Calcoli con le basi

Data una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ per V e dati $u_1 \dots, u_k \in V$ possiamo determinare una base di

$$U = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k) \subset V$$

considerando la matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ avente per colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k$ rispetto a $\mathcal{B}$. Mediante l'algoritmo di Gauss trasformiamo A in A' a gradini. Si ha:

$$\dim U = \mathrm{rg}(A) = \text{numero dei pivot di } A'.$$

Una base di U è data da quei generatori $u_1, \dots, u_k$ corrispondenti alle colonne dei pivot.

Esempio. Determinare base e dimensione di $U = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot nelle colonne $1, 2, 4 \Rightarrow \dim U = 3$ e (u_1, u_2, u_4) base per U.

Equazioni di sottospazi vettoriali

Equazione vettoriale. Dato un sottospazio vettoriale $U \subset V$, scegliamo una base $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_k)$ per U. Ogni vettore $v \in U$ è combinazione lineare unica di $u_1, \dots, u_k$ e possiamo scrivere

$$U\colon \ v = t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k.$$

Questa si chiama *equazione vettoriale* di U. I coefficienti $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ prendono il nome di *parametri* e variano in tutti i modi possibili.

Equazioni parametriche. Scegliamo una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V.

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \qquad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \qquad j = 1, \dots, k.$$

Poniamo anche

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

L'equazione vettoriale di U si scrive come

$$U\colon \ X = t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$$

da cui si ottengono le *equazioni parametriche* di U

$$U: \begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \cdots + a_{1k}t_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nk}t_k \end{cases}$$

Equazioni cartesiane. Nelle equazioni parametriche possiamo eliminare i parametri $t_1, \ldots, t_k$. Otteniamo le *equazioni cartesiane* di U

$$U: \begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo il cui spazio delle soluzioni rappresenta U: $v \in U \Leftrightarrow$ il vettore delle coordinate di v è soluzione del sistema.

Il passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche si fa risolvendo il sistema e determinando la soluzione generale, che esprime le equazioni parametriche.

Esempio. $U = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^4$, da un esempio della lezione scorsa:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$U: \; X = t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 \qquad \text{equazione vettoriale}$$

$$U: \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 \\ x_2 = 2t_1 + t_3 \\ x_3 = -t_1 + 2t_2 + t_3 \\ x_4 = t_1 + 2t_2 \end{cases} \qquad \text{equazioni parametriche}$$

Per trovare le equazioni cartesiane risolviamo il sistema col metodo di Gauss, trattando i parametri t_i come incognite e le x_i come termini noti. Ricaveremo le equazioni cartesiane come condizioni di compatibilità.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 3 & 0 & -x_1 + x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 2 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 3 & 0 & -x_1 + x_4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 0 & 0 & -3 & -4x_1 - 3x_3 + x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 \end{array}\right)$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana

$$U: \; 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0.$$

Esempio. $W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane

$$W: \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determiniamo equazioni parametriche, una base e la dimensione di W.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 + x_4 = 0\\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\end{cases}$$

$$W: \begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_2\\ x_2 = -3t_1 + t_2\\ x_3 = t_1\\ x_4 = t_2\end{cases} \qquad w_1 = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_W = (w_1, w_2)$ base per W, ricavabile dai coefficienti dei parametri o anche assegnando ai parametri (t_1, t_2) i valori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ risp.
La dimensione coincide dunque col numero dei parametri liberi: $\dim W = 2$.

Completamento della base

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = (b_1 \dots, b_n)$ base per V.

Oss. Il vettore coordinate di b_i rispetto alla base $\mathcal{B}$ è e_i, i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$b_i = 0b_1 + \dots + b_i + \dots + 0b_n = \begin{pmatrix}\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \leftarrow i\text{-esima posizione}$$

Teorema di completamento della base. *Dati $u_1 \dots, u_k \in V$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists\, u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathcal{B}$ t.c. $(u_1, \dots, u_n)$ base per V.*

Dim. $A \in M_{n,k+n}(\mathbb{K})$ matrice avente per colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k, b_1, \dots, b_n \Rightarrow \operatorname{rg} A = n$. $A \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} A'$ a gradini con n pivot sulle prime k colonne (linearmente indipendenti) e su altre $n - k$ colonne corrispondenti a vettori della base $\mathcal{B}$. Le colonne con i pivot sono base. $\square$

Esempio.

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$(u_1, u_2, e_2) \text{ base} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$