfano i seguenti assiomi $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

- 1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *Proprietà associativa per l'addizione*
- 2) $\exists 0_V \in V$ t.c. $v + 0_V = v$ *Vettore nullo*
- 3) $\exists -v \in V$ t.c. $v - v = 0_V$ *Vettore opposto*
- 4) $u + v = v + u$ *Proprietà commutativa per l'addizione*
- 5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *Proprietà distributiva vettoriale*
- 6) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *Proprietà distributiva scalare*
- 7) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ *Proprietà associativa scalare*
- 8) $1v = v$ *Elemento neutro moltiplicativo*

Gli elementi di V sono detti *vettori* e gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti *scalari*.

Un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale è detto anche *spazio vettoriale su $\mathbb{K}$* . Se consideriamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) diciamo anche spazio vettoriale reale (risp. complesso). Scriviamo anche 0 anziché 0_V senza confonderlo con $0 \in \mathbb{K}$.

Esempio. I seguenti sono $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali con le operazioni di addizione e moltiplicazione scalare definite in precedenza. La validità degli assiomi segue subito dalle proprietà dei campi e dei polinomi.

$\mathbb{K}^n$ (ossia $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale numerico di dimensione n .

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ spazio delle matrici $m \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$.

$M_n(\mathbb{K})$ spazio delle matrici quadrate di ordine n a entrate in $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[x]$ spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Oss. Per gli assiomi (1) e (4) possiamo scrivere

$$v_1 + \cdots + v_n$$

senza parentesi e in un ordine qualsiasi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in V$.

Prop. Per qualunque spazio vettoriale V valgono le seguenti proprietà, $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

- a) Il vettore nullo 0_V è unico.
- b) $u + w = v + w \Rightarrow u = v$ (legge di cancellazione).
- c) $0v = 0_V$.
- d) $\alpha 0_V = 0_V$.
- e) $\alpha v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ oppure $v = 0_V$.
- f) L'opposto $-v$ è unico.
- g) $-v = (-1)v$.

Dim.

- a) Supponiamo $0'_V \in V$ altro vettore nullo: $0_V = 0_V + 0'_V = 0'_V$.
- b) Basta sommare a entrambi i membri $-w$.
- c) $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0_V = 0v$.
- d) $\alpha 0_V = \alpha(00_V) = (\alpha 0)0_V = 00_V = 0_V$.
- e) $\alpha v = 0_V$ e $\alpha \neq 0 \Rightarrow 0_V = \alpha^{-1}0_V = \alpha^{-1}(\alpha v) = (\alpha^{-1}\alpha)v = 1v = v$.
- f) $v' \in V$ altro opposto di $v \Rightarrow v + v' = 0_V = v - v \Rightarrow v' = -v$ per (b).
- g) $0_V = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$. □

Combinazioni lineari. Consideriamo un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V , vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ e scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, con $n \in \mathbb{N}$. Il vettore

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

è detto *combinazione lineare* di $v_1, \dots, v_n$ con *coefficienti* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Scriveremo anche

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Una combinazione lineare è *nulla* se ha come risultato il vettore nullo:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Una combinazione lineare è *banale* se tutti i coefficienti sono nulli. Una combinazione lineare banale è nulla ma il viceversa non è sempre vero.

Esempio. Combinazione lineare nulla non banale in $\mathbb{R}^2$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dipendenza lineare. I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare nulla non banale, ossia se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Indipendenza lineare. I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono *linearmente indipendenti* se ammettono un'unica combinazione lineare nulla, ossia quella banale. In altri termini $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ si ha:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Questa è l'implicazione che va dimostrata per far vedere che i vettori dati sono linearmente indipendenti. Si noti che l'implicazione inversa è banale (sempre verificata), quindi non serve.

Pertanto le due nozioni di dipendenza e indipendenza lineare sono complementari (o l'una o l'altra).

I vettori dell'esempio precedente sono linearmente dipendenti.

Esempio. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e proviamo a capire se sono linearmente indipendenti oppure no. Dobbiamo se esistono due scalari non entrambi nulli $x, y \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} && \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -11y = 0 \end{cases} && \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unica soluzione è quella banale, quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Per stabilire la dipendenza o indipendenza lineare di vettori in $\mathbb{K}^n$ possiamo impostare un sistema omogeneo, risolverlo e vedere se ci sono soluzioni non nulle. Più avanti vedremo un metodo più veloce.

Oss. Se uno dei vettori $v_1, \dots, v_n$ è nullo allora questi vettori sono linearmente dipendenti. Infatti se $v_1 = 0_V$ si ha:

$$1 \cdot 0_V + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V$$

è combinazione lineare nulla non banale essendo 1 il primo coefficiente.

Vettori proporzionali. $v, w \in V$ sono *proporzionali* se $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha w \quad \text{oppure} \quad w = \alpha v.$$

Prop. $v, w \in V$ sono *linearmente dipendenti* $\Leftrightarrow v, w$ sono *proporzionali*.

Dim. $\Rightarrow$ $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli t.c. $\alpha v + \beta w = 0_V$.

$\beta \neq 0 \Rightarrow w = -\frac{\alpha}{\beta}v$. $\alpha \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{\beta}{\alpha}w$. Quindi sono proporzionali.

$\Leftarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha w \Rightarrow v - \alpha w = 0_V$ oppure $w = \alpha v \Rightarrow \alpha v - w = 0_V$. In entrambi i casi otteniamo una combinazione lineare nulla non banale. Quindi sono linearmente dipendenti. $\square$

Esempio.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sono proporzionali: $w = 3v$. Quindi sono linearmente dipendenti.

Esempio.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

non sono proporzionali. Quindi sono linearmente indipendenti.

N.B. Questo metodo per stabilire la lineare dipendenza/indipendenza è valido se i vettori sono due, non se sono più di due, come illustrato nel primo esempio sopra e in quello seguente.

Esempio. I seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ammette soluzioni non nulle quindi i vettori dati sono linearmente dipendenti.